

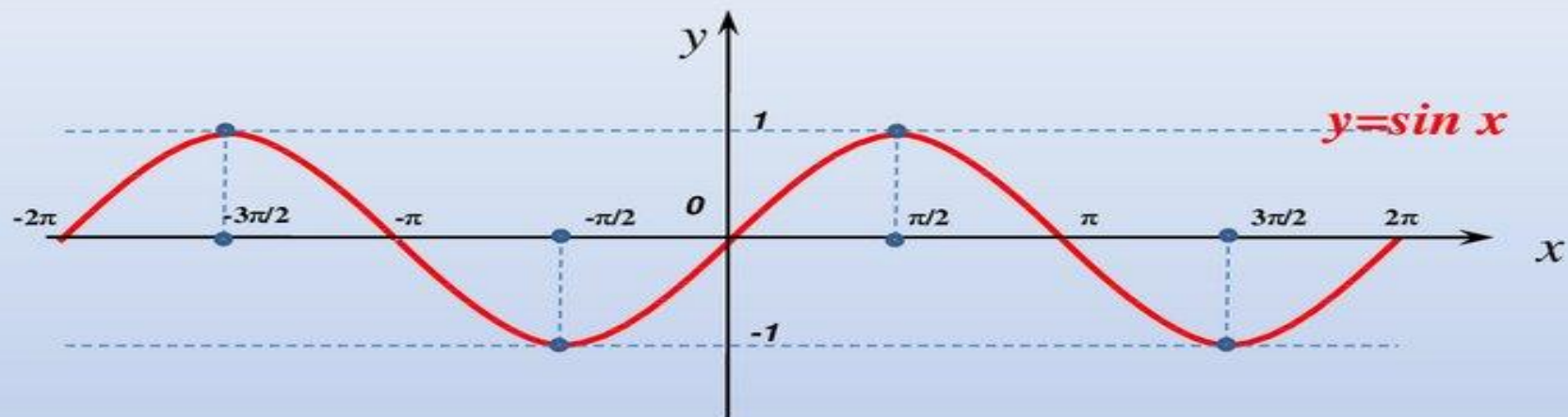
**Графики  
тригонометрических  
функций.**

**Преобразование графиков.**

# Графики тригонометрических функций и их свойства

- ☞ Функция  $y = \sin x$ , ее свойства
- ☞ Функция  $y = \cos x$
- ☞ Преобразование графиков тригонометрических функций путем параллельного переноса
- ☞ Преобразование графиков тригонометрических функций путем сжатия и расширения
- ☞ Преобразование графиков тригонометрических функций путем зеркального отражения относительно оси абсцисс
- ☞ Построение графика функции гармонических колебаний
- ☞  $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$
- ☞ Построение графика  $y = \sin x$  с помощью числового круга

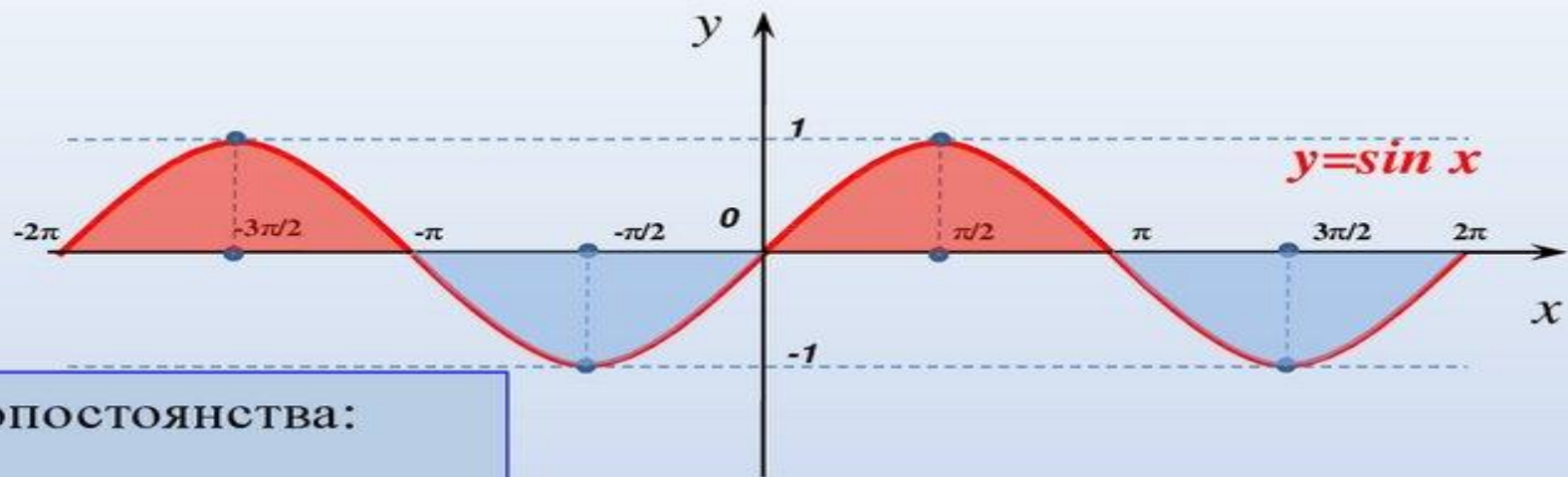
## Функция $y=\sin x$ и ее свойства



Графиком функции  $y=\sin x$  является синусоида

Свойства функции:

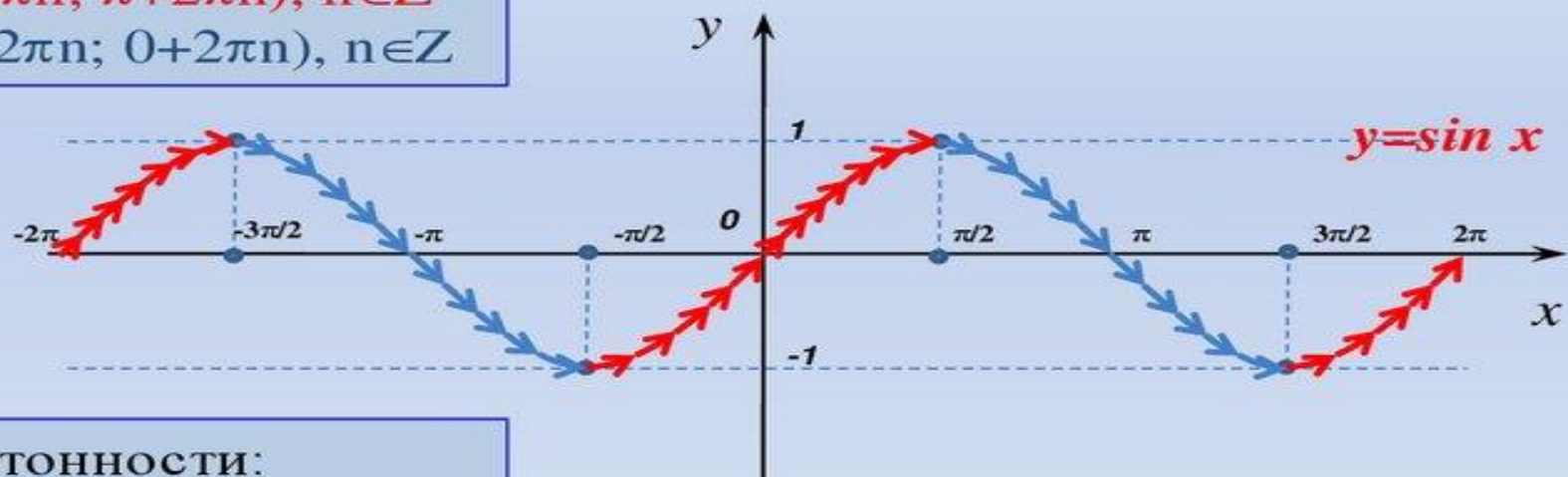
1.  $D(y) = \mathbb{R}$
2. Периодическая ( $T=2\pi$ )
3. Нечетная ( $\sin(-x)=-\sin x$ )
4. Нули функции:  
 $y=0, \sin x=0$  при  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$



5. Промежутки знакопостоянства:

$y > 0$  при  $x \in (0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

$y < 0$  при  $x \in (-\pi + 2\pi n; 0 + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$



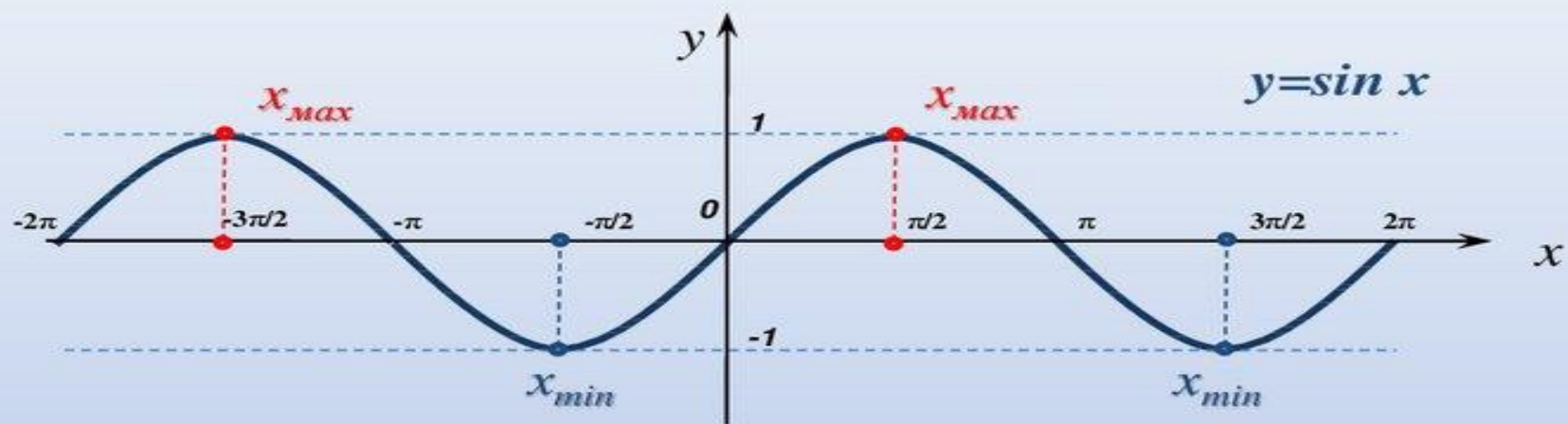
6. Промежутки монотонности:

функция возрастает на промежутках

вида:  $[-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

функция убывает на промежутках

вида:  $[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

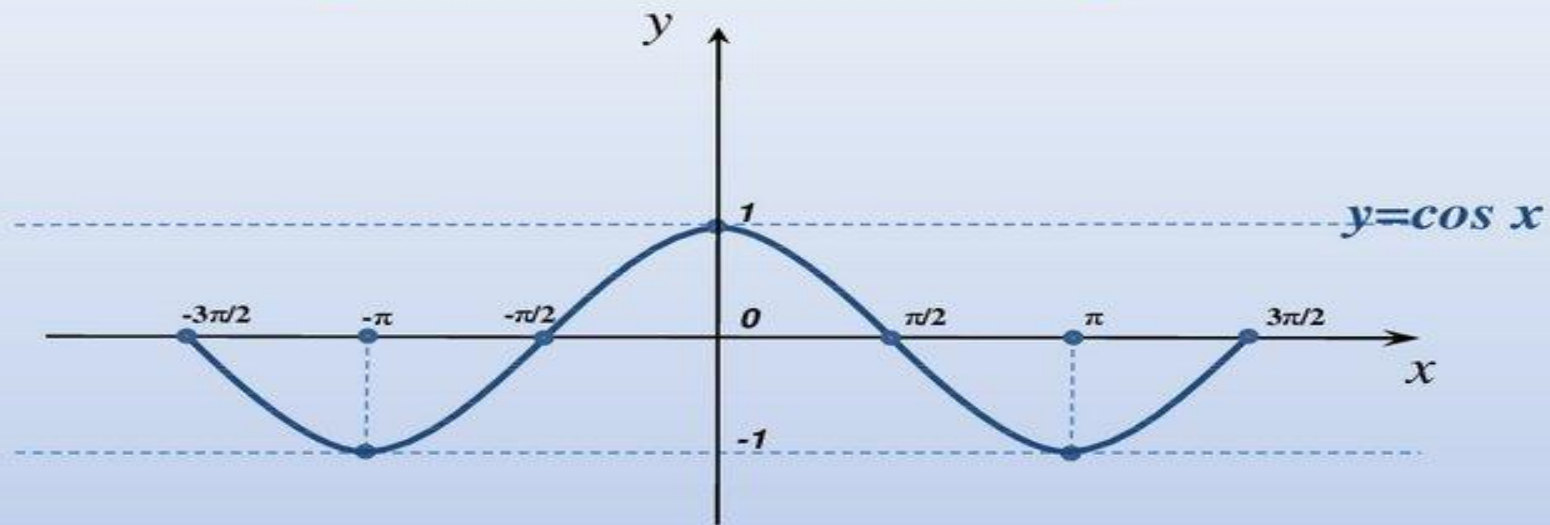


7. Точки экстремума:

$$X_{\max} = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$X_{\min} = -\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

## Функция $y = \cos x$



Графиком функции  $y = \cos x$  является косинусоида

$$\sin(x + \pi/2) = \cos x$$

## Свойства функции $y = \cos x$

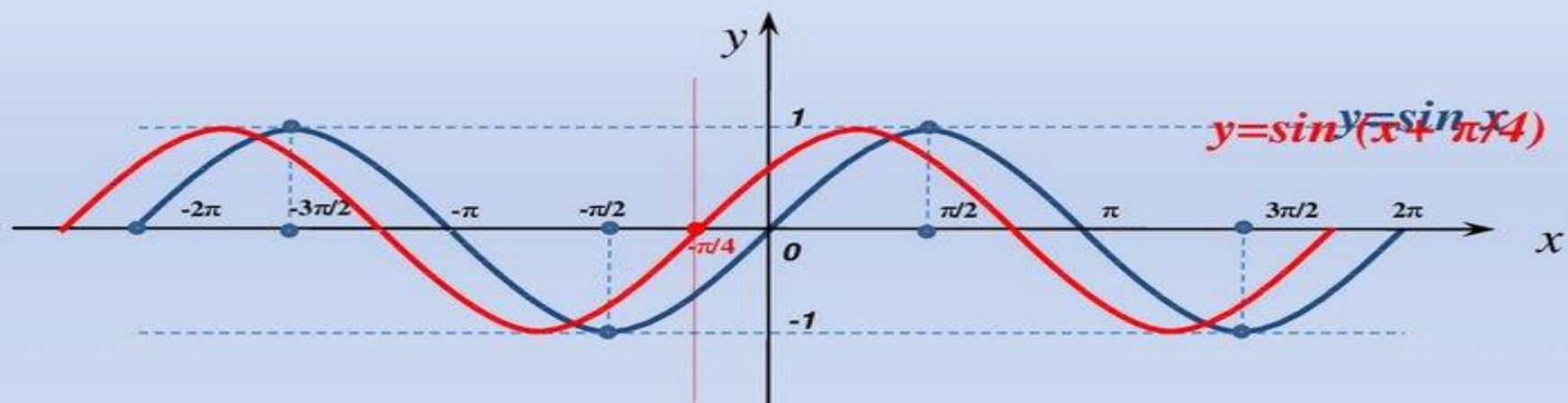
1.  $D(y) = \mathbb{R}$
2. Периодическая  $T = 2\pi$
3. Четная  $\cos(-x) = \cos x$
4. Нули функции:  
 $y = 0, \cos x = 0$  при  $x = 1/2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
5. Промежутки знакопостоянства:  
 $y > 0$  при  $x \in (-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$   
 $y < 0$  при  $x \in (\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
6. Промежутки монотонности:  
функция возрастает на промежутках вида:  
 $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$   
функция убывает на промежутках вида:  
 $[0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$
7. Точки экстремума:  
 $X_{\max} = 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 $X_{\min} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

***Преобразование графиков  
тригонометрических функций путем  
параллельного переноса***

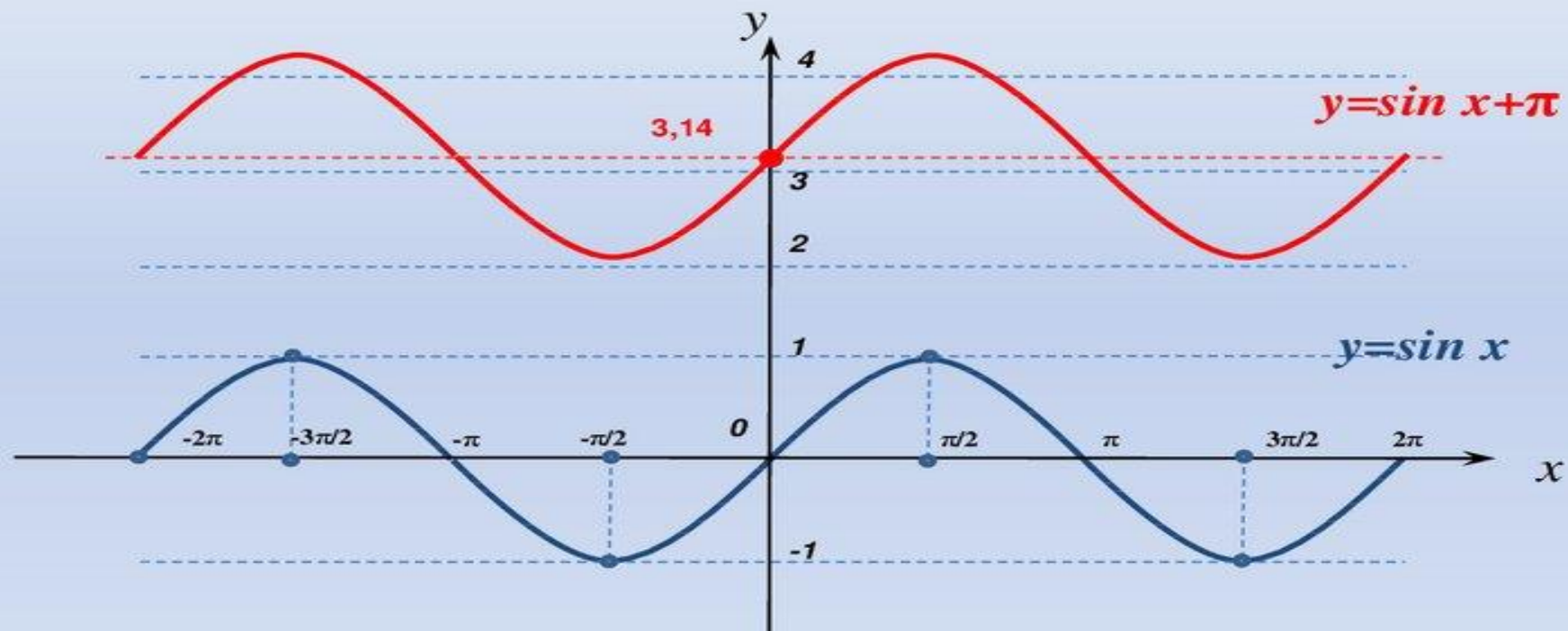
- **График функции  $y = f(x + e)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  параллельным переносом на  $(-e)$  единиц вдоль оси абсцисс**
- **График функции  $y = f(x) + a$  получается из графика функции  $y = f(x)$  параллельным переносом на  $(a)$  единиц вдоль оси ординат**



Построение графика функции  $y = \sin(x + \pi/4)$  путем перемещения графика  $y = \sin(x)$  влево по оси абсцисс на расстояние  $\pi/4$



Построение графика функции  $y=\sin x+\pi$  путем параллельного переноса графика  $y=\sin(x)$  на расстояние  $\pi$  единиц вдоль оси ординат



*Преобразование графиков  
тригонометрических функций путем  
сжатия и растяжения*

- График функции  $y = k f(x)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  путем его растяжения в  $k$  раз (при  $k > 1$ ) вдоль оси ординат
- График функции  $y = k f(x)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  путем его сжатия в  $k$  раз (при  $0 < k < 1$ ) вдоль оси ординат

- График функции  $y = 3\sin x$  получается из графика функции  $y = \sin x$  путем его растяжения в 3 раза вдоль оси ординат

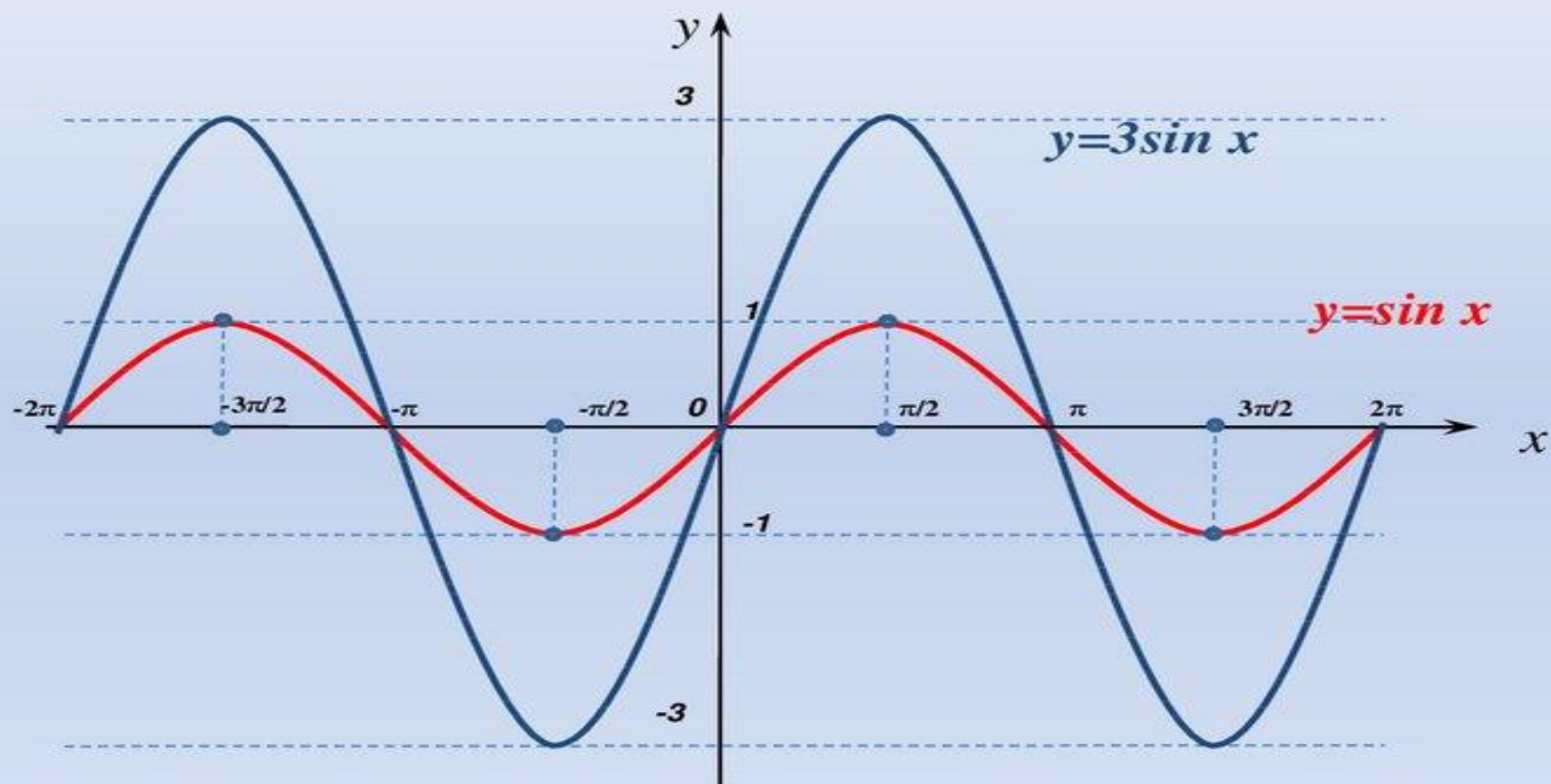
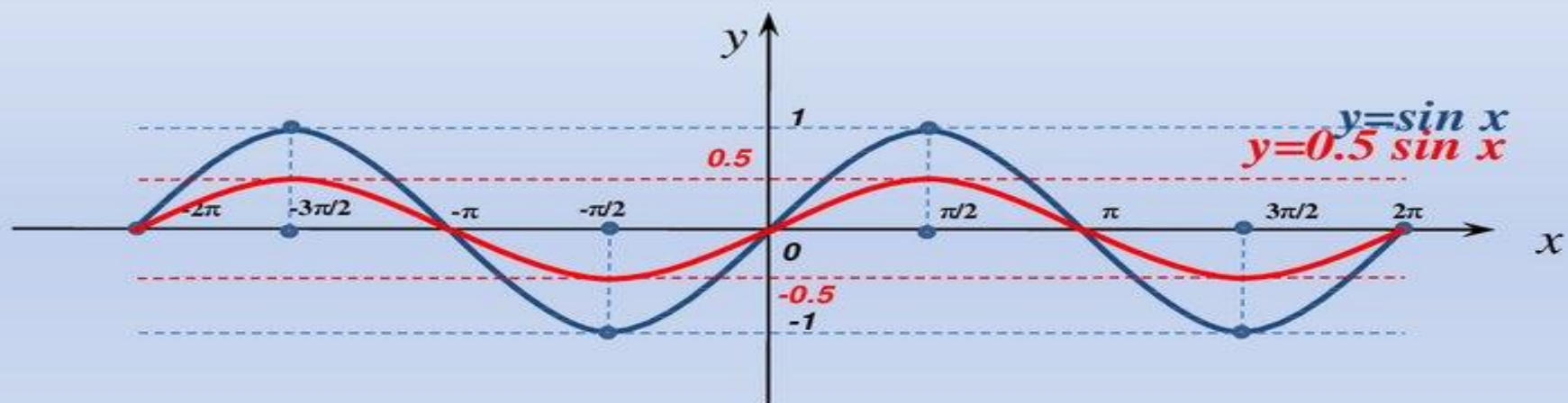


График функции  $y = 0.5 \sin x$  получается из графика функции  $y = \sin x$  путем его сжатия в 2 раза вдоль оси ординат

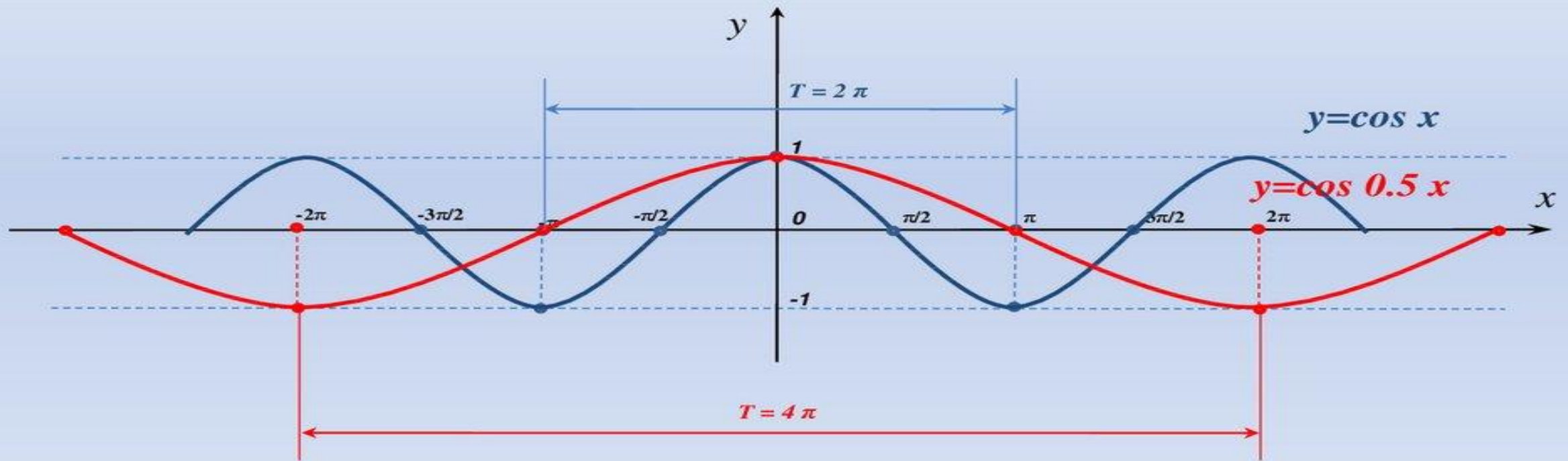


*Преобразование графиков  
тригонометрических функций путем  
сжатия и растяжения*

График функции  $y = f(kx)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  путем его сжатия в  $k$  раз (при  $k > 1$ ) вдоль оси абсцисс

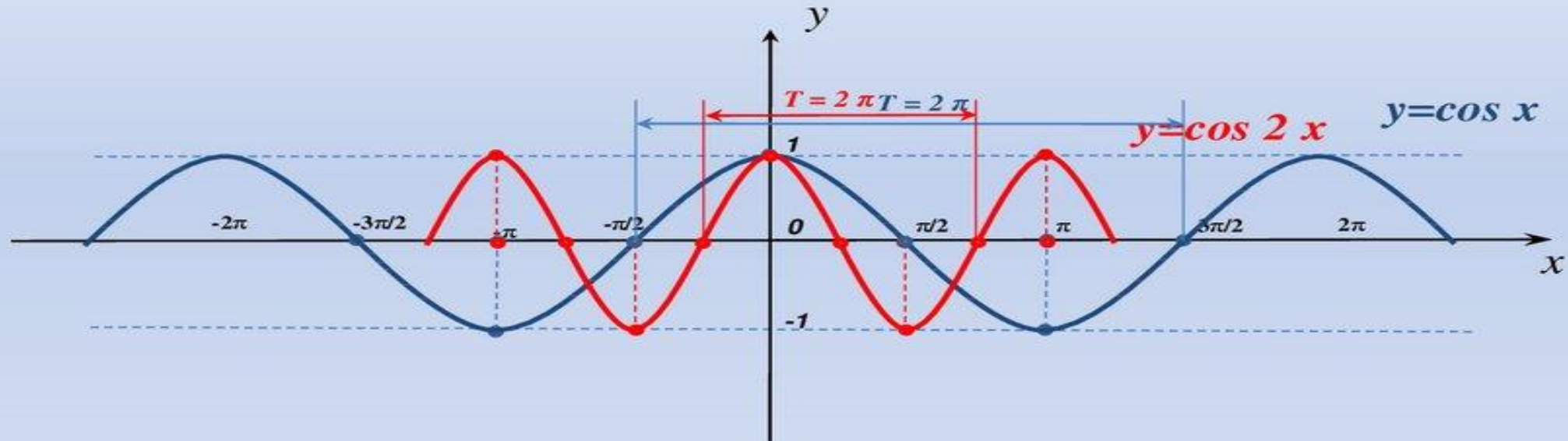
График функции  $y = f(kx)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  путем его растяжения в  $k$  раз (при  $0 < k < 1$ ) вдоль оси абсцисс

График функции  $y = \cos(0.5x)$  получается из графика функции  $y = \cos x$  путем его растяжения в 2 раза ( $0 < k < 1$ ) вдоль оси абсцисс



Видно, что период ( $T$ ) функции увеличился в 2 раза, т.к.  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega$  – коэффициент при переменной  $x$  (частота колебаний)

График функции  $y = \cos 2x$  получается из графика функции  $y = \cos x$  путем его сжатия в 2 раза ( $k > 1$ ) вдоль оси абсцисс



Видно, что период ( $T$ ) функции уменьшился в 2 раза, т.к.  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega$  – коэффициент при переменной  $x$  (частота колебаний)



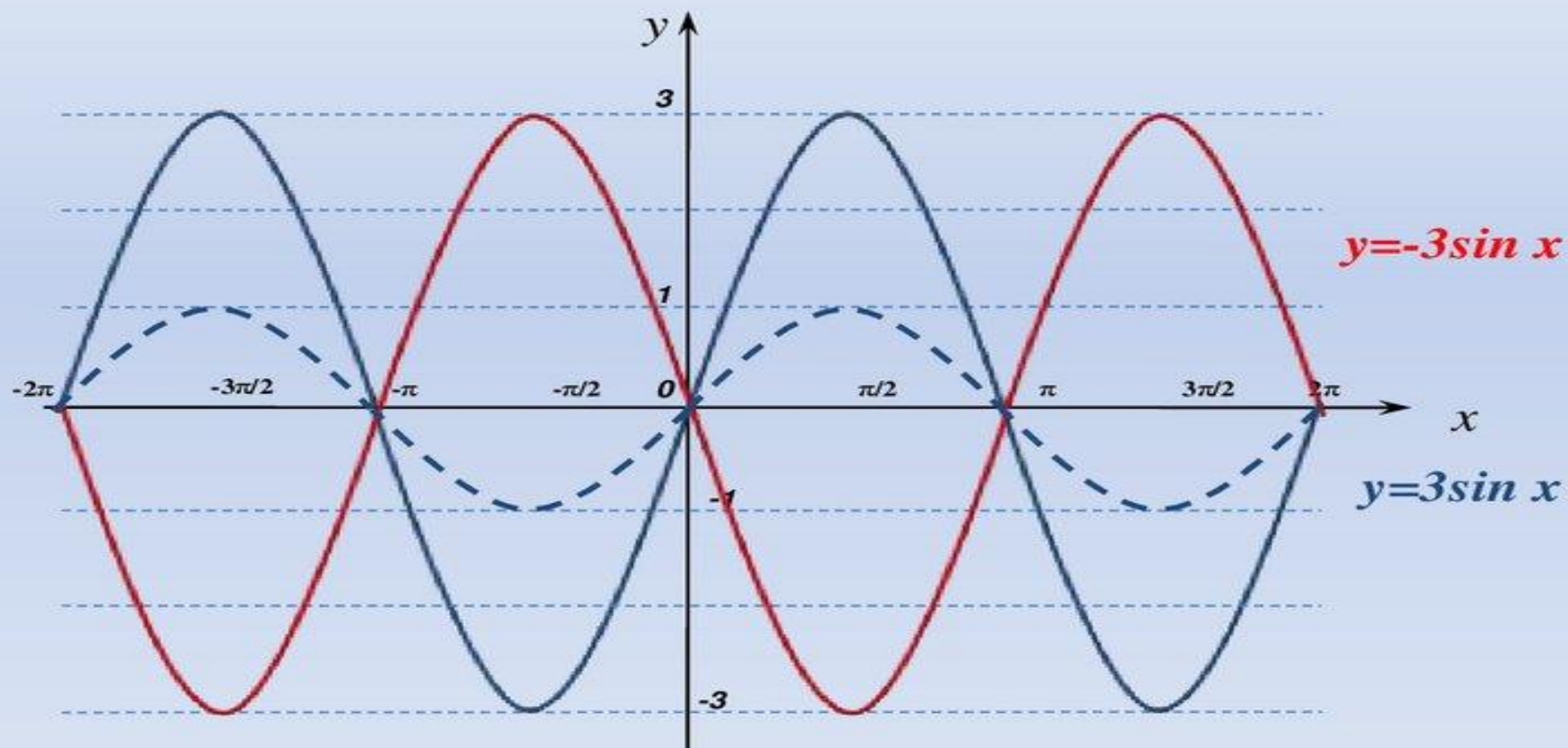
***Преобразование графиков  
тригонометрических функций путем  
зеркального отражения относительно  
оси абсцисс***

Графики функций  $y = -f(kx)$  и  $y = -k f(x)$  получаются из графиков функций  $y = f(kx)$  и  $y = k f(x)$  соответственно путем их зеркального отображения относительно оси абсцисс

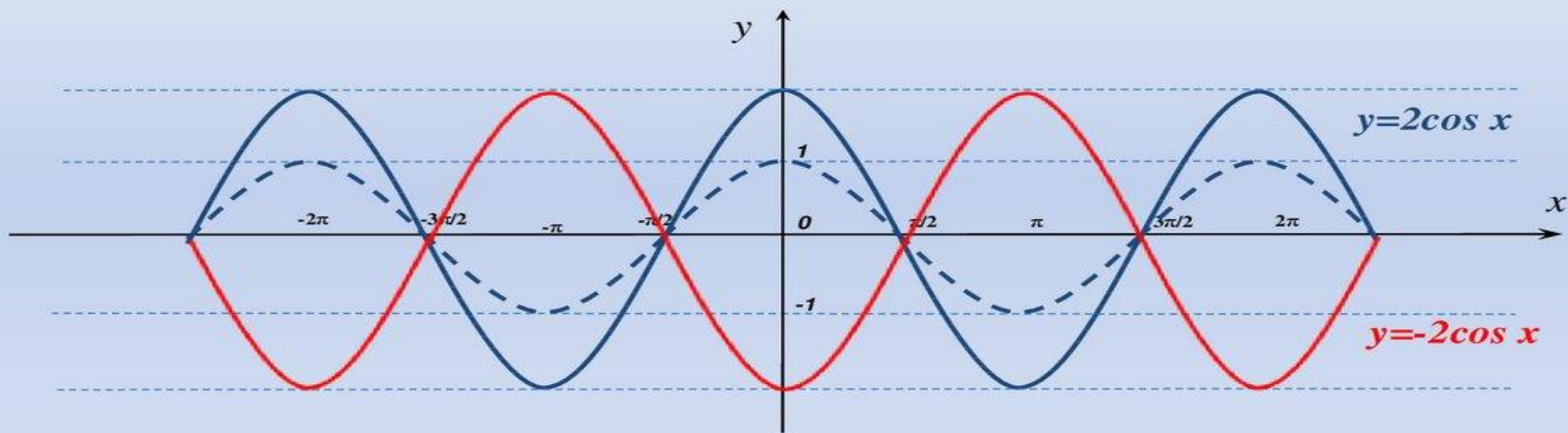
синус – функция нечетная, поэтому  $\sin(-kx) = -\sin(kx)$

косинус – функция четная, значит  $\cos(-kx) = \cos(kx)$

Графики функций  $y = -3\sin x$  получается из графика функции  $y = 3\sin x$  путем ее зеркального отображения относительно оси абсцисс



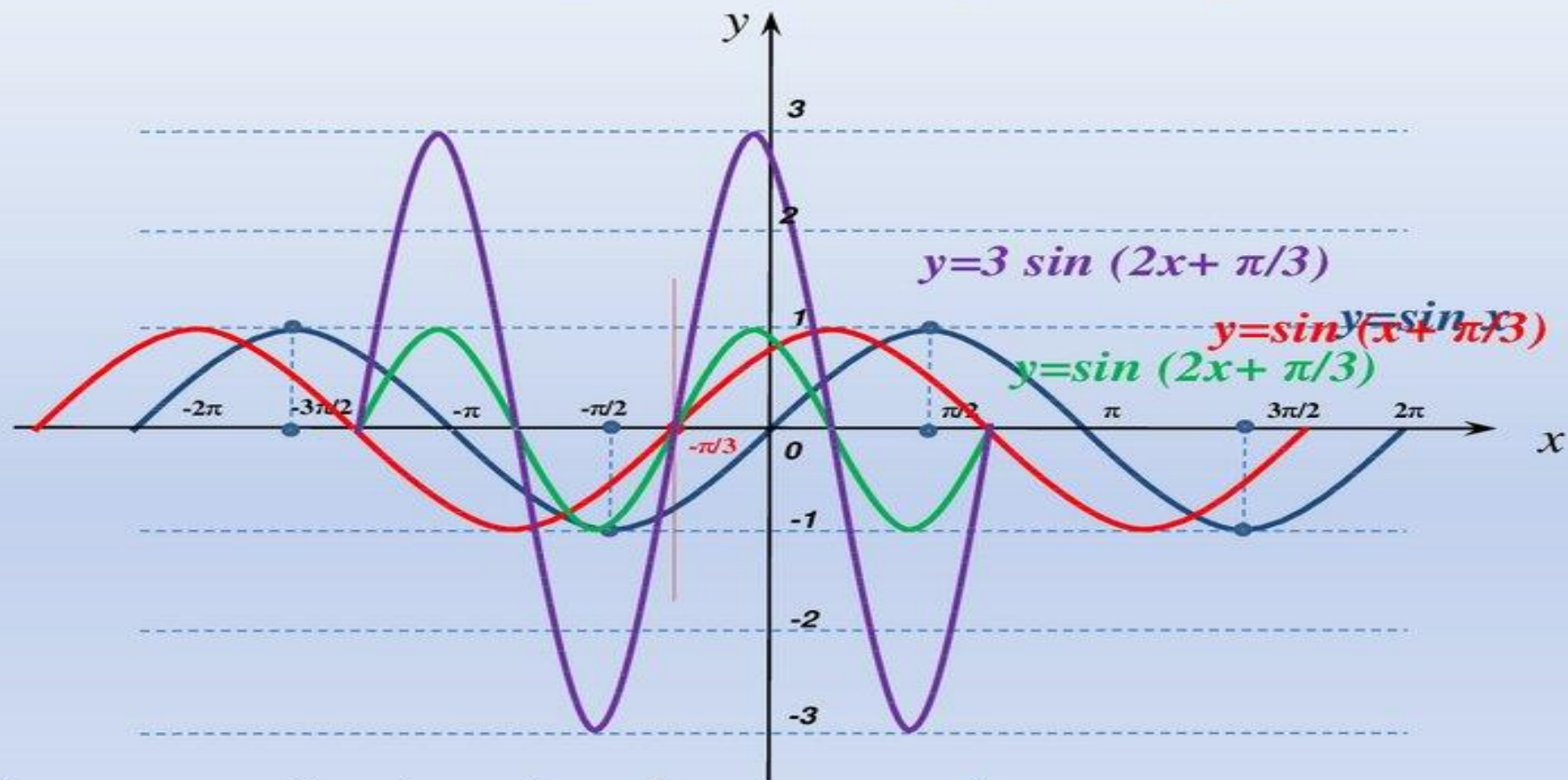
Графики функций  $y = -2\cos x$  получается из графика функции  $y = 2\cos x$  путем ее зеркального отображения относительно оси абсцисс



***Построение графика функции гармонических колебаний***  
 ***$y=A \sin(\omega x+\varphi_0)$***

*Для примера строим график функции  $y=3 \sin (2x+\pi/3)$ .  
Здесь амплитуда колебаний  $A$  равняется 3 единицам,  
круговая частота колебаний  $\omega$  равна 2,  
а начальная фаза колебаний  $\varphi_0$  равна  $\pi/3$ , т.е.:  
 **$A=3$ ,  $\omega=2$  и  $\varphi_0= \pi/3$ . Период колебаний  $T=2\pi/\omega$ .***

Последовательность построения графика функции  $y=3 \sin (2x+\pi/3)$



- Строим исходный график функции  $y = \sin x$
- Используя параллельный перенос сдвигаем график функции  $y = \sin x$  влево по оси абсцисс на расстояние  $\pi/3$
- Сжимаем график функции  $y = \sin (x+\pi/3)$  в 2 раза по оси абсцисс
- Растягиваем график функции  $y = \sin (2x+\pi/3)$  в 3 раза по оси ординат

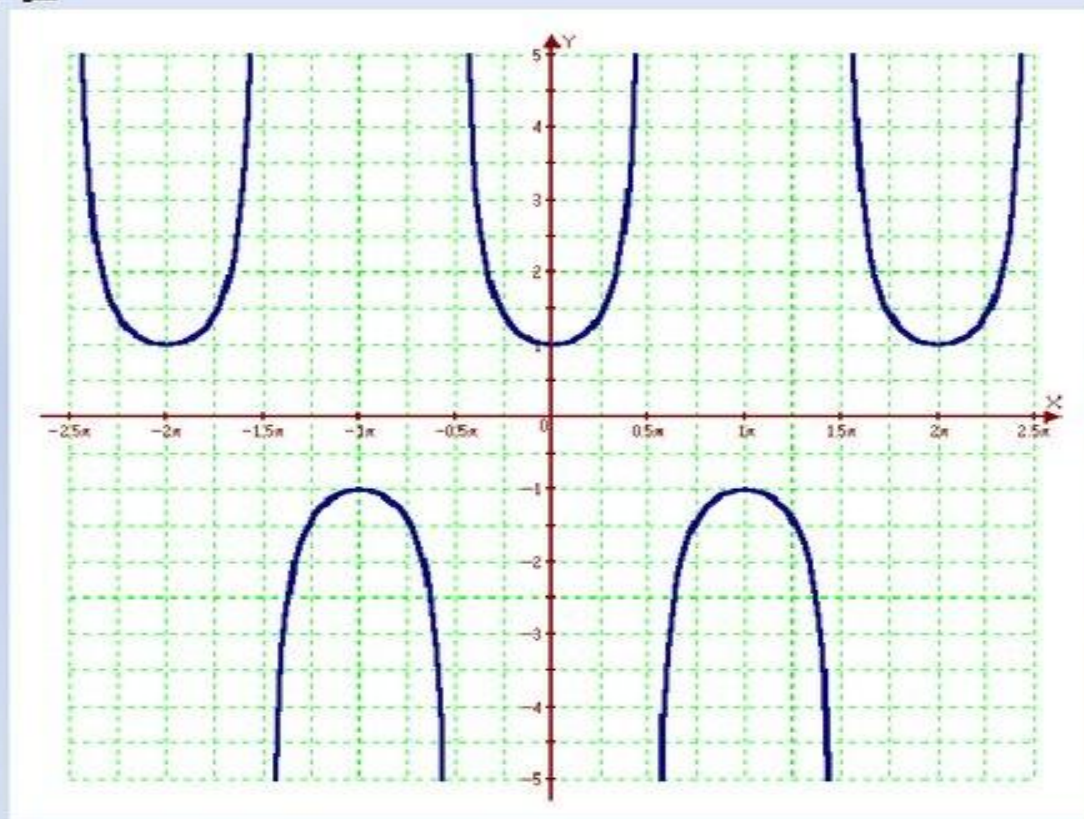
## Построение графика $y = \sin x$ с помощью числового круга



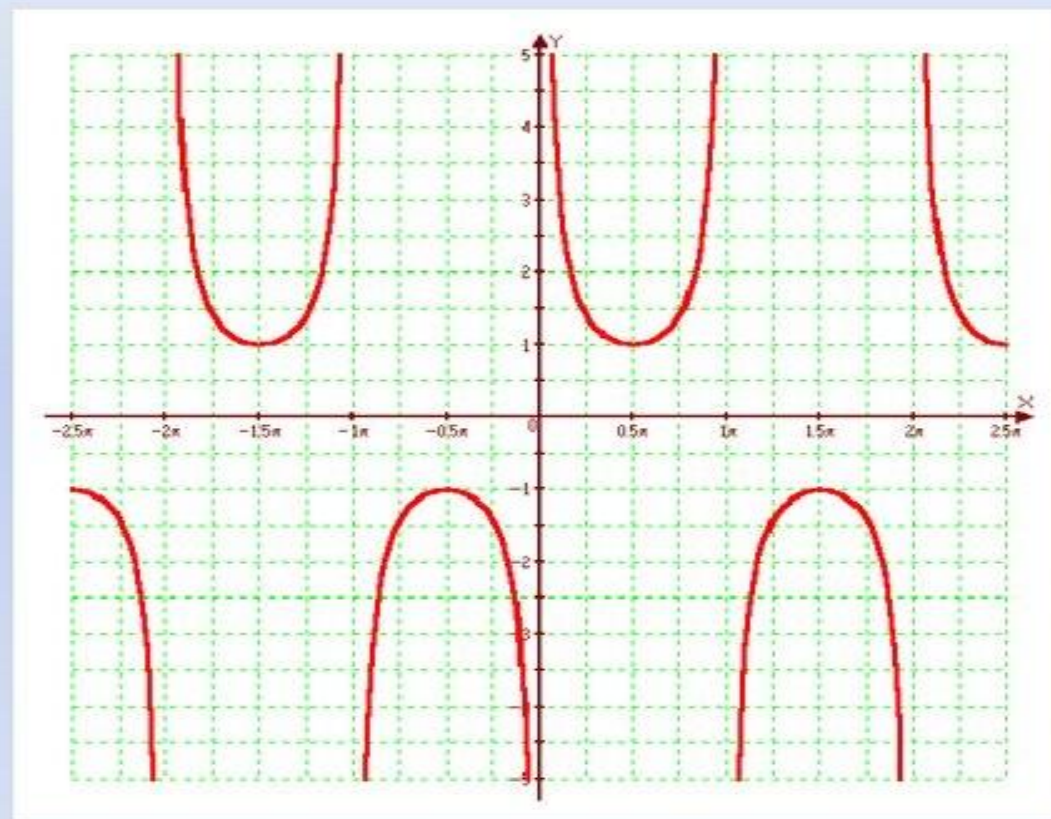


## Для любознательных...

Посмотрите как выглядят графики некоторых других триг. функций:



$y = 1 / \cos x$  или  $y = \sec x$   
(читается секонс)



$y = \operatorname{cosec} x$  или  $y = 1/\sin x$   
читается косеконс

***Д/З: построить график функции тангенса и котангенса. Описать свойства.***