

# Начертательная геометрия

Лекции

**Начертательная геометрия** – это наука о способах отображения пространственных форм на плоскости.

**Предметом** начертательной геометрии являются пространственные формы и их соотношения.

Изображения объектов трехмерного пространства на плоскости получают **методом проецирования**.

Поэтому **проекционный метод** построения изображений является **основным методом НГ**.

**Проецирование** – это получение изображения объекта с помощью проецирующих лучей на плоскость.

# **Виды проецирования и их свойства**

**Аппарат проецирования** включает в себя проецирующие лучи (проецирующие прямые), проецируемый объект и плоскость, на которой получается изображение (плоскость проекций).

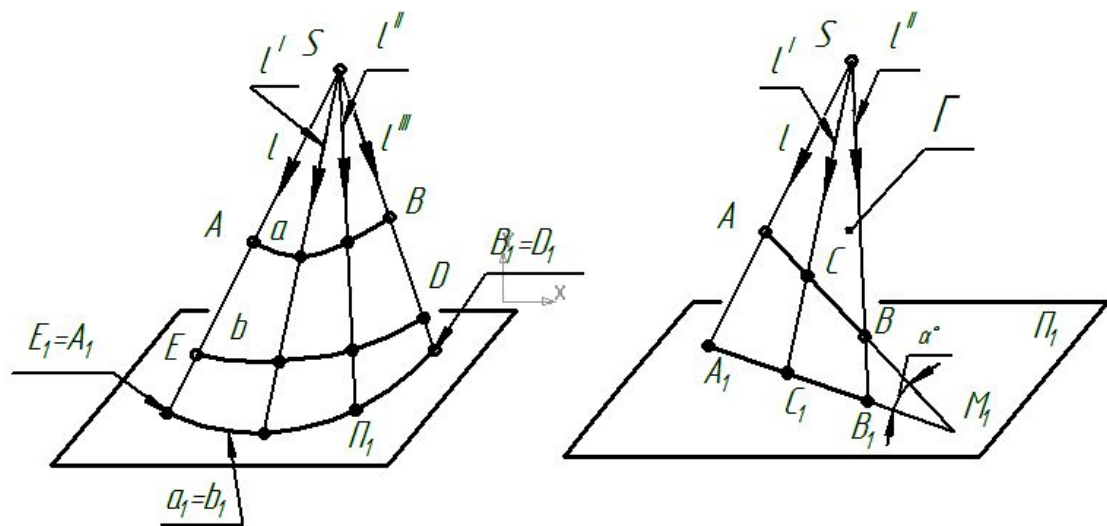
В зависимости от положения центра проецирования и направления проецирующих прямых по отношению к плоскости проекций, проецирование может быть:

**центральный,**

**параллельным**

**прямоугольным (ортогональным).**

# Центральное проецирование



$S$  – центр проецирования  
 $\Pi_1$  – плоскость проекций  
 $l, l', \dots$  - проецирующие прямые  
 $A, B, C$  – точки пространства

$$l \supset S$$

$$l \subset A, B, C$$

$$l \cap \Pi_1 = A_1, B_1, C_1$$

$$l \supset S$$

$$l \subset A, B, C$$

$$l \cap \Pi_1 = A_1, B_1, C_1$$

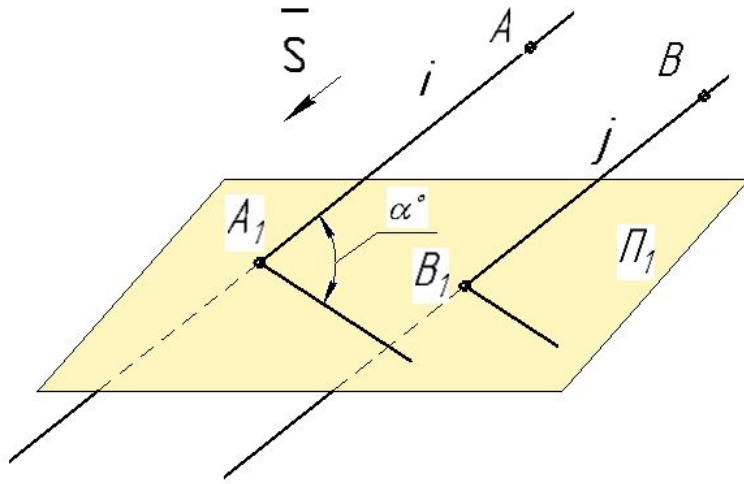
## *Свойства центрального проецирования*

1. Проекцией точки является точка
2. Проекцией прямой линии является прямая
3. Проекцией точки, лежащей на прямой является точка, лежащая на проекции данной прямой. Если  $C \subset AB$ , то  $C_1 \subset A_1B_1$ .

Точка пересечения линий проецируется в точку пересечения их проекций.

$S$  – центр проецирования  
 $\Pi_1$  – плоскость проекций  
 $A, B, C, E, D$  – точки пространства

# Параллельное проецирование



$i, j \parallel s$

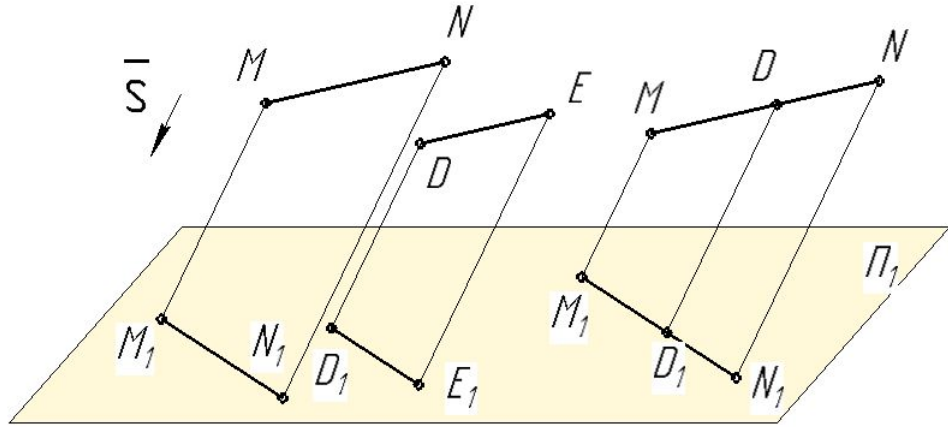
$\alpha^\circ$  – угол между проецирующими прямыми и плоскостью проекций

$\alpha^\circ$  - не равно  $90^\circ$

$i, j \supset A, B. A_1, B_1 = I, j \cap \Pi_1$

$A_1, B_1$  - параллельные проекции точек

# Свойства параллельного проецирования



1-3 справедливы и для параллельного проецирования

4. Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые.  
Если  $MN \parallel DE$ , то  $M_1N_1 \parallel D_1E_1$

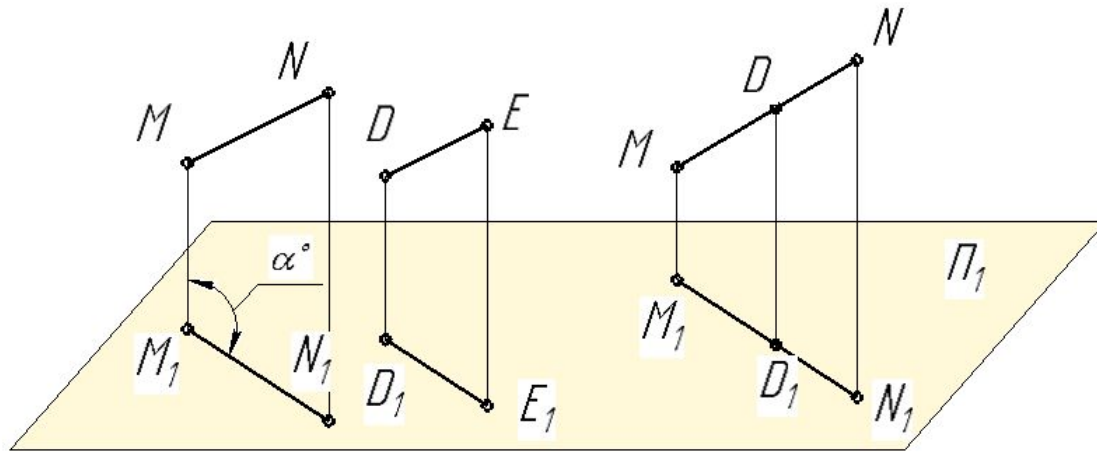
5. Отношение отрезков параллельных прямых равно отношению проекций этих отрезков.

Если  $MN \parallel DE$ , то  $MN/DE = M_1N_1/D_1E_1$  ( $MD/DN = M_1D_1/D_1N_1$ )

6. Прямая параллельная плоскости проекций проецируется в натуральную величину.

Если  $MN \parallel \Pi_1$ , то  $MN = M_1N_1$

# Прямоугольное (ортогональное) проецирование



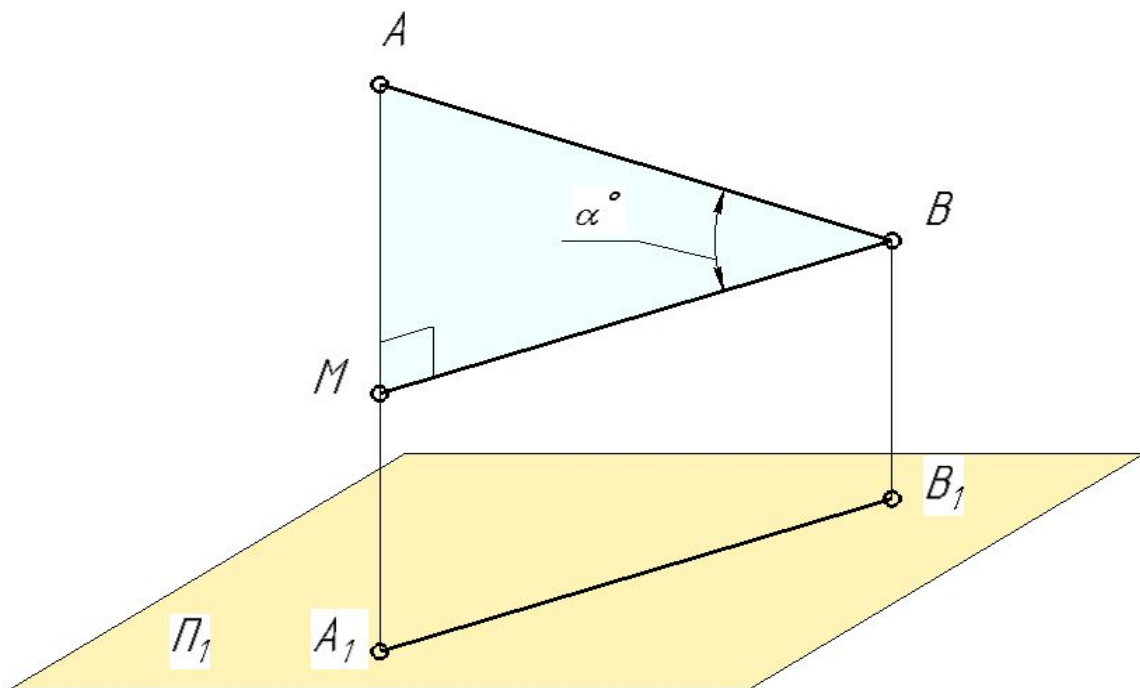
$\alpha^\circ$  - равно  $90^\circ$  (Проецирующие прямые перпендикулярны плоскости проекций)

*Свойства прямоугольного проецирования*

1 – 6 справедливы

**7. Длина проекции отрезка прямой равна длине самого отрезка, умноженной на косинус угла наклона прямой к плоскости проекций.**

$$0 < A_1 B_1 < AB$$
$$AB = A_1 B_1 * \cos \alpha$$



$$MB \parallel A_1 B_1$$

$$MB = A_1 B_1$$

$$AM \perp BM$$

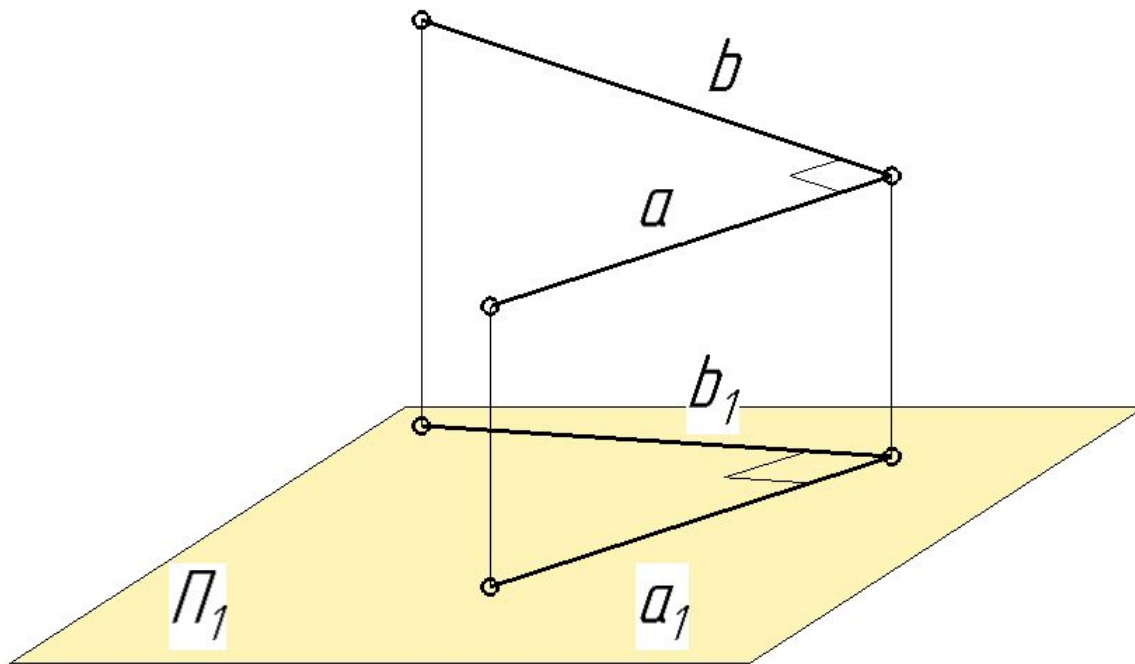
$$AM = AA_1 - A_1 M$$

AB – натуральная  
величина  
отрезка



## 8. Теорема о проецировании прямого угла

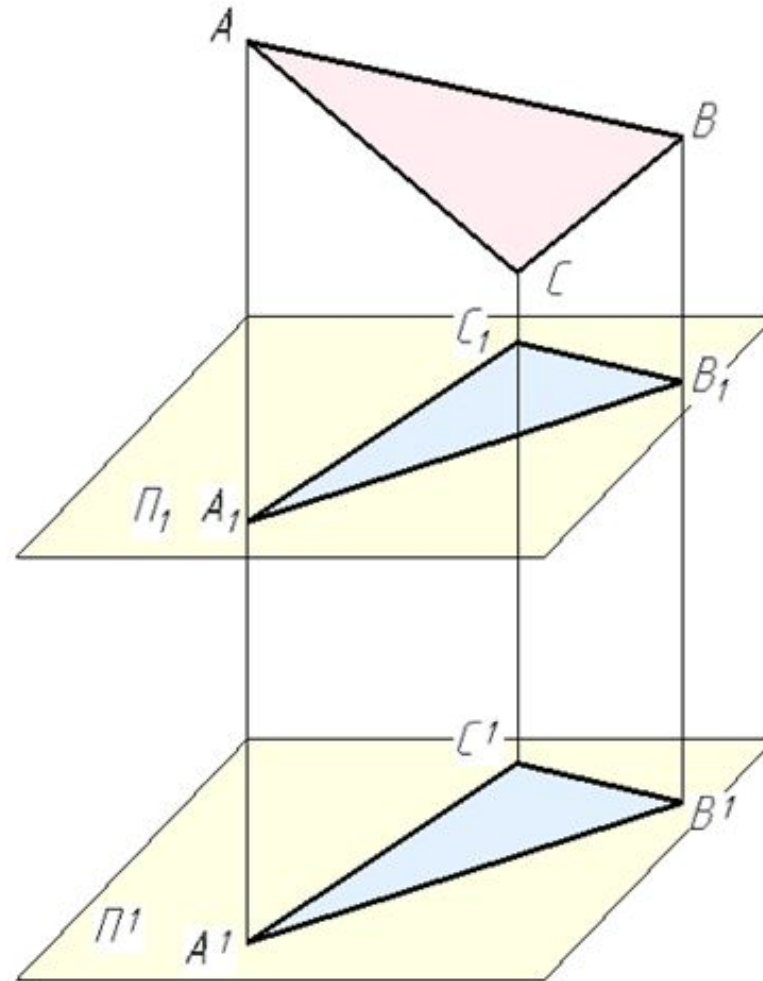
Если хотя бы одна из сторон прямого угла параллельна одной из плоскостей проекций, а другая ей не перпендикулярна, то прямой угол на эту плоскость проецируется без искажения.



$$a \perp b,$$
$$a \parallel \Pi_1$$

$$\text{Если } a \parallel \Pi_1,$$
$$\text{то } a_1 \perp b_1$$

**9. Форма проекции фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.**



# *Прямая и обратная задачи*

**Прямая задача** –

построение проекций по пространственной модели;

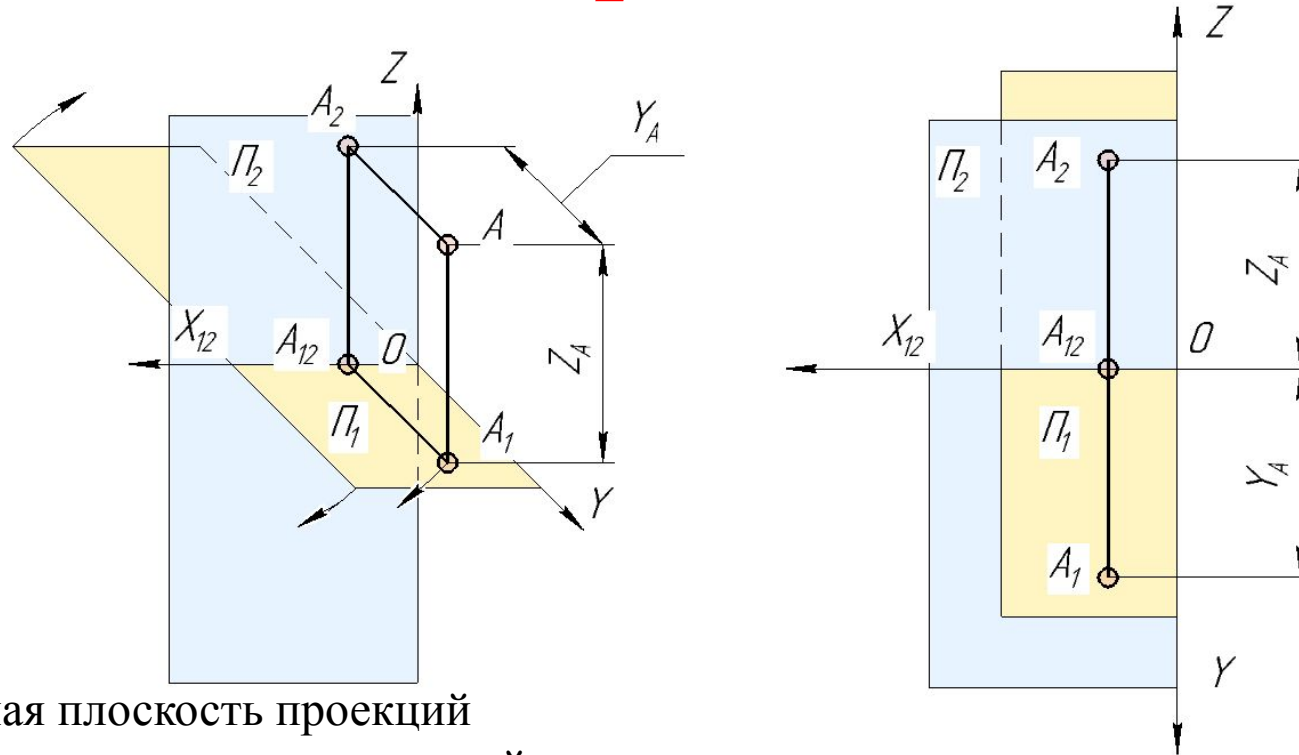
**Обратная задача** – по проекциям воссоздание  
пространственной модели

К чертежу предъявляются следующие требования: обратимость, точность, простота, наглядность.

# *Комплексные чертежи «Точка, прямая, плоскость»*

*Комплексным* называется чертеж, состоящий из совокупности взаимосвязанных ортогональных проекций.

# Комплексный чертёж точки



$\Pi_2$  – фронтальная плоскость проекций

$\Pi_1$  – горизонтальная плоскость проекций

$X_{12}$  – ось проекций

$\Pi_2 \perp \Pi_1$

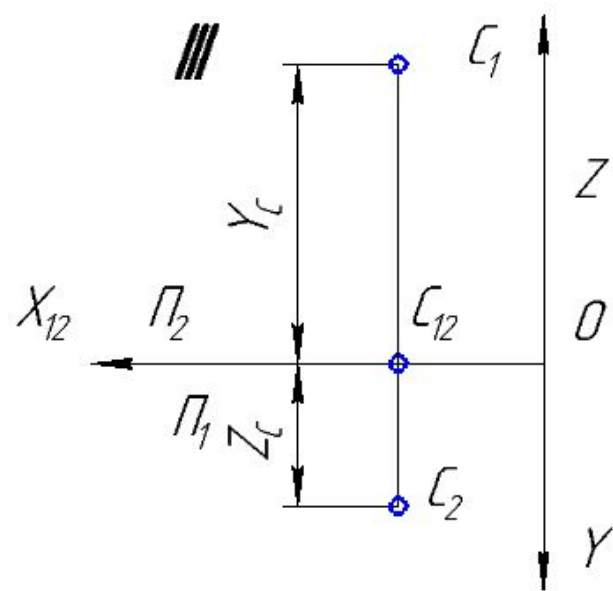
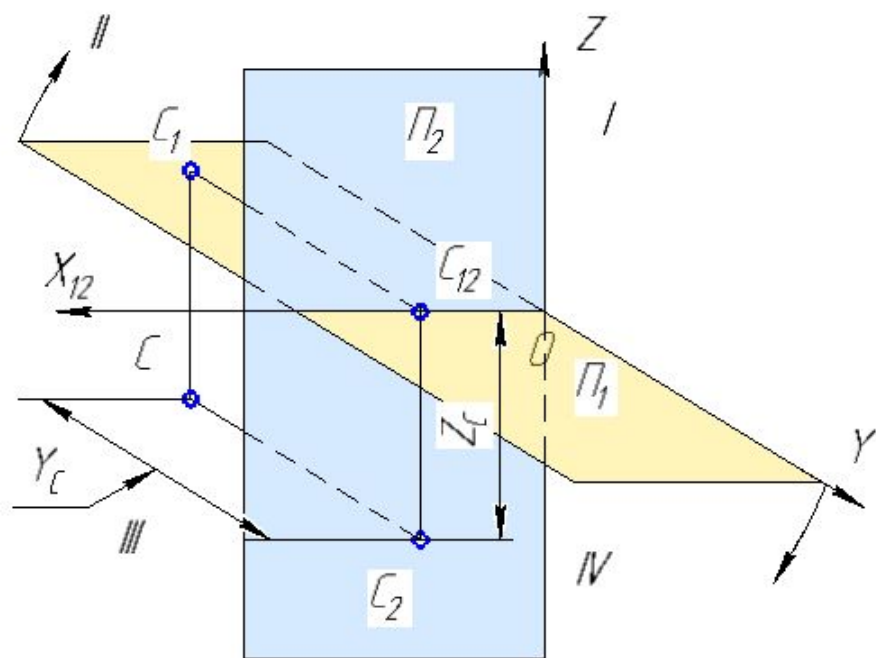
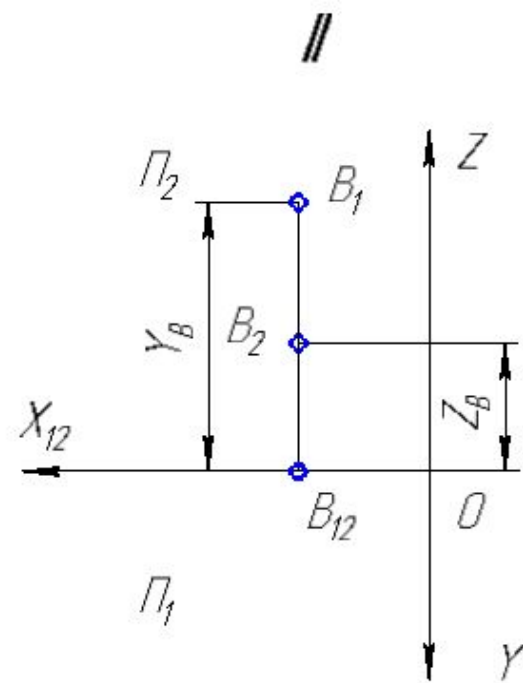
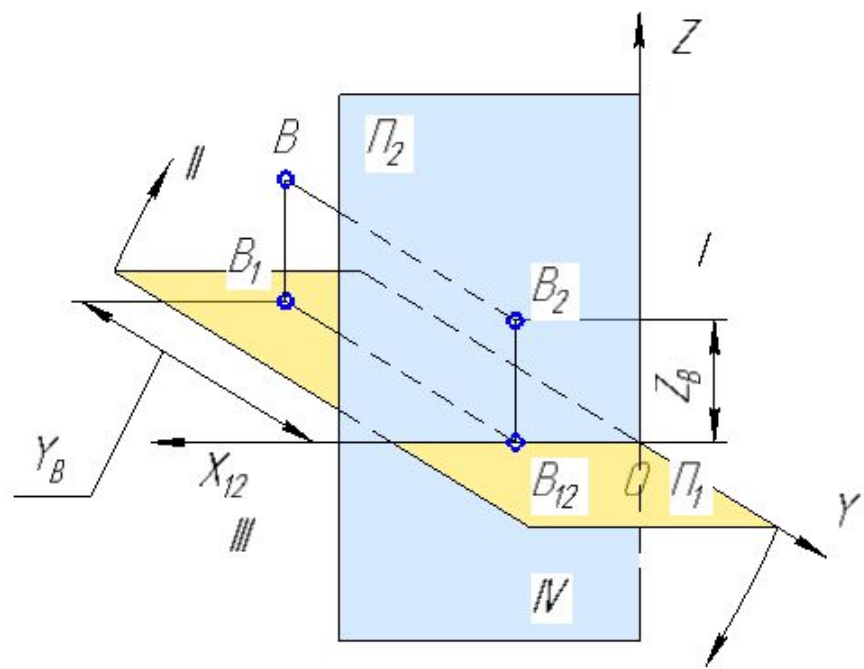
$AA_2 = A_1A_{12}$  расстояние до фронтальной плоскости

$AA_1 = A_2A_{12}$  расстояние до горизонтальной плоскости

$A_2A_1$  – линия связи

$A_2A_1 \perp X_{12}$

Две проекции точки определяют ее положение в пространстве



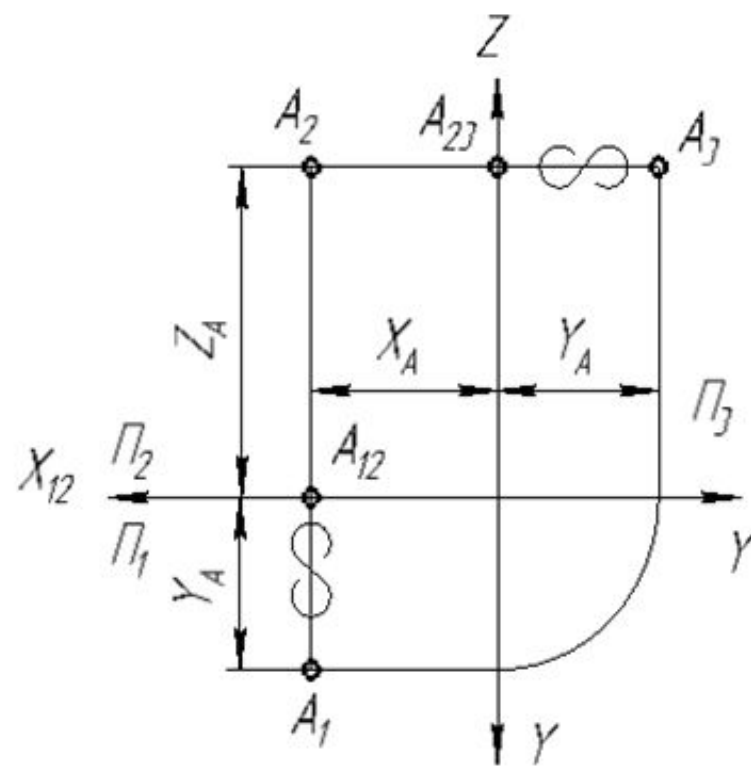
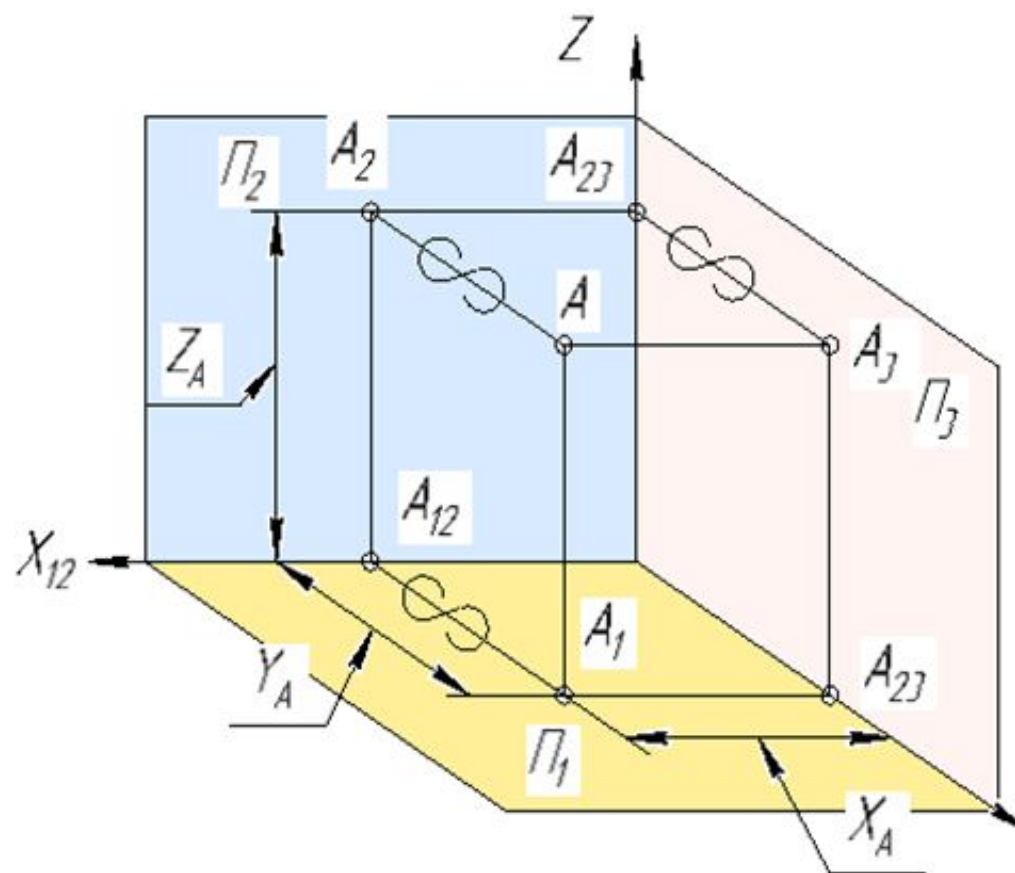
Положение точки в пространстве определяется тремя координатами –  $X, Y, Z$

**Координаты** – расстояния от точки до плоскостей проекций

$X_A$  – расстояние от точки до профильной плоскости проекций  $\Pi_3 / AA_3/$

$Y_A$  – расстояние от точки до фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2 / AA_2/$

$Z_A$  – расстояние от точки до горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1 / AA_1/$

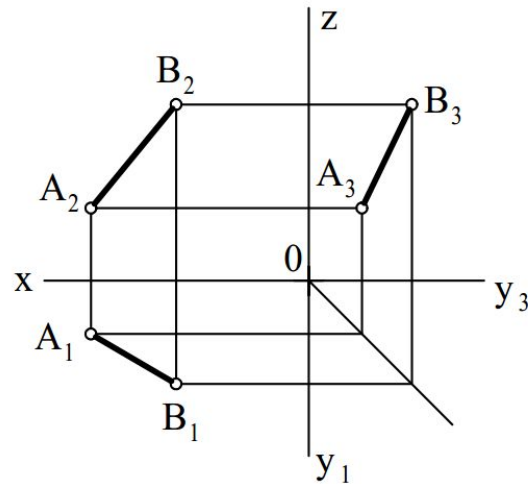
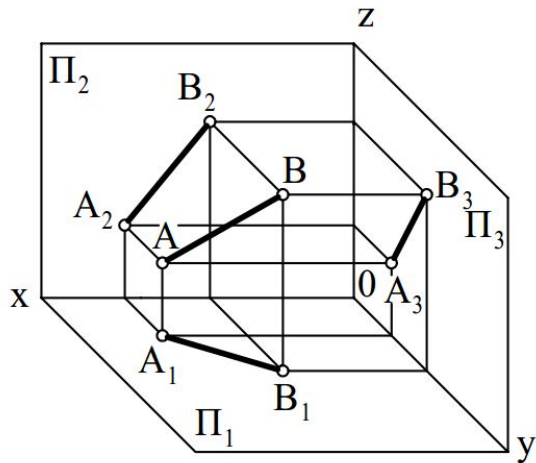


## Комплексный чертёж прямой

Прямые, непараллельные и неперпендикулярные плоскости проекций называются **прямыми общего положения**.

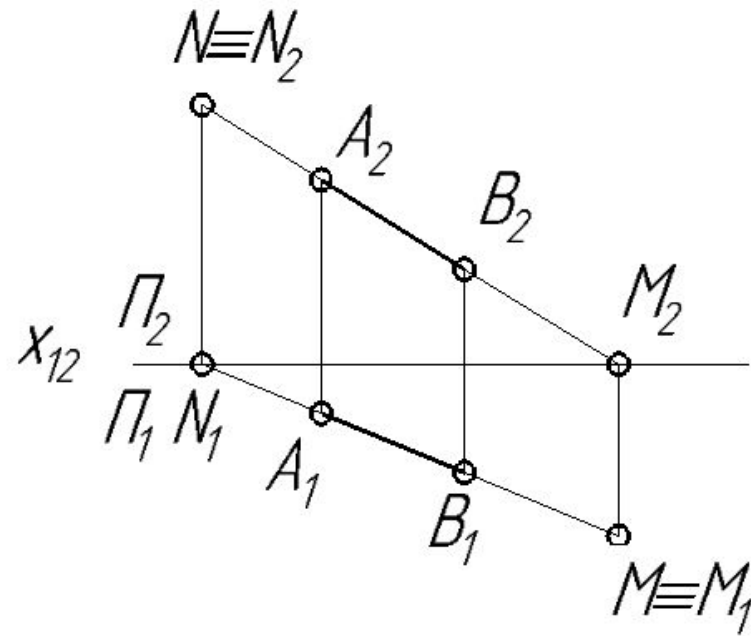
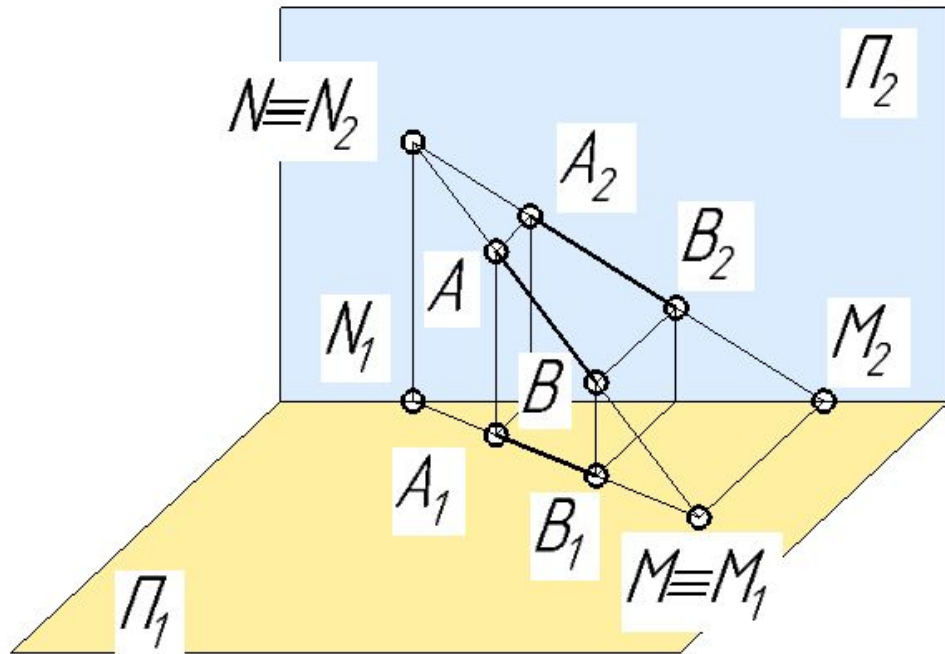
Прямая на комплексном чертеже может быть задана:

- двумя точками (А, В);
- своими проекциями ( $m_1, m_2$ ).





**Следы прямой** – точки ее пересечения с плоскостями проекций.



$M$  – горизонтальный след прямой  $AB$

$$M = AB \cap \Pi_1$$

$N$  – фронтальный след прямой  $AB$

$$N = AB \cap \Pi_2$$

# Прямые частного положения (прямые уровня и проецирующие)

**Прямые частного положения** – это прямые параллельные и перпендикулярные плоскостям проекций.

## **Прямые уровня**

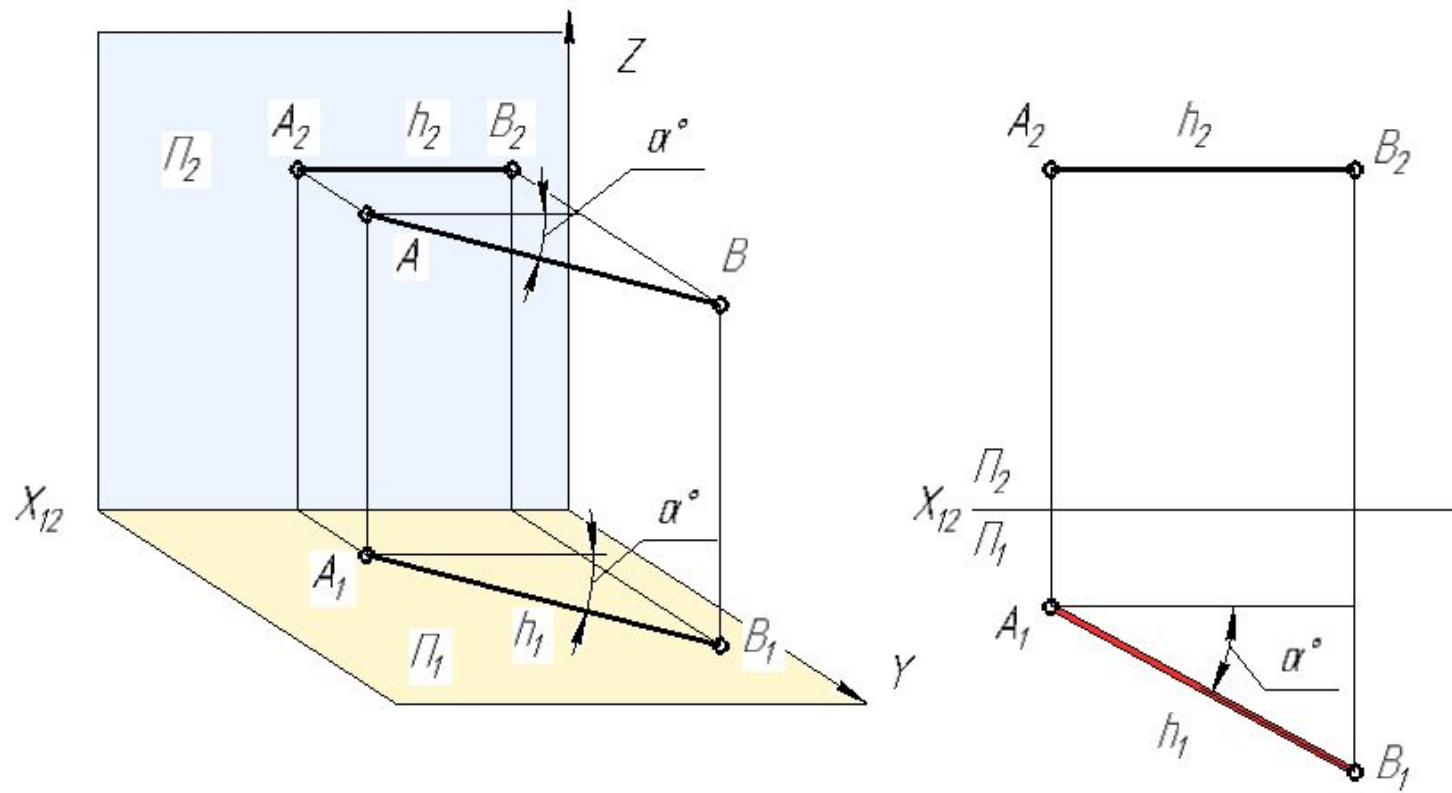
**Прямые уровня** – прямые параллельные плоскостям проекций.

Различают три линии уровня:

- 1) прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций; называют горизонтальной или **горизонталью h**;
- 2) прямую, параллельную фронтальной плоскости проекций; называют фронтальной **или фронталью f**;
- 3) прямую, параллельную профильной плоскости проекций; называют **профильной p**.

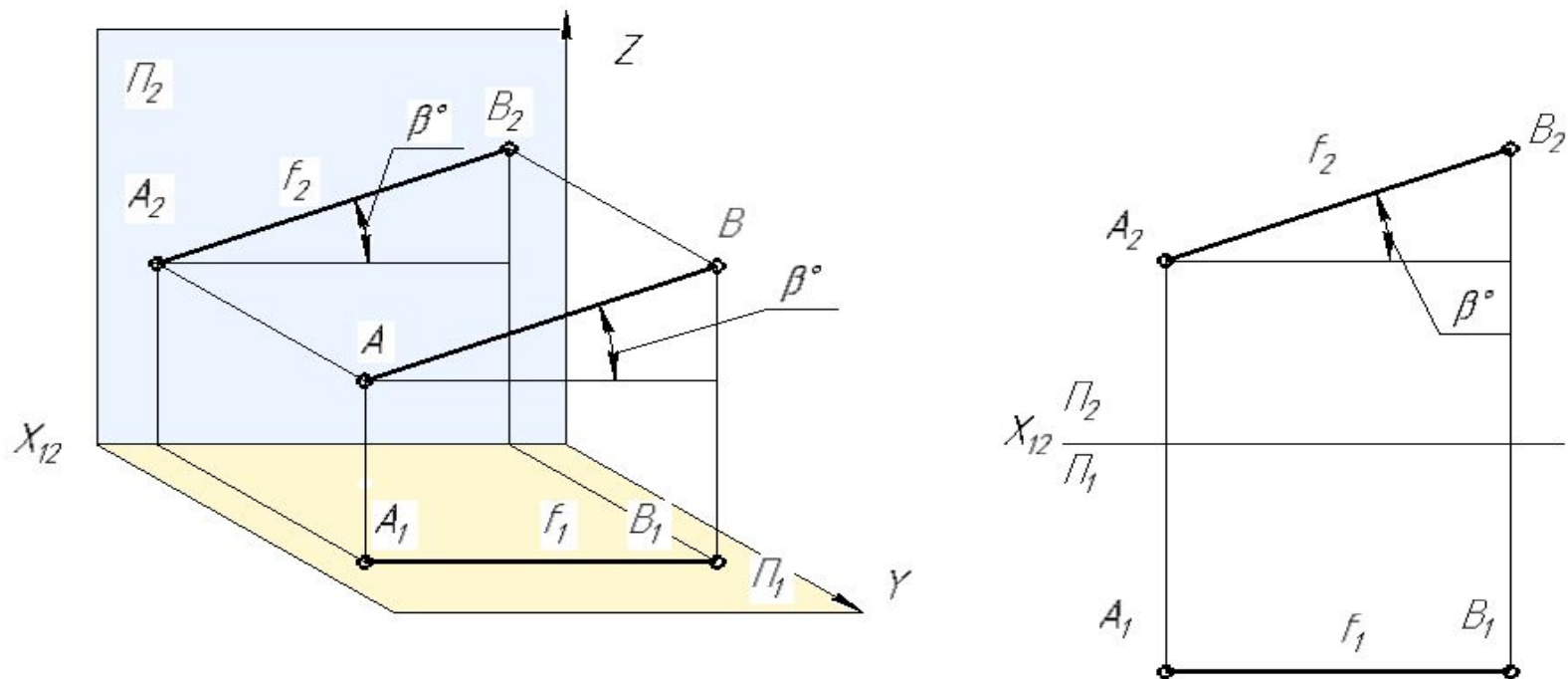
Каждая линия уровня будет проецироваться в натуральную величину на ту плоскость проекций, которой она параллельна, углы наклона, которые эта прямая образует с двумя другими плоскостями проекций, также будут проецироваться на эту плоскость без искажения.

# Горизонталь



$h_2 \parallel X_{12}$ ;  $h_1$  – натуральная величина;  
 $\alpha^\circ$  – угол наклона прямой к фронтальной  
плоскости проекций.

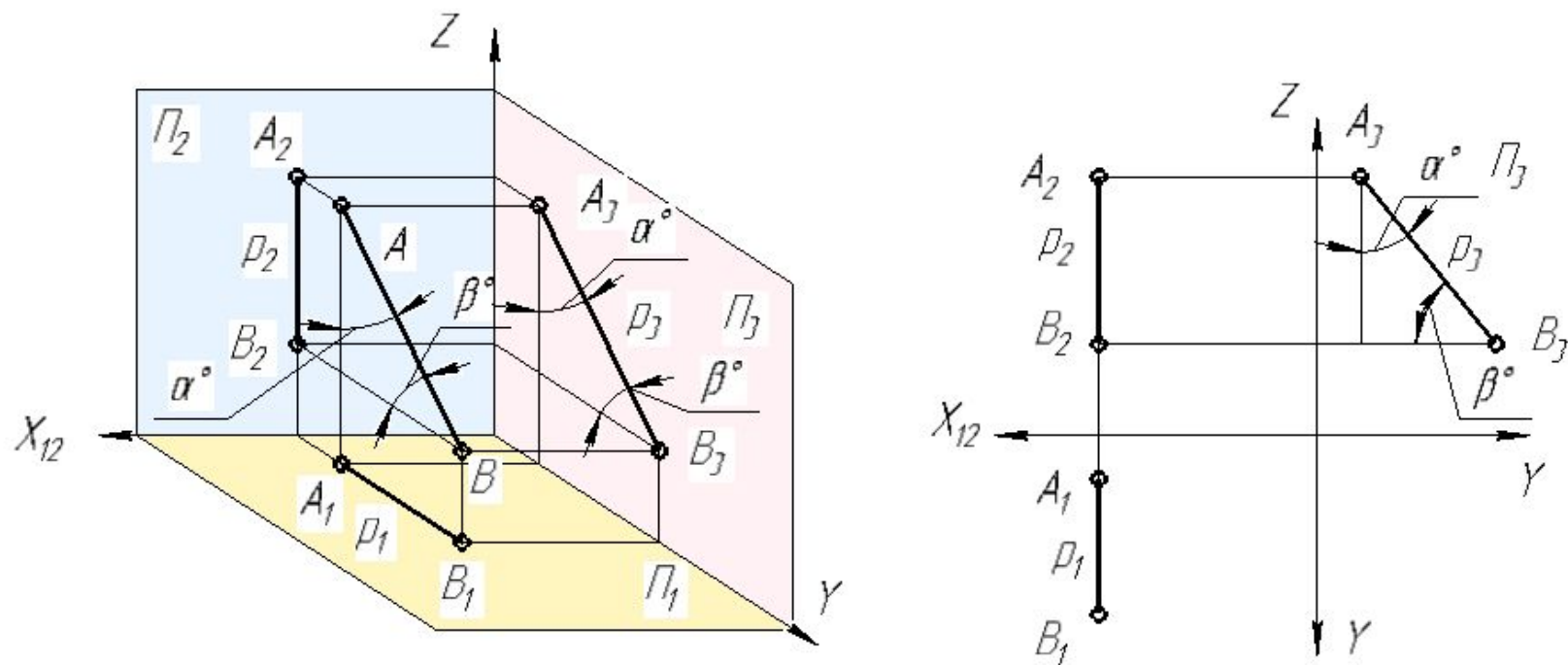
# Фронталь



$f_1 \parallel X_{12}$ ;  $f_2$  - натуральная величина;

$\beta^\circ$  - угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций.

# Профильная прямая



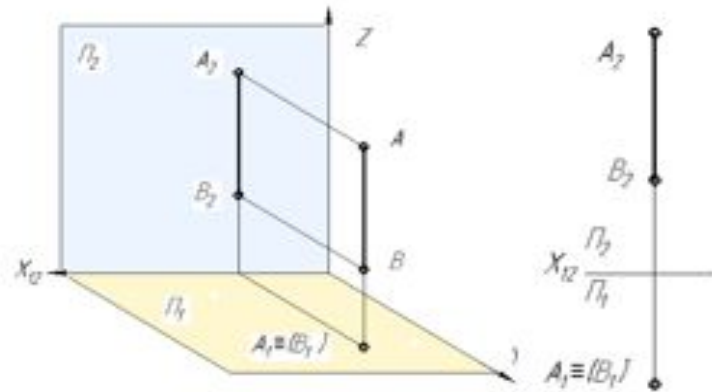
$A_3B_3$  – натуральная величина;

$\alpha^\circ$  - угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций;

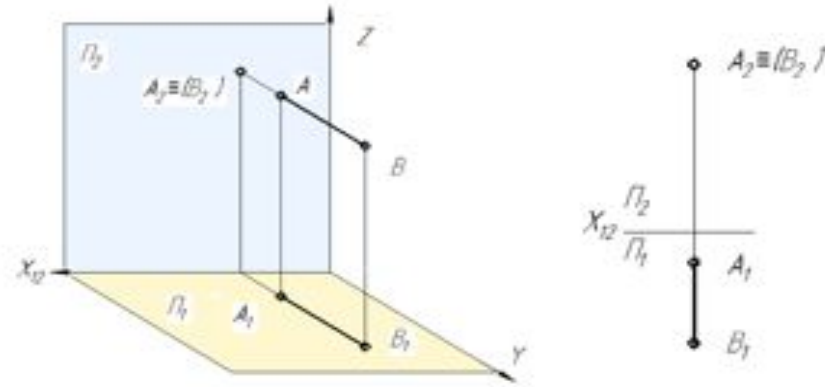
$\beta^\circ$  - угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций.

# Проецирующие прямые

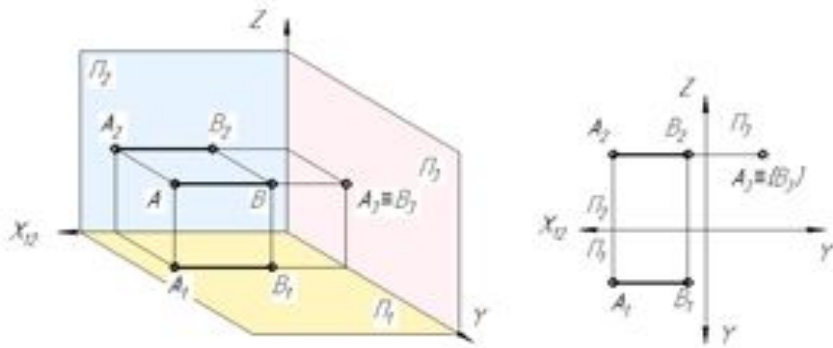
**Проецирующие прямые** – прямые перпендикулярные плоскостям проекций.



**Горизонтально проецирующая прямая** – прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости.



**Фронтально проецирующая прямая** – прямая перпендикулярная фронтальной плоскости.

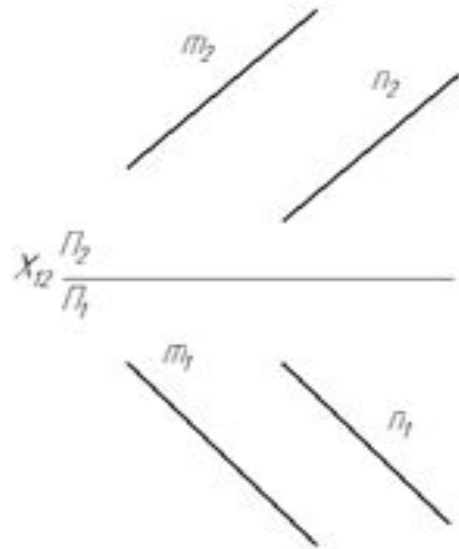


**Профильно-проецирующая прямая** – прямая перпендикулярная профильной плоскости.

**Конкурирующие точки** – точки, лежащие на проецирующей прямой.

# Взаимное расположение прямых

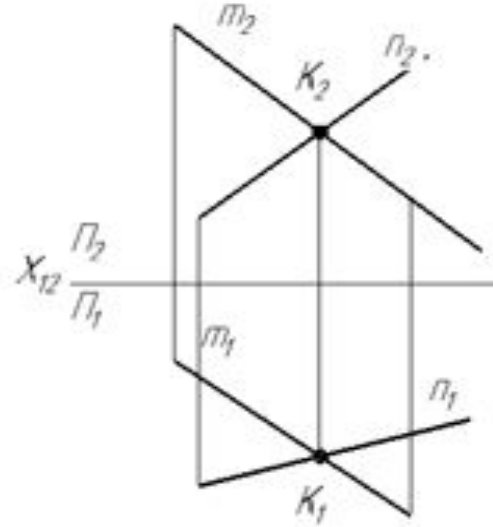
Прямые параллельны



Если прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны.

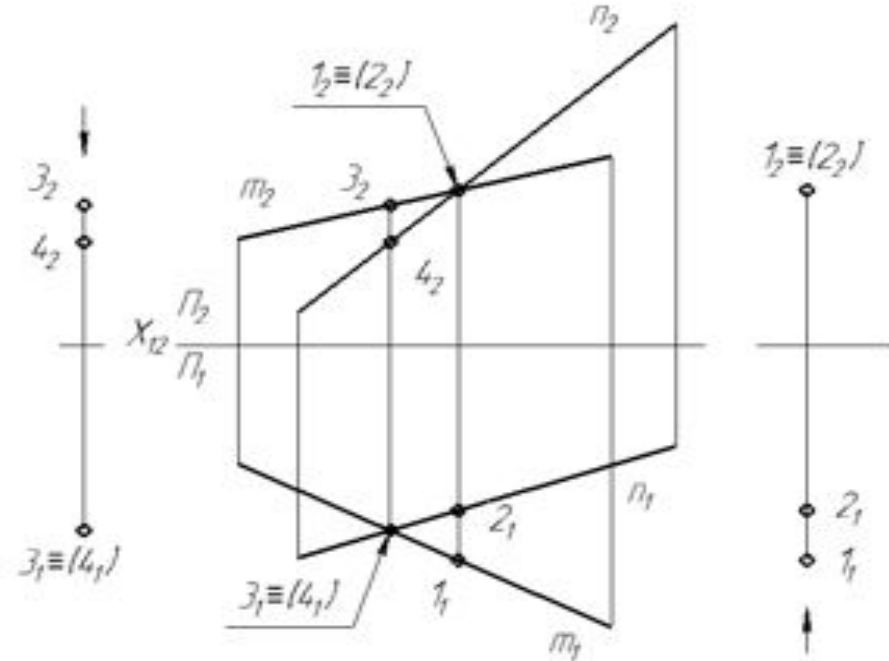
$$\begin{aligned} & \underline{m \parallel n} \\ & m_1 \parallel n_1 \\ & m_2 \parallel n_2 \end{aligned}$$

Прямые пересекаются



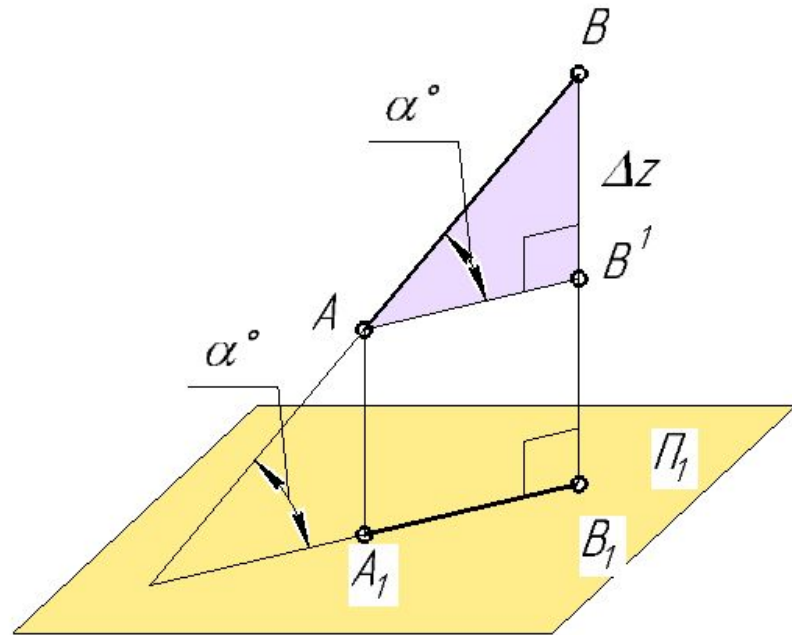
$$K = \underline{m \cap n}$$

Прямые скрещиваются

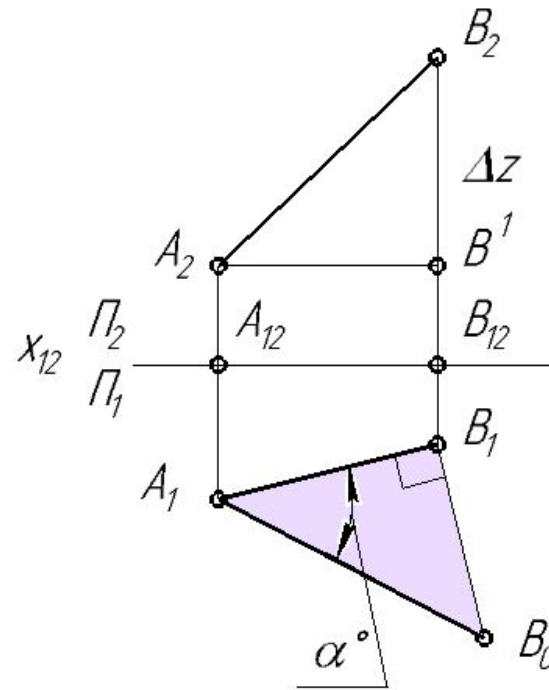


**Конкурирующие точки** – точки, лежащие на одной проецирующей прямой.

# Определение длины отрезка способом прямоугольного треугольника



$$\Delta Z = BB_1 - B'B_1; AA_1 = B'B_1$$



**Натуральная величина отрезка прямой** – это гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет – это горизонтальная (фронтальная) проекция отрезка, а другой катет – это разность расстояний концов отрезка до горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций.