

# АЛГЕБРА ЛОГИКИ

# ПОНЯТИЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

*Алгебра логики* является разделом развивающейся науки – дискретной математики.

*Дискретная математика* занимается изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях.

# СТРУКТУРЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

К числу структур, изучаемых дискретной математикой, могут быть отнесены конечные группы, конечные графы, математические модели преобразователей информации и конечных автоматов.

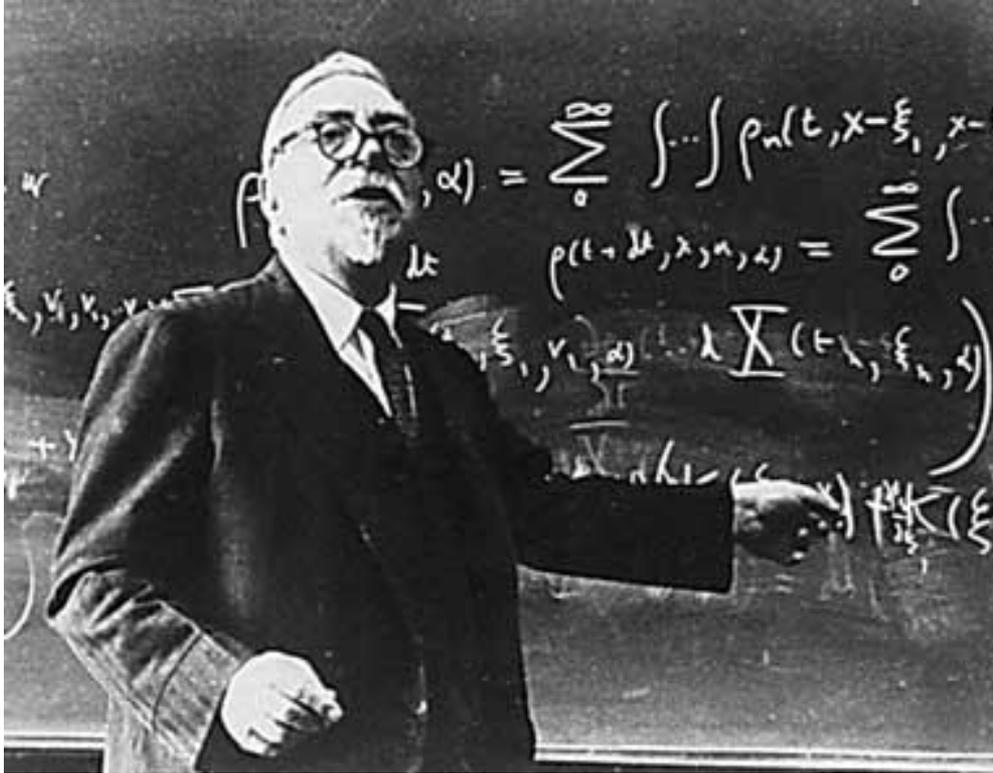
**Конечная группа** — [алгебраическая группа](#), содержащая конечное число элементов (это число называется её **порядком**) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: [топология](#)) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: топология, [криптография](#)) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: топология, криптография, [кристаллография](#)) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: топология, криптография, кристаллография, [атомная физика](#)) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: топология,

# КИБЕРНЕТИКА

Наибольшего развития дискретная математика достигла в связи с запросами практики, приведшими к появлению новой науки – кибернетики.

***Кибернетика*** – наука об общих законах получения, хранения, передачи и преобразования информации в сложных системах.

Термин **кибернетика** ввел американский ученый Норберт Винер (1894 – 1964)



# ИСТОРИЯ ТЕРМИНА

Широкое использование ЭВМ и базирующихся на них АСУ (автоматизированных систем управления) потребовало создания научных основ проектирования ЭВМ и АСУ. Полученные научные методы и результаты объединили в новую науку, получившую в США и Англии название *computer science*, во Франции – *Informatics*. В СССР, а затем и в России название *кибернетика* было вытеснено (поглощено) названием *информатика*.

# ЛОГИКА В ИНФОРМАТИКЕ

Математический аппарат алгебры логики широко используется в информатике, в частности, в таких ее разделах, как проектирование ЭВМ, теория автоматов, теория алгоритмов, теория информации, целочисленное программирование.

# ОТЕЦ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ



Джордж Буль (1815 – 1864)

# Джордж Буль

Построил один из разделов формальной логики в виде некоторой «алгебры», аналогичной алгебре чисел, но не сводящейся к ней. Алгебра в широком смысле этого слова – наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться не только над числами, но и над другими математическими объектами.

# ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Объектами алгебры логики являются ***высказывания***.

Величины, которые отражают истинность высказываний, называют ***логическими величинами***.

Логическая величина может иметь только одно из двух ***значений***, которые выражают парой слов или чисел: «да» – «нет», «истина» – «ложь»,  
1 - 0

# У ЛОГИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЕСТЬ ИМЯ

- При описании рассуждений высказывания обозначают **именами логических величин**.
- **Значения** переменных логических величин для разных объектов или ситуаций удобно представлять в виде **таблиц**:

| Высказывание<br>(простое)    | Имя логической<br>величины | Значение логической<br>величины |
|------------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| Сегодня нет опоздавших       | A                          | 1                               |
| Все учащиеся внимательны     | B                          | 0                               |
| Дискотека в школе отменена   | C                          | 0                               |
| Завтра будет 2 марта 2011 г. | D                          | 1                               |
| Никто не получит оценку «2»  | E                          | 0                               |
| Мы всегда говорим правду     | F                          | 1                               |

# ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Составные (сложные) высказывания образуются с помощью связок «И», «ИЛИ», «НЕ», которые в алгебре логики заменяются на **логические операции**:

- **Инверсия**, логическое отрицание (НЕ);
- **Конъюнкция**, логическое умножение (И);
- **Дизъюнкция**, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение (ИЛИ);
- **Разделительная (строгая) дизъюнкция**, исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2, неравнозначность (ЛИБО);
- **Импликация**, следование (ЕСЛИ ... , ТО);
- **Эквиваленция**, эквивалентность,, равнозначность (ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА).

# ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

Логические операции задаются *таблицами истинности*, в которых отображаются их значения.

Таблица истинности — это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

# ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ (КОНЪЮНКЦИЯ)

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0            |
| 0 | 1 | 0            |
| 1 | 0 | 0            |
| 1 | 1 | 1            |

Связка «И»

# ПРИМЕРЫ КОНЪЮНКЦИИ

*«истина» и «истина» = «истина»*

*«истина» и «ложь» = «ложь»*

*«ложь» и «истина» = «ложь»*

*«ложь» и «ложь» = «ложь»*

# ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ (ДИЗЪЮНКЦИЯ)

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0          |
| 0 | 1 | 1          |
| 1 | 0 | 1          |
| 1 | 1 | 1          |

Связка «ИЛИ»

# ПРИМЕРЫ ДИЗЪЮНКЦИИ

*«истина» или «истина» = «истина»*

*«истина» или «ложь» = «истина»*

*«ложь» или «истина» = «истина»*

*«ложь» или «ложь» = «ложь»*

# ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

| A | $\bar{A}$ |
|---|-----------|
| 0 | 1         |
| 1 | 0         |

Связка «НЕ»

# ПРИМЕРЫ ИНВЕРСИИ

*не «истина» = «ложь»*

*не «ложь» = «истина»*

# ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Составное высказывание, выраженное в виде формулы, называется **логическим выражением**.

В логическом выражении простые высказывания обозначают **именами логических величин**.

Величины, которые отражают истинность высказываний, называют **логическими величинами**.

# ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

| Сложные высказывание               | Использование связок                   | Логические выражения |
|------------------------------------|--|----------------------|
| Дождя не ожидается                 | не (ождается дождь)                    | не Д                 |
| Ожидается дождь со снегом          | (ождается дождь) и (ождается снег)     | Д и С                |
| Ожидаются осадки                   | (ождается дождь) или (ождается снег)   | Д или С              |
| Ожидается сильный мороз и снегопад | (не ожидается дождь) и (ождается снег) | (не Д) и С           |

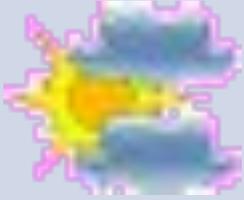
**Простые высказывания:**

**Д** – ожидается дождь; **С** – ожидается снег

# ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Выражение, составленное из одной логической величины и связки «не», имеет значение, противоположное значению величины.
2. Выражение, составленное из двух величин и связки «и», имеет значение «истина», только если значение «истина» имеют обе величины.
3. Выражение, составленное из двух величин и связки «или», имеет значение «истина», если значение «истина» имеет хотя бы одна величина. Такое выражение имеет значение «ложь», только если значения обеих величин – «ложь».

**ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТИННОСТИ  
ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ (прогноза погоды)  
(Д – ожидается дождь, С – ожидается снег)**

|              | Прогноз 1   | Прогноз 2  | Прогноз 3   | Прогноз 4   |
|--------------|---|--|---|---|
| Высказывание |  |  |  |  |
|              | Значения логических выражений   |  |   |   |
| не Д         | 0   | 1  | 1   | 1   |
| Д и С        | 0   | 0  | 0   | 0   |
| Д или С      | 1   | 1  | 0   | 0   |

# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Заполнить значениями истинности  
логических выражений таблицу

(выдана в начале урока)

Время выполнения - 10 минут

РАЗДЕЛИТЕЛЬНАЯ (СТРОГАЯ) ДИЗЪЮНКЦИЯ  
сложение по модулю 2,  
неравнозначность.

| A | B | $A \oplus B$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0            |
| 0 | 1 | 1            |
| 1 | 0 | 1            |
| 1 | 1 | 0            |

Связка «**ЛИБО**» (исключающее **ИЛИ**)

В высказывании, являющемся разделительной дизъюнкцией, мы утверждаем, что произойдет только одно событие.

Она двум элементарным высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся истинным только тогда, когда только одно из высказываний является истинным.

# ИМПЛИКАЦИЯ (следование)

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1                 |
| 0 | 1 | 1                 |
| 1 | 0 | 0                 |
| 1 | 1 | 1                 |

Связка «**ЕСЛИ ... ТО**  
...»

***Импликация*** – логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум элементарным высказываниям новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

Импликация будет ложной только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно, и она заведомо будет истинна, если ее условие ложно.

Другими словами, из неверного условия может следовать все, что угодно.

Например, высказывание: **«если  $2 > 3$ , то крокодилы летают»** – является ИСТИННЫМ.

*Например, истинны следующие высказывания:*

- 1) Если  $2 \times 2 = 4$ , то Монгохто находится в Европе;*
- 2) Если Монгохто находится в Африке, то  $2 \times 2 = 4$ ;*
- 3) Если Монгохто находится в Африке, то  $2 \times 2 = 5$ ;*
- 4) Если не наступит Новый год, то чернила высохнут;*
- 5) Если Монгохто находится в Африке, то Нового года не будет.*

# ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| 0 | 0 | 1                     |
| 0 | 1 | 0                     |
| 1 | 0 | 0                     |
| 1 | 1 | 1                     |

Связка «**ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА**»

**Эквивалентность** – логическая операция, ставящая в соответствие двум элементарным высказываниям новое, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны. Эквивалентность используется при необходимости выразить взаимную обусловленность.

Пример: **«Я получу паспорт тогда и только тогда, когда мне исполнится 14 лет».**

# СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

| A | B | Не A | A и B | A или B | $A \oplus B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|------|-------|---------|--------------|-------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 1    | 0     | 0       | 0            | 1                 | 1                     |
| 0 | 1 | 1    | 0     | 1       | 1            | 1                 | 0                     |
| 1 | 0 | 0    | 0     | 1       | 1            | 0                 | 0                     |
| 1 | 1 | 0    | 1     | 1       | 0            | 1                 | 1                     |