

Начертательная геометрия

Лекции

Начертательная геометрия – это наука о способах отображения пространственных форм на плоскости.

Предметом начертательной геометрии являются пространственные формы и их соотношения.

Изображения объектов трехмерного пространства на плоскости получают **методом проецирования**.

Поэтому **проекционный метод** построения изображений является **основным методом НГ**.

Проецирование – это получение изображения объекта с помощью проецирующих лучей на плоскость.

Виды проецирования и их свойства

Аппарат проецирования включает в себя проецирующие лучи (проецирующие прямые), проецируемый объект и плоскость, на которой получается изображение (плоскость проекций).

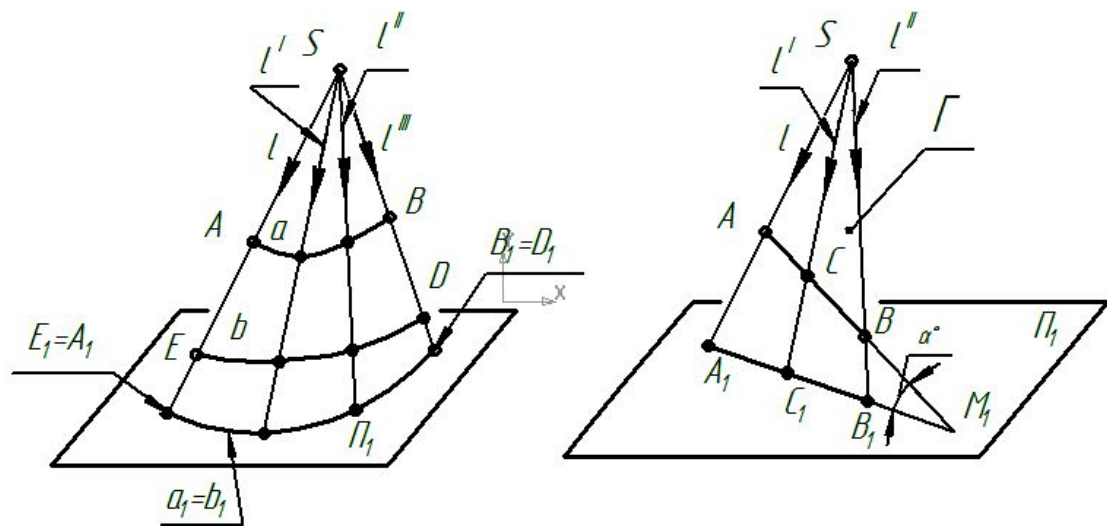
В зависимости от положения центра проецирования и направления проецирующих прямых по отношению к плоскости проекций, проецирование может быть:

центральный,

параллельным

прямоугольным (ортогональным).

Центральное проецирование



S – центр проецирования
 Π_1 – плоскость проекций
 l, l', \dots - проецирующие прямые
 A, B, C – точки пространства

$$l \supset S$$

$$l \subset A, B, C$$

$$l \cap \Pi_1 = A_1, B_1, C_1$$

$$l \supset S$$

$$l \subset A, B, C$$

$$l \cap \Pi_1 = A_1, B_1, C_1$$

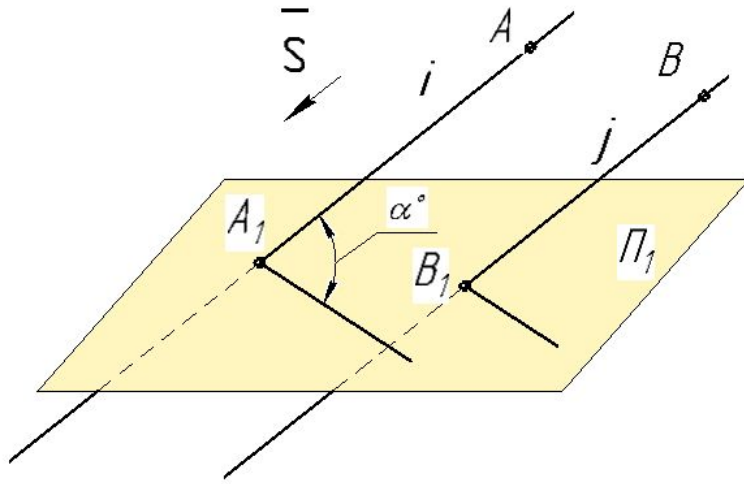
Свойства центрального проецирования

1. Проекцией точки является точка
2. Проекцией прямой линии является прямая
3. Проекцией точки, лежащей на прямой является точка, лежащая на проекции данной прямой. Если $C \subset AB$, то $C_1 \subset A_1B_1$.

Точка пересечения линий проецируется в точку пересечения их проекций.

S – центр проецирования
 Π_1 – плоскость проекций
 A, B, C, E, D – точки пространства

Параллельное проецирование



$i, j \parallel s$

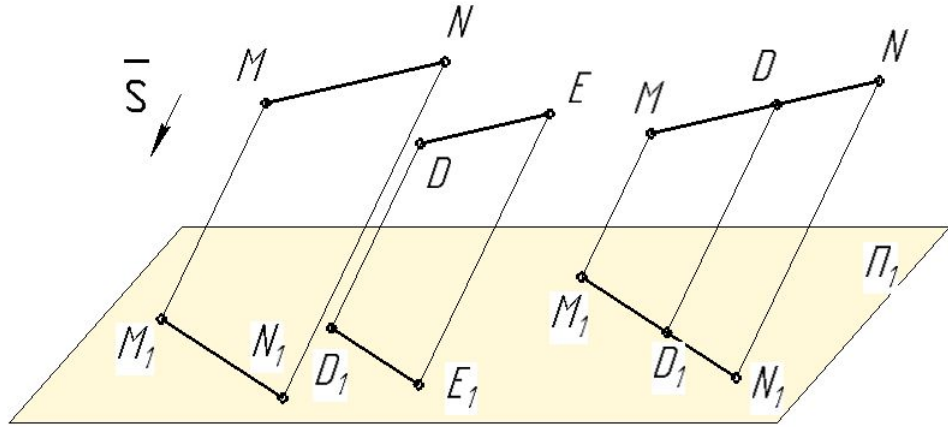
α° – угол между проецирующими прямыми и плоскостью проекций

α° - не равно 90°

$i, j \supset A, B. A_1, B_1 \in i, j \cap \Pi_1$

A_1, B_1 - параллельные проекции точек

Свойства параллельного проецирования



1-3 справедливы и для параллельного проецирования

4. Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые.
Если $MN \parallel DE$, то $M_1N_1 \parallel D_1E_1$

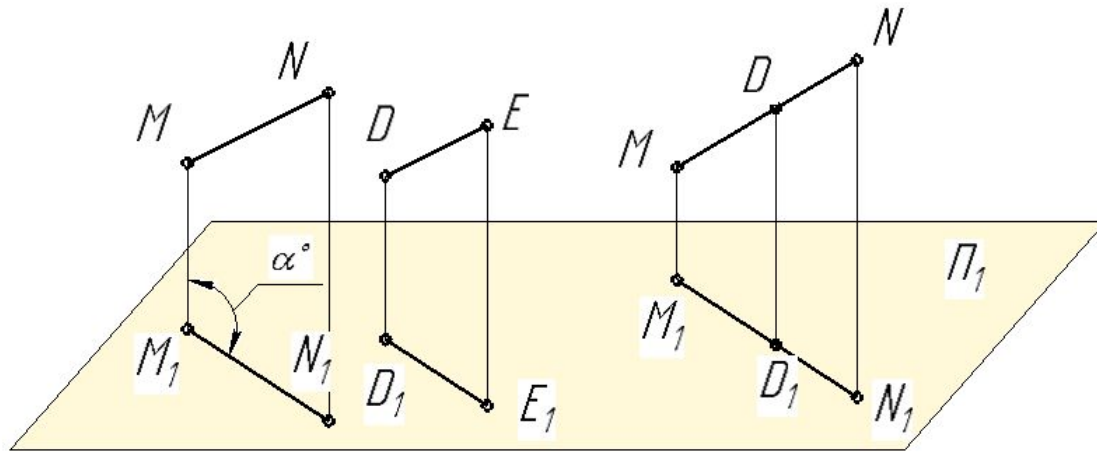
5. Отношение отрезков параллельных прямых равно отношению проекций этих отрезков.

Если $MN \parallel DE$, то $MN/DE = M_1N_1/D_1E_1$ ($MD/DN = M_1D_1/D_1N_1$)

6. Прямая параллельная плоскости проекций проецируется в натуральную величину.

Если $MN \parallel \Pi_1$, то $MN = M_1N_1$

Прямоугольное (ортогональное) проецирование



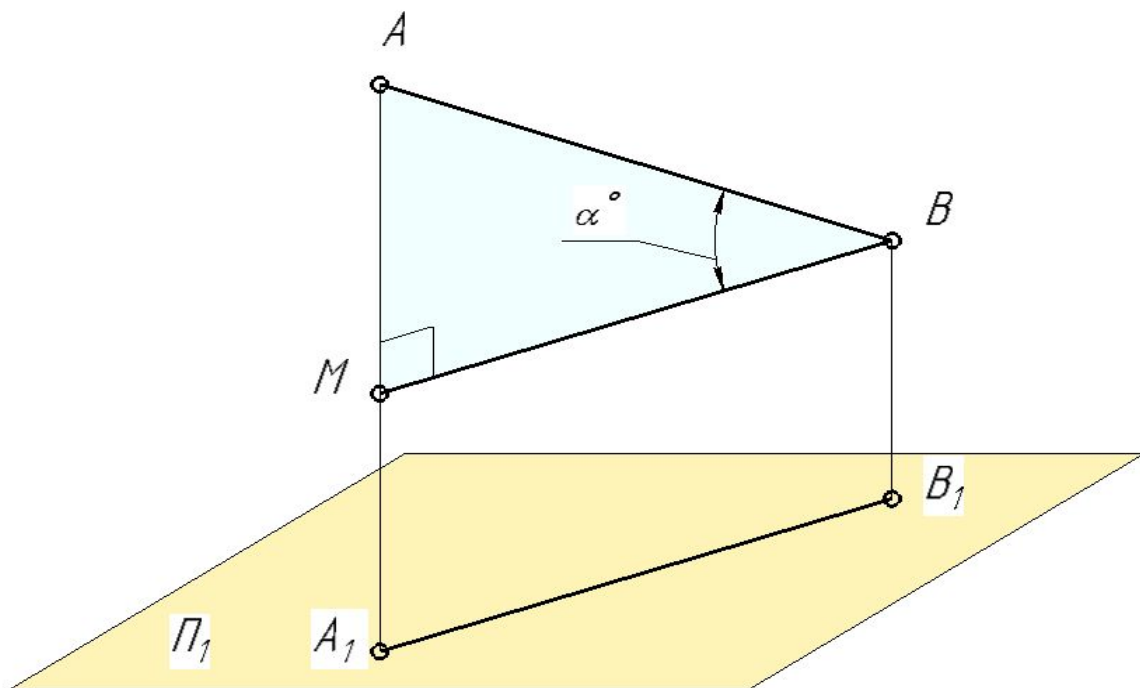
α° - равно 90° (Проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций)

Свойства прямоугольного проецирования

1 – 6 справедливы

7. Длина проекции отрезка прямой равна длине самого отрезка, умноженной на косинус угла наклона прямой к плоскости проекций.

$$0 < A_1 B_1 < AB$$
$$AB = A_1 B_1 * \cos \alpha$$



$$MB \parallel A_1 B_1$$

$$MB = A_1 B_1$$

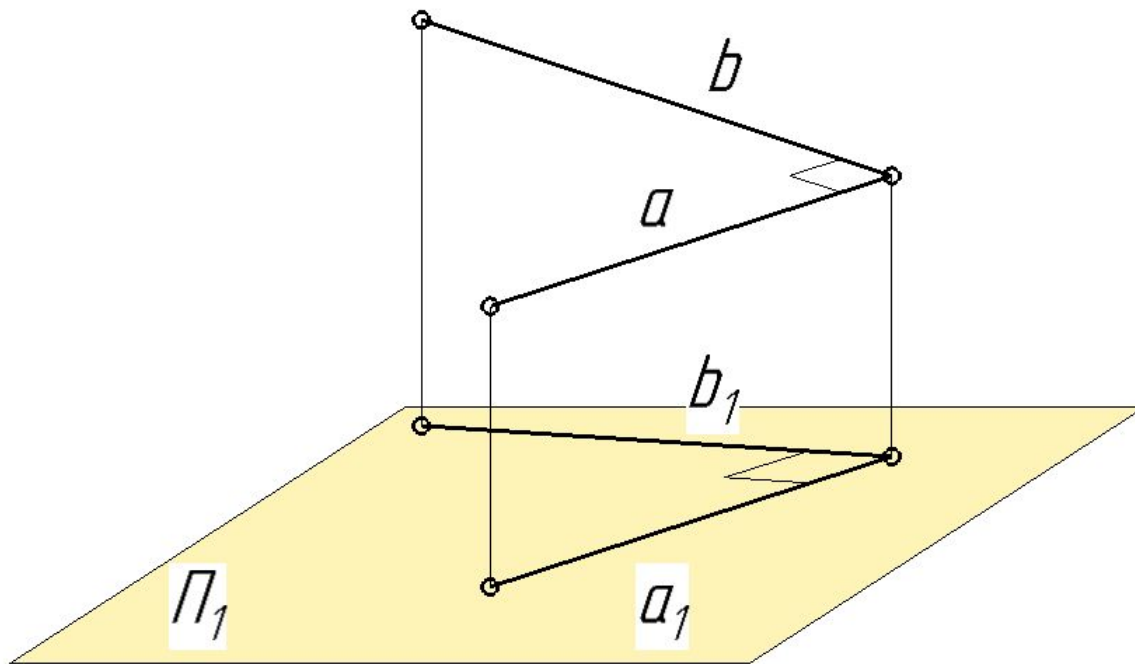
$$AM \perp BM$$

$$AM = AA_1 - A_1 M$$

**AB – натуральная
величина
отрезка**

8. Теорема о проецировании прямого угла

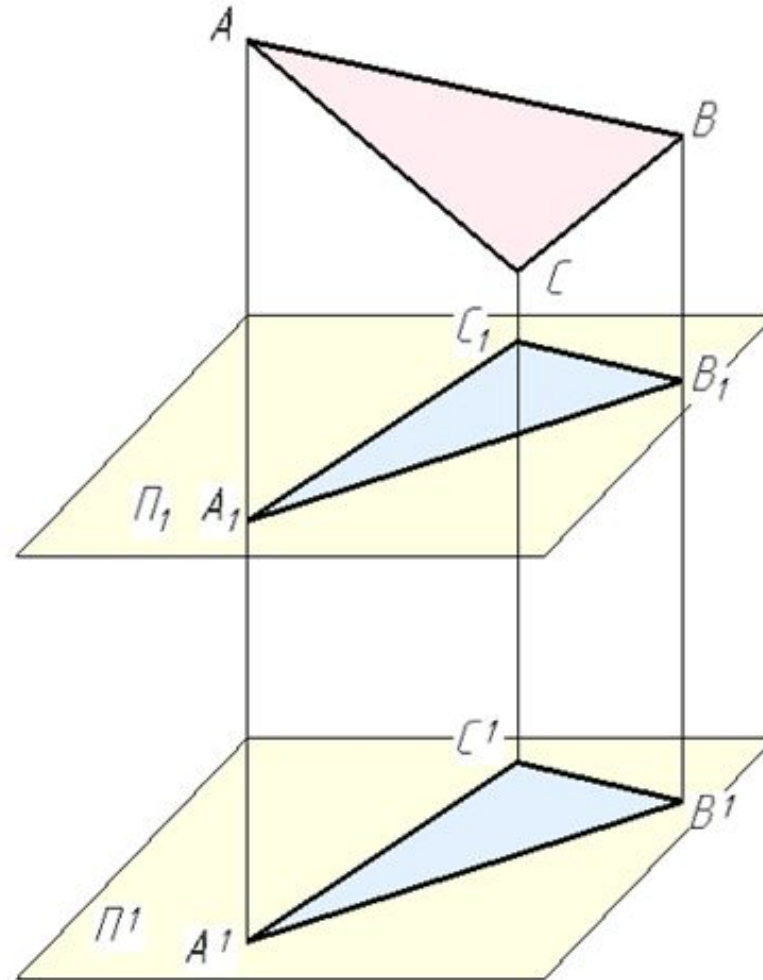
Если хотя бы одна из сторон прямого угла параллельна одной из плоскостей проекций, а другая ей не перпендикулярна, то прямой угол на эту плоскость проецируется без искажения.



$$a \perp b,$$
$$a \parallel \Pi_1$$

$$\text{Если } a \parallel \Pi_1,$$
$$\text{то } a_1 \perp b_1$$

9. Форма проекции фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.



Прямая и обратная задачи

Прямая задача –

построение проекций по пространственной модели;

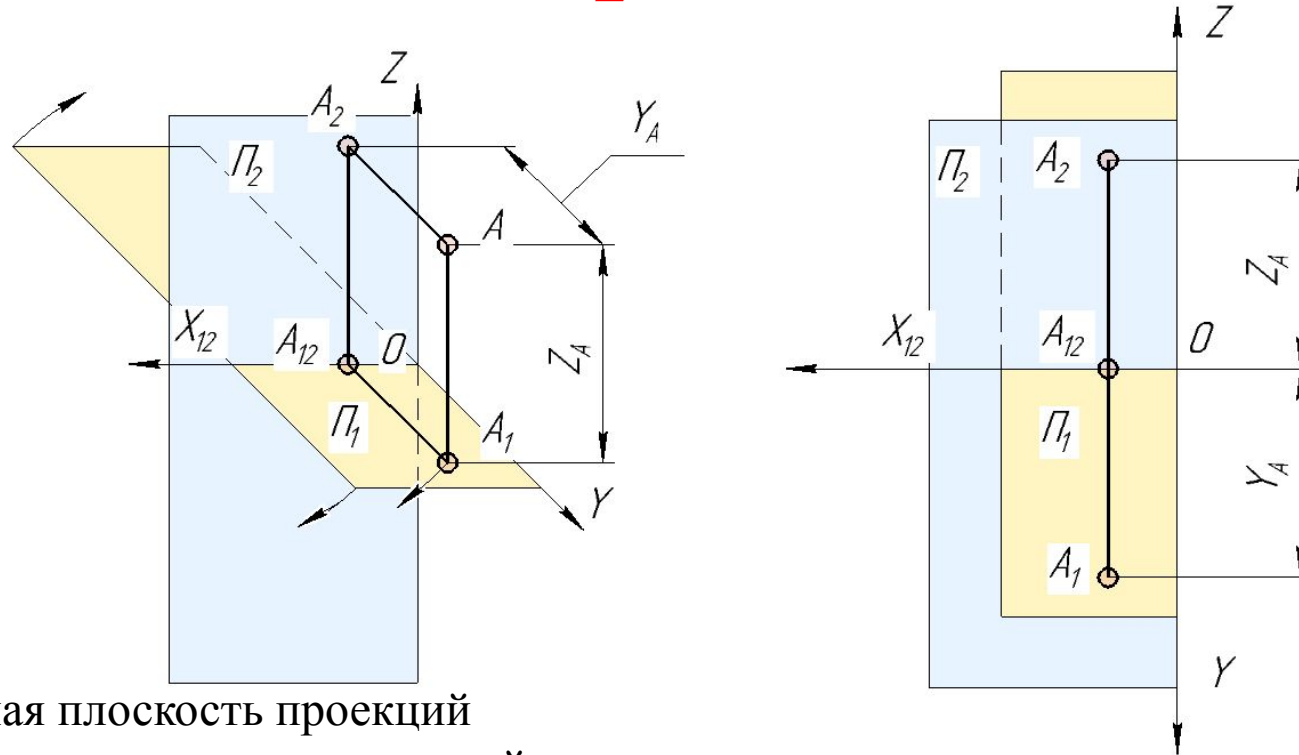
Обратная задача – по проекциям воссоздание
пространственной модели

К чертежу предъявляются следующие требования: обратимость, точность, простота, наглядность.

Комплексные чертежи «Точка, прямая, плоскость»

Комплексным называется чертеж, состоящий из совокупности взаимосвязанных ортогональных проекций.

Комплексный чертёж точки



Π_2 – фронтальная плоскость проекций

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций

X_{12} – ось проекций

$\Pi_2 \perp \Pi_1$

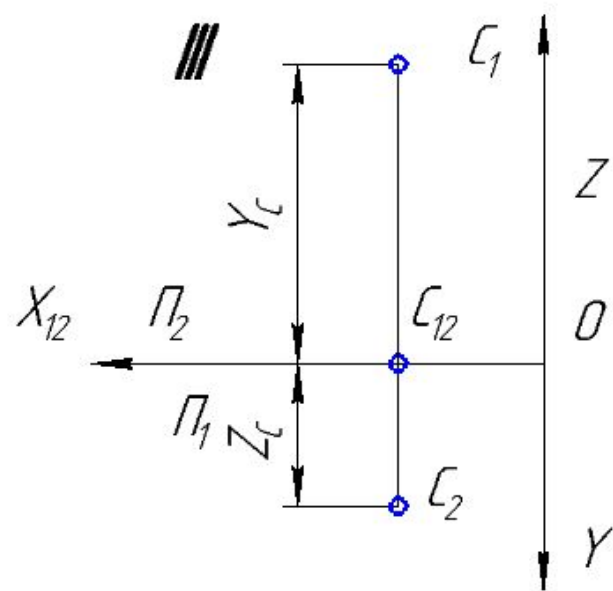
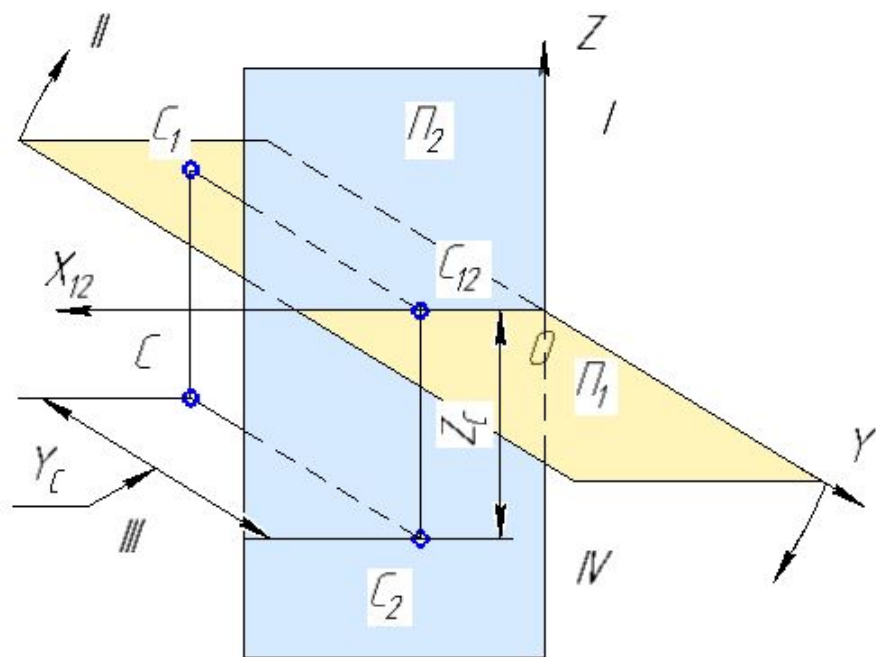
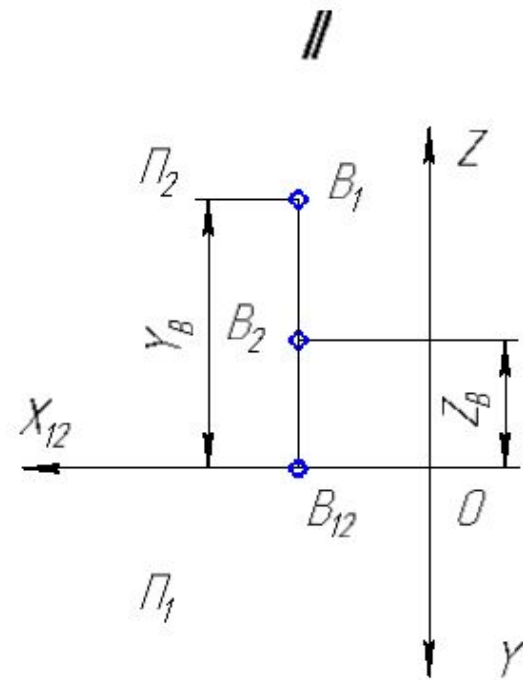
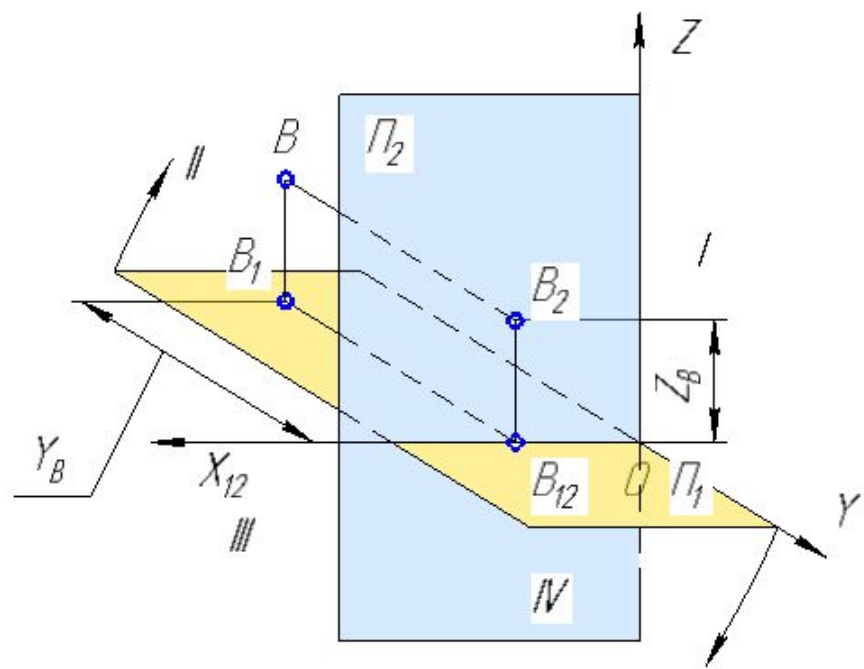
$AA_2 = A_1A_{12}$ расстояние до фронтальной плоскости

$AA_1 = A_2A_{12}$ расстояние до горизонтальной плоскости

A_2A_1 – линия связи

$A_2A_1 \perp X_{12}$

Две проекции точки определяют ее положение в пространстве



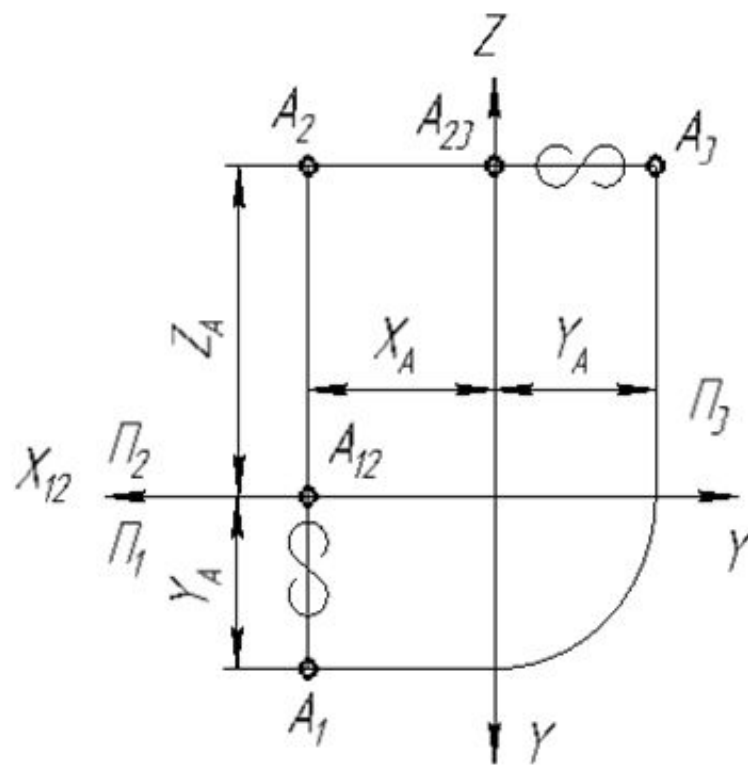
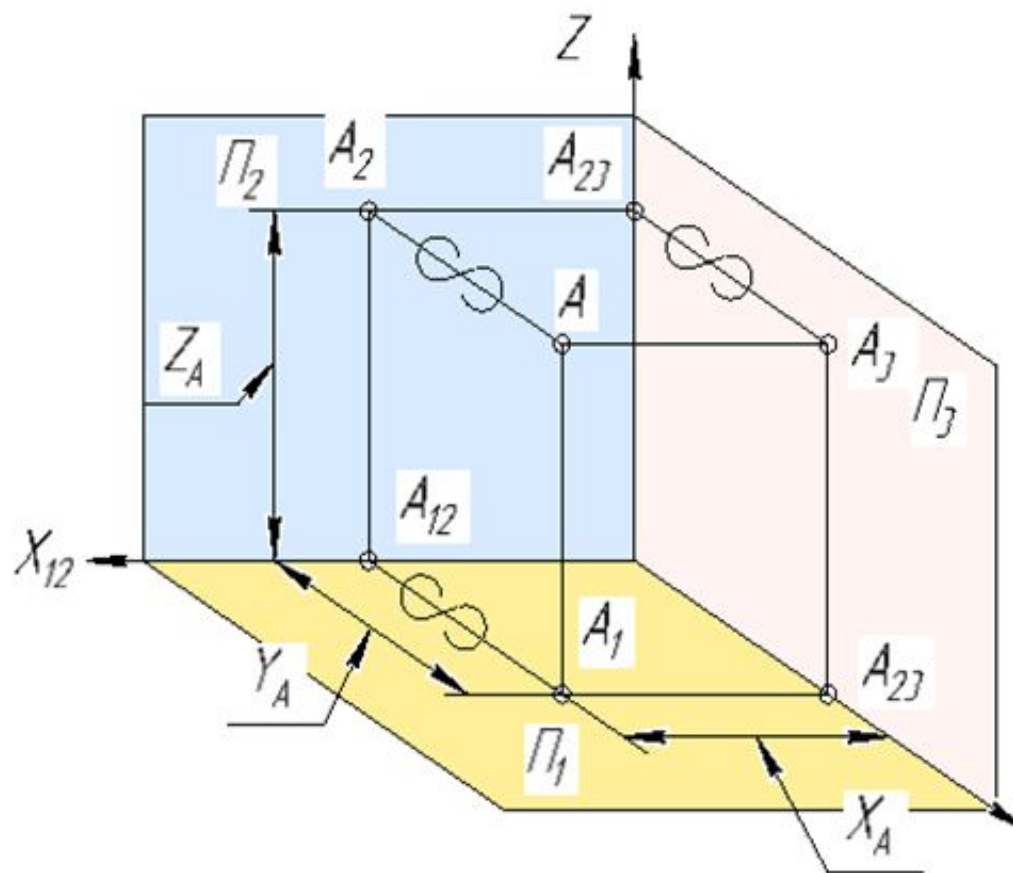
Положение точки в пространстве определяется тремя координатами – X, Y, Z

Координаты – расстояния от точки до плоскостей проекций

X_A – расстояние от точки до профильной плоскости проекций $\Pi_3 / AA_3/$

Y_A – расстояние от точки до фронтальной плоскости проекций $\Pi_2 / AA_2/$

Z_A – расстояние от точки до горизонтальной плоскости проекций $\Pi_1 / AA_1/$

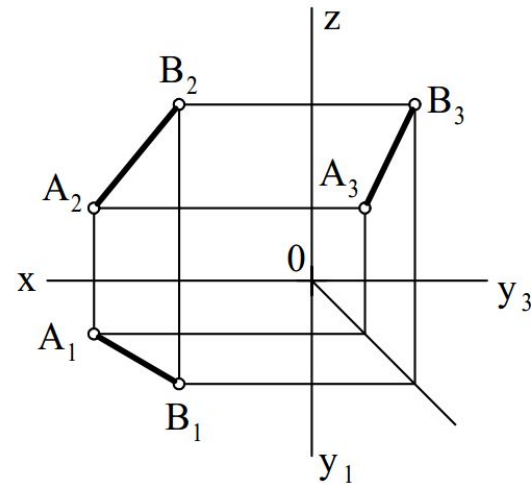
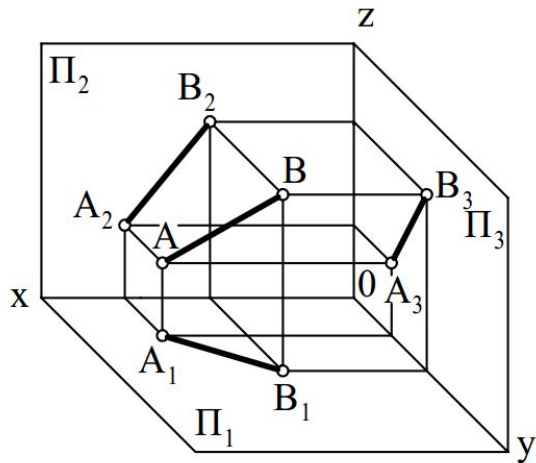


Комплексный чертеж прямой

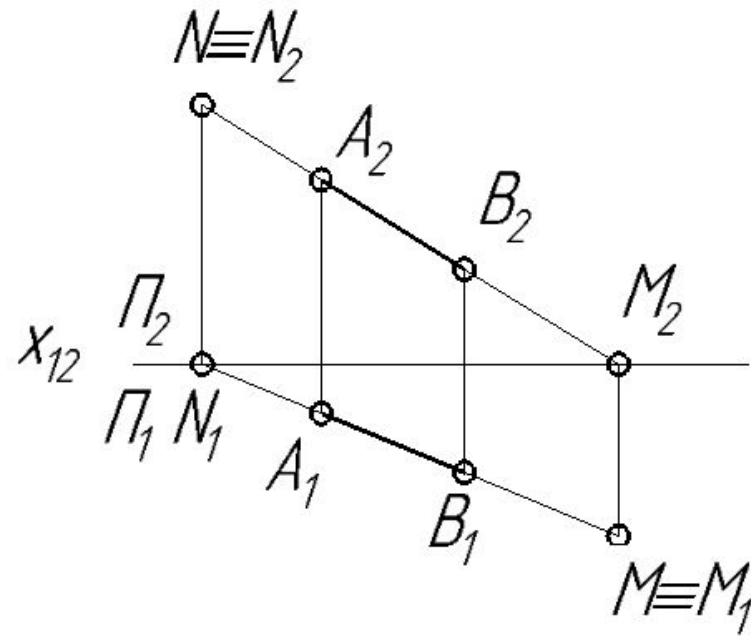
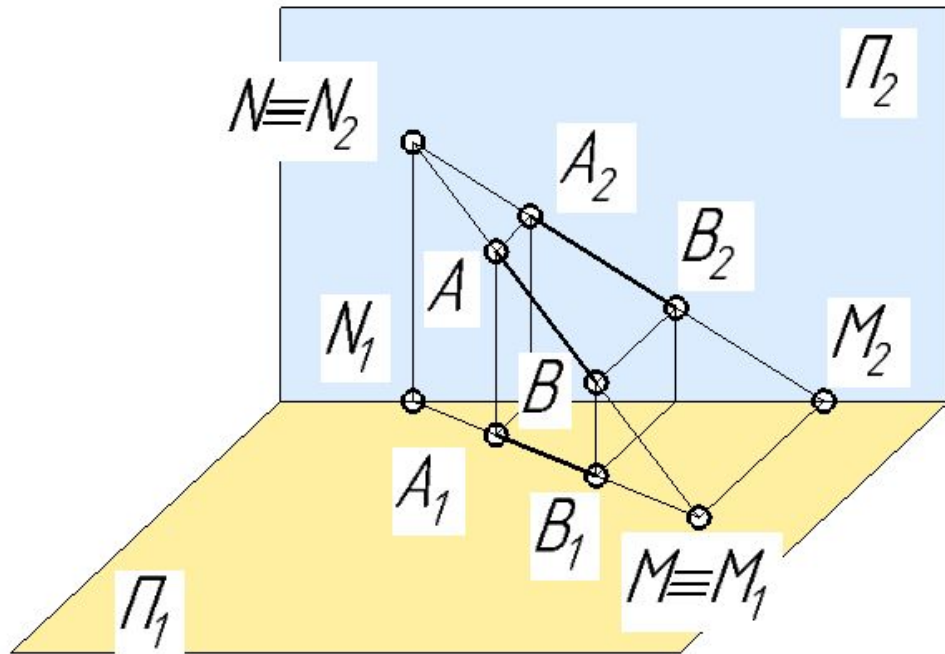
Прямые, непараллельные и неперпендикулярные плоскости проекций называются **прямыми общего положения**.

Прямая на комплексном чертеже может быть задана:

- двумя точками (А, В);
- своими проекциями (m_1, m_2).



Следы прямой – точки ее пересечения с плоскостями проекций.



M – горизонтальный след прямой AB

$$M = AB \cap \Pi_1$$

N – фронтальный след прямой AB

$$N = AB \cap \Pi_2$$

Прямые частного положения (прямые уровня и проецирующие)

Прямые частного положения – это прямые параллельные и перпендикулярные плоскостям проекций.

Прямые уровня

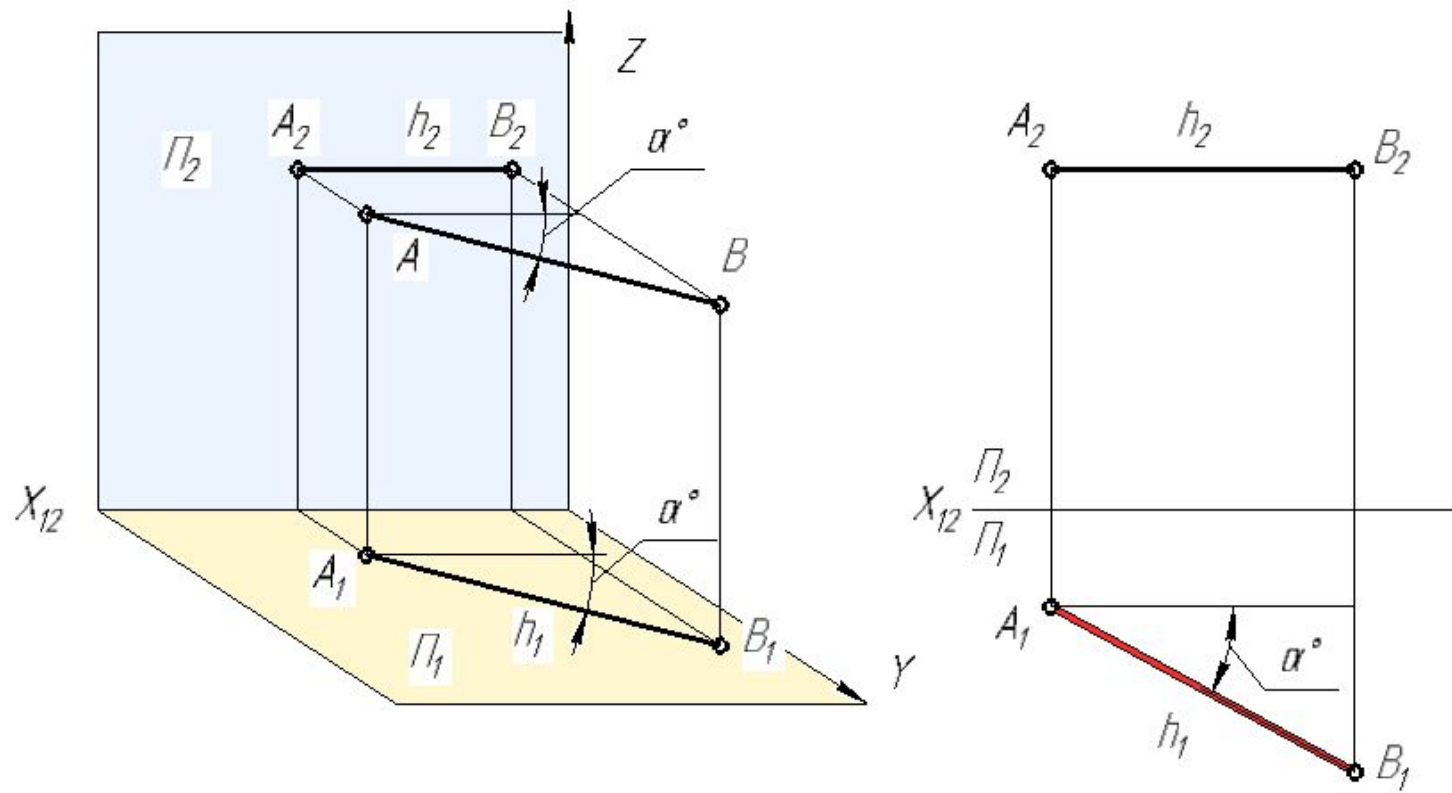
Прямые уровня – прямые параллельные плоскостям проекций.

Различают три линии уровня:

- 1) прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций; называют горизонтальной или **горизонталью h**;
- 2) прямую, параллельную фронтальной плоскости проекций; называют фронтальной **или фронталью f**;
- 3) прямую, параллельную профильной плоскости проекций; называют **профильной p**.

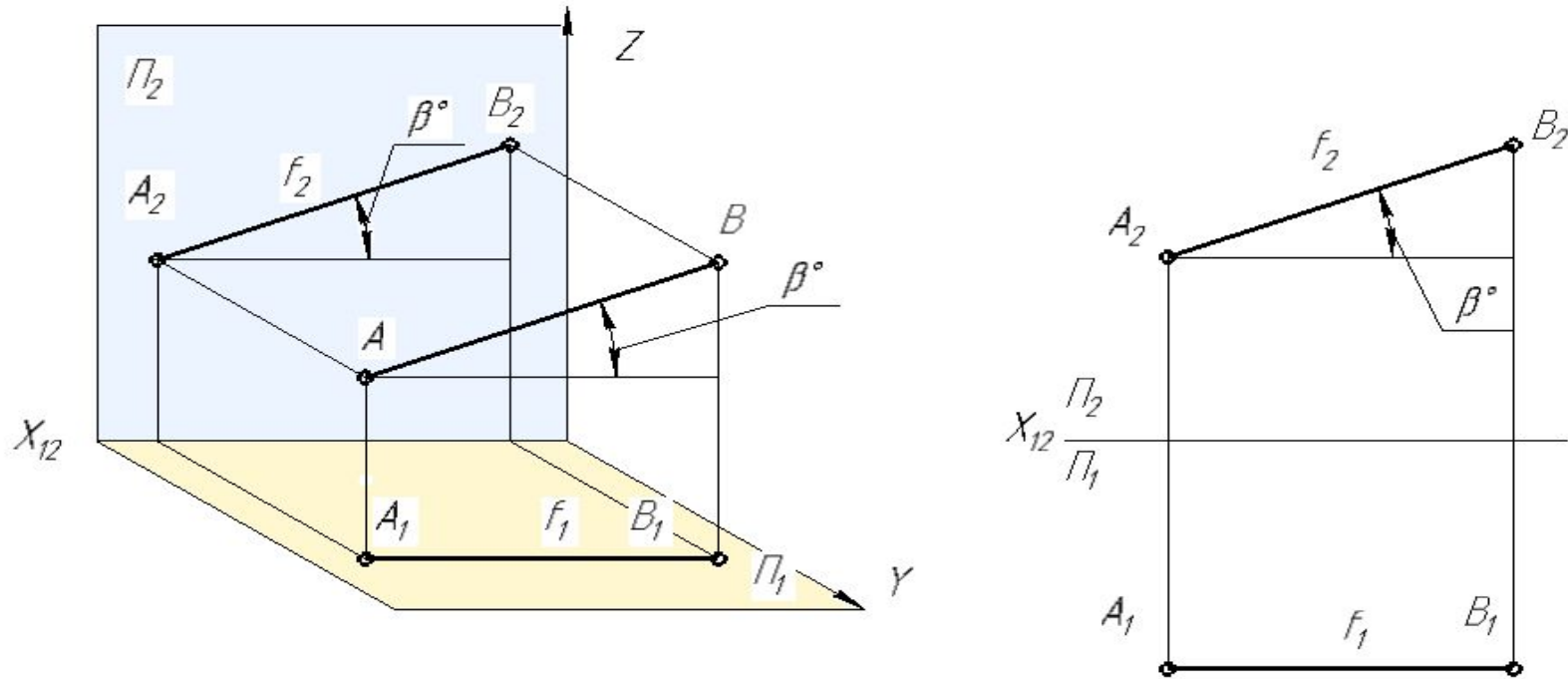
Каждая линия уровня будет проецироваться в натуральную величину на ту плоскость проекций, которой она параллельна, углы наклона, которые эта прямая образует с двумя другими плоскостями проекций, также будут проецироваться на эту плоскость без искажения.

Горизонталь



$h_2 \parallel X_{12}$; h_1 – натуральная величина;
 α° – угол наклона прямой к фронтальной
плоскости проекций.

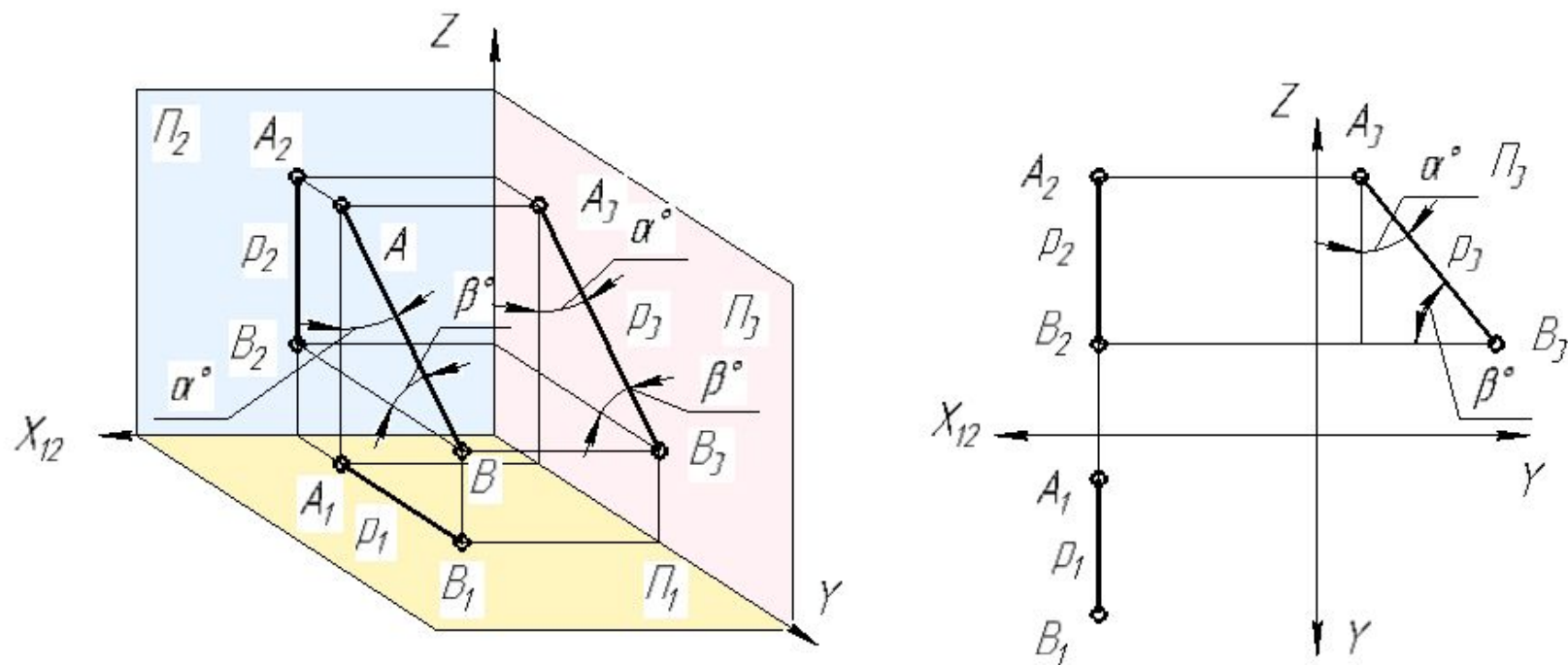
Фронталь



$f_1 \parallel X_{12}$; f_2 - натуральная величина;

β° - угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций.

Профильная прямая



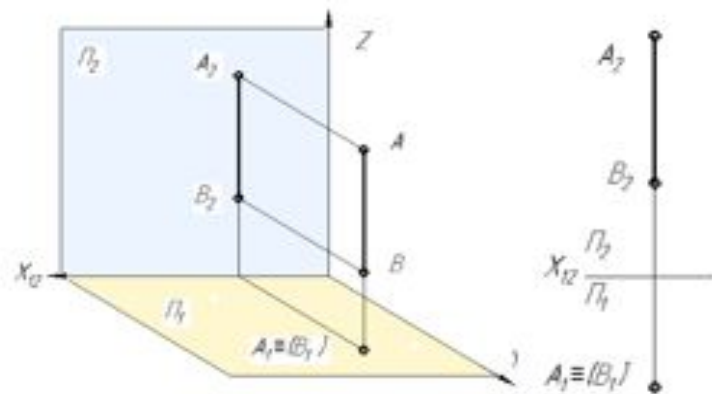
A_3B_3 – натуральная величина;

α° - угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций;

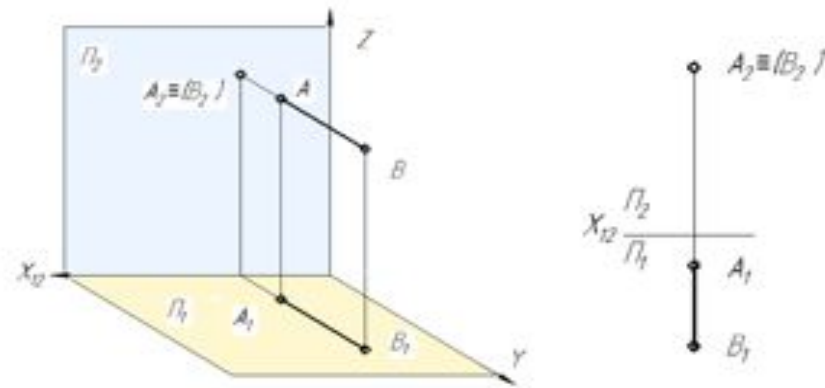
β° - угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций.

Проецирующие прямые

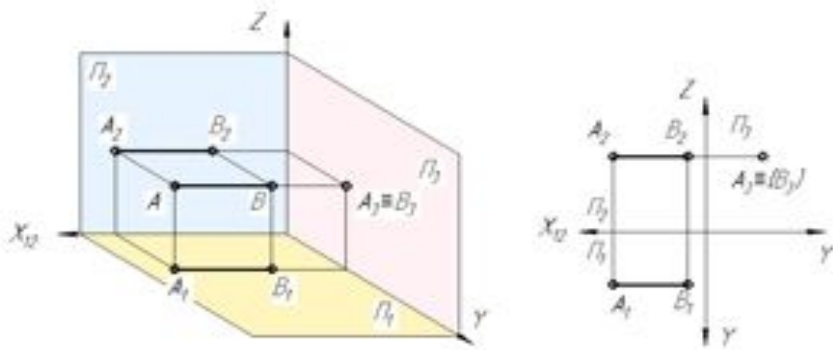
Проецирующие прямые – прямые перпендикулярные плоскостям проекций.



Горизонтально проецирующая прямая – прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости.



Фронтально проецирующая прямая – прямая перпендикулярная фронтальной плоскости.

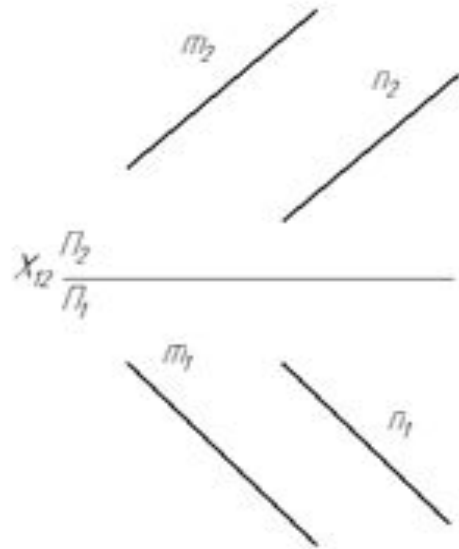


Профильно-проецирующая прямая – прямая перпендикулярная профильной плоскости.

Конкурирующие точки – точки, лежащие на проецирующей прямой.

Взаимное расположение прямых

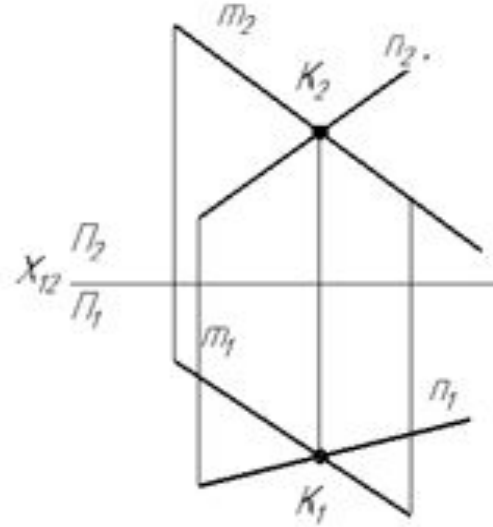
Прямые параллельны



Если прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны.

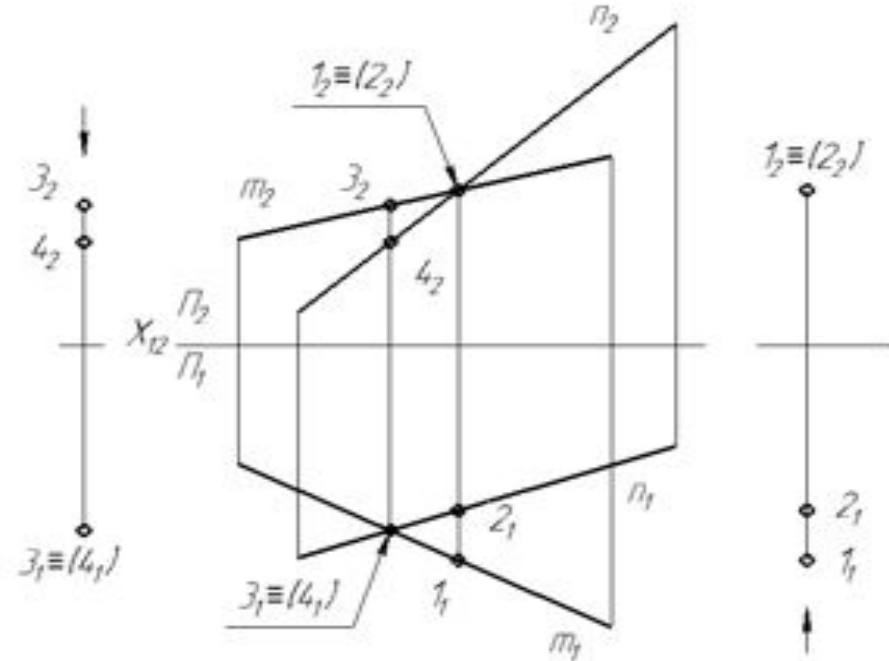
$$\begin{aligned} & \underline{m \parallel n} \\ & m_1 \parallel n_1 \\ & m_2 \parallel n_2 \end{aligned}$$

Прямые пересекаются



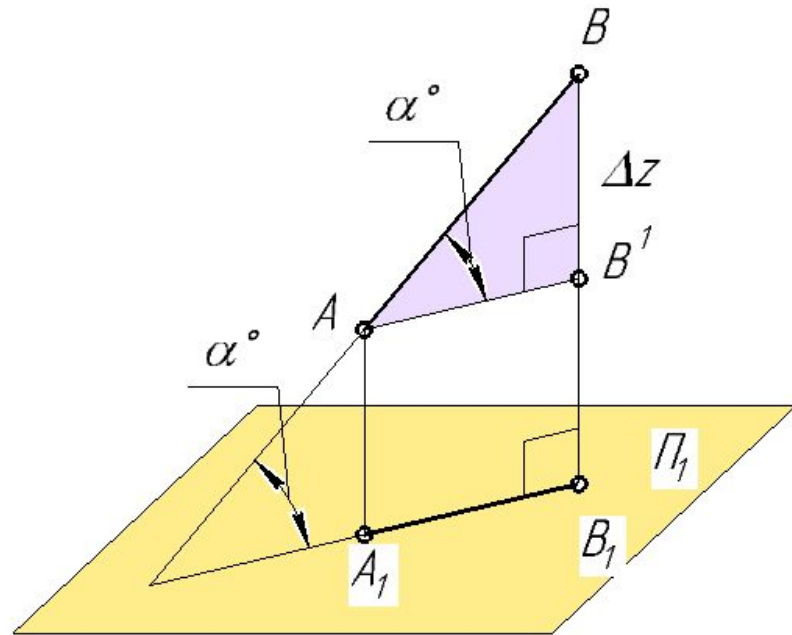
$$K = \underline{m \cap n}$$

Прямые скрещиваются

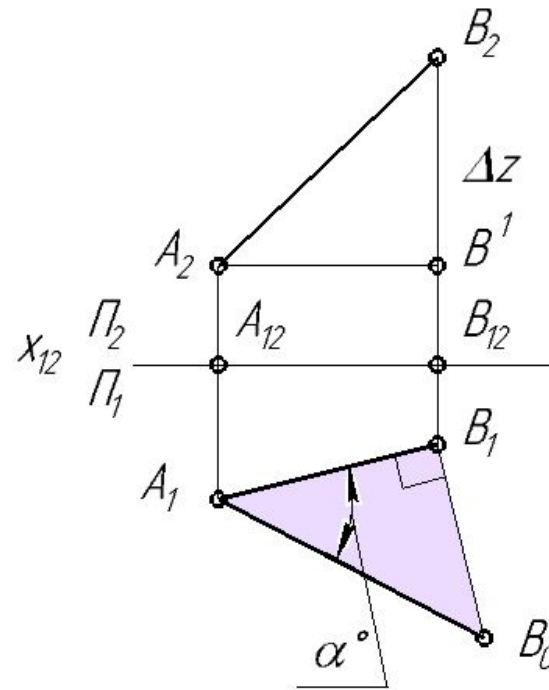


Конкурирующие точки – точки, лежащие на одной проецирующей прямой.

Определение длины отрезка способом прямоугольного треугольника



$$\Delta Z = BB_1 - B'B_1; AA_1 = B'B_1$$



Натуральная величина отрезка прямой – это гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет – это горизонтальная (фронтальная) проекция отрезка, а другой катет – это разность расстояний концов отрезка до горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций.