

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

ПОНЯТИЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Алгебра логики является разделом развивающейся науки – дискретной математики.

Дискретная математика занимается изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях.

СТРУКТУРЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

К числу структур, изучаемых дискретной математикой, могут быть отнесены конечные группы, конечные графы, математические модели преобразователей информации и конечных автоматов.

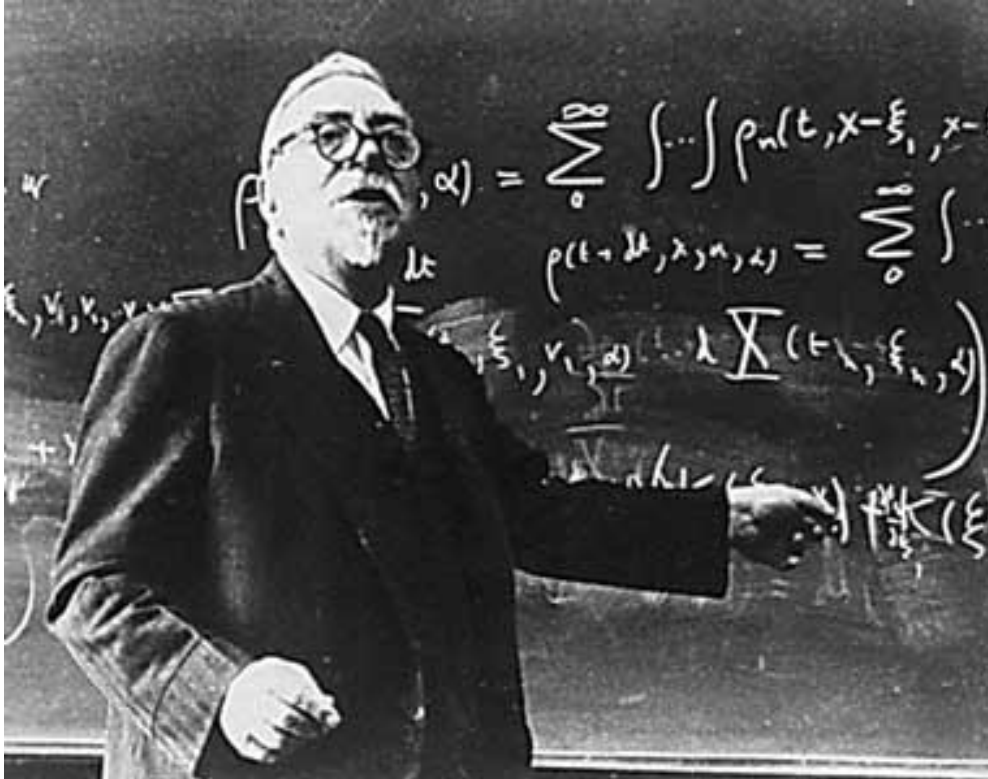
Конечная группа — [алгебраическая группа](#), содержащая конечное число элементов (это число называется её **порядком**) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: [топология](#)) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: топология, [криптография](#)) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: топология, криптография, [кристаллография](#)) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: топология, криптография, кристаллография, [атомная физика](#)) Конечные группы широко используются как в математике, так и в других науках: топология,

КИБЕРНЕТИКА

Наибольшего развития дискретная математика достигла в связи с запросами практики, приведшими к появлению новой науки – кибернетики.

Кибернетика – наука об общих законах получения, хранения, передачи и преобразования информации в сложных системах.

Термин **кибернетика** ввел американский ученый Норберт Винер (1894 – 1964)



ИСТОРИЯ ТЕРМИНА

Широкое использование ЭВМ и базирующихся на них АСУ (автоматизированных систем управления) потребовало создания научных основ проектирования ЭВМ и АСУ. Полученные научные методы и результаты объединили в новую науку, получившую в США и Англии название *computer science*, во Франции – *Informatics*. В СССР, а затем и в России название *кибернетика* было вытеснено (поглощено) названием *информатика*.

ЛОГИКА В ИНФОРМАТИКЕ

Математический аппарат алгебры логики широко используется в информатике, в частности, в таких ее разделах, как проектирование ЭВМ, теория автоматов, теория алгоритмов, теория информации, целочисленное программирование.

ОТЕЦ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ



Джордж Буль (1815 – 1864)

Джордж Буль

Построил один из разделов формальной логики в виде некоторой «алгебры», аналогичной алгебре чисел, но не сводящейся к ней. Алгебра в широком смысле этого слова – наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться не только над числами, но и над другими математическими объектами.

ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Объектами алгебры логики являются ***высказывания***.

Величины, которые отражают истинность высказываний, называют ***логическими величинами***.

Логическая величина может иметь только одно из двух ***значений***, которые выражают парой слов или чисел: «да» – «нет», «истина» – «ложь»,
1 - 0

У ЛОГИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЕСТЬ ИМЯ

- При описании рассуждений высказывания обозначают **именами логических величин**.
- **Значения** переменных логических величин для разных объектов или ситуаций удобно представлять в виде **таблиц**:

Высказывание (простое)	Имя логической величины	Значение логической величины
Сегодня нет опоздавших	A	1
Все учащиеся внимательны	B	0
Дискотека в школе отменена	C	0
Завтра будет 2 марта 2011 г.	D	1
Никто не получит оценку «2»	E	0
Мы всегда говорим правду	F	1

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Составные (сложные) высказывания образуются с помощью связок «И», «ИЛИ», «НЕ», которые в алгебре логики заменяются на **логические операции**:

- **Инверсия**, логическое отрицание (НЕ);
- **Конъюнкция**, логическое умножение (И);
- **Дизъюнкция**, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение (ИЛИ);
- **Разделительная (строгая) дизъюнкция**, исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2, неравнозначность (ЛИБО);
- **Импликация**, следование (ЕСЛИ ... , ТО);
- **Эквиваленция**, эквивалентность,, равнозначность (ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА).

ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

Логические операции задаются *таблицами истинности*, в которых отображаются их значения.

Таблица истинности — это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ (КОНЪЮНКЦИЯ)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Связка «И»

ПРИМЕРЫ КОНЪЮНКЦИИ

«истина» и «истина» = «истина»

«истина» и «ложь» = «ложь»

«ложь» и «истина» = «ложь»

«ложь» и «ложь» = «ложь»

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ (ДИЗЪЮНКЦИЯ)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Связка «ИЛИ»

ПРИМЕРЫ ДИЗЪЮНКЦИИ

«истина» или «истина» = «истина»

«истина» или «ложь» = «истина»

«ложь» или «истина» = «истина»

«ложь» или «ложь» = «ложь»

ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ (ИНВЕРСИЯ)

A	\bar{A}
0	1
1	0

Связка «НЕ»

ПРИМЕРЫ ИНВЕРСИИ

не «истина» = «ложь»

не «ложь» = «истина»

ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Составное высказывание, выраженное в виде формулы, называется **логическим выражением**.

В логическом выражении простые высказывания обозначают **именами логических величин**.

Величины, которые отражают истинность высказываний, называют **логическими величинами**.

ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Сложные высказывание	Использование связок	Логические выражения
Дождя не ожидается	не (ождается дождь)	не Д
Ожидается дождь со снегом	(ождается дождь) и (ождается снег)	Д и С
Ожидаются осадки	(ождается дождь) или (ождается снег)	Д или С
Ожидается сильный мороз и снегопад	(не ожидается дождь) и (ождается снег)	(не Д) и С

Простые высказывания:

Д – ожидается дождь; **С** – ожидается снег

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Выражение, составленное из одной логической величины и связки «не», имеет значение, противоположное значению величины.
2. Выражение, составленное из двух величин и связки «и», имеет значение «истина», только если значение «истина» имеют обе величины.
3. Выражение, составленное из двух величин и связки «или», имеет значение «истина», если значение «истина» имеет хотя бы одна величина. Такое выражение имеет значение «ложь», только если значения обеих величин – «ложь».

**ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТИННОСТИ
ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ (прогноза погоды)
(Д – ожидается дождь, С – ожидается снег)**

	Прогноз 1	Прогноз 2	Прогноз 3	Прогноз 4
Высказывание				
Значения логических выражений				
не Д	0	1	1	1
Д и С	0	0	0	0
Д или С	1	1	0	0

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Заполнить значениями истинности
логических выражений таблицу

(выдана в начале урока)

Время выполнения - 10 минут

РАЗДЕЛИТЕЛЬНАЯ (СТРОГАЯ) ДИЗЪЮНКЦИЯ
сложение по модулю 2,
неравнозначность.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Связка «**ЛИБО**» (исключающее **ИЛИ**)

В высказывании, являющемся разделительной дизъюнкцией, мы утверждаем, что произойдет только одно событие.

Она двум элементарным высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся истинным только тогда, когда только одно из высказываний является истинным.

ИМПЛИКАЦИЯ (следование)

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Связка «**ЕСЛИ ... ТО**
...»

Импликация – логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум элементарным высказываниям новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

Импликация будет ложной только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно, и она заведомо будет истинна, если ее условие ложно.

Другими словами, из неверного условия может следовать все, что угодно.

Например, высказывание: **«если $2 > 3$, то крокодилы летают»** – является ИСТИННЫМ.

Например, истинны следующие высказывания:

- 1) Если $2 \times 2 = 4$, то Монгохто находится в Европе;*
- 2) Если Монгохто находится в Африке, то $2 \times 2 = 4$;*
- 3) Если Монгохто находится в Африке, то $2 \times 2 = 5$;*
- 4) Если не наступит Новый год, то чернила высохнут;*
- 5) Если Монгохто находится в Африке, то Нового года не будет.*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Связка «**ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА**»

Эквивалентность – логическая операция, ставящая в соответствие двум элементарным высказываниям новое, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны. Эквивалентность используется при необходимости выразить взаимную обусловленность.

Пример: **«Я получу паспорт тогда и только тогда, когда мне исполнится 14 лет».**

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

A	B	Не A	A и B	A или B	$A \oplus B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1