Математика
1 курс, 5 лекция

Большаков Юрий Иванович

Лекция 5.

Интервалы возрастания (убывания) функции и экстремумы. Интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика.

Определение 1. Точка x_0 — точка возрастания функции, если $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ в этой точке при достаточно малых Δx и x_0 — точка убывания, если $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Теорема 1. Если дифференцируемая в точке x_0 имеет положительную производную, т.е. $f'(x_0) > 0$, то $f(x)$ возрастает в точке x_0. Если $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, то $f'(x_0) \geq 0$.

$\blacktriangle$ Существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ и, следовательно, для $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta x:$ $\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \Rightarrow f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta y}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon$, полагая $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0$, находим $\frac{\Delta y}{\Delta x} > \frac{f'(x_0)}{2} > 0$, т.е. $f(x)$ возрастает в точке x_0. Вторая часть доказывается методом от противного. $\blacktriangle$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на (a, b) (убывающей на (a, b)), если она возрастает (убывает) в каждой точке этого интервала.

Следствие. Для нахождения интервалов возрастания (убывания) дифф. функции достаточно найти интервалы знакопостоянства её производной и там, где $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, там функция $y = f(x)$ возрастает (убывает). Точки, в которых происходит смена знака производной, соответствуют точкам локальных экстремумов.

Определение 3. Точка x_0 называется точкой локального максимума (min) функции $y=f(x)$, если существует такая её окрестность, что для любой точки x из этой окрестности $f(x_0)>f(x)$ $(f(x_0)<f(x))$.

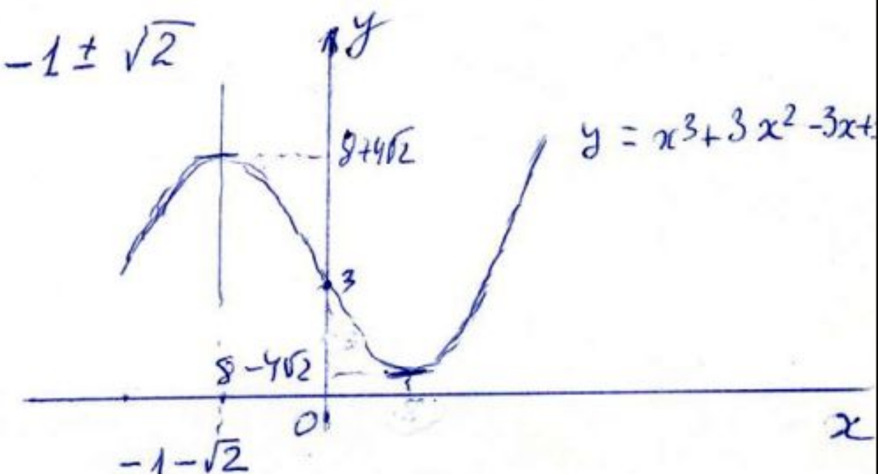
Пример 1. $y=x^3+3x^2-3x+3$. Найти интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции.

Решение. $y'=3(x^2+2x-1)=0$, $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$

$+ \quad -1-\sqrt{2} \quad - \quad -1+\sqrt{2} \quad +$ $\quad y'$

y

$y_{max}=y(-1-\sqrt{2})=8+4\sqrt{2}$ $\qquad y_{min}=y(-1+\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$



Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

Определение 4. Мы будем говорить, что график функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ обращён выпуклостью вверх (вниз) если локально он целиком расположен под (над) касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Пусть график $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ в некоторой её окрестности лежит под касательной $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, т.е. $y_{кас} > f(x) \Rightarrow$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) > f(x) \Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0 \Rightarrow$$

$$f'(x_0 + \theta_1(x - x_0))(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\left(f'(x_0 + \theta_1(x - x_0)) - f'(x_0)\right) =$$

$$(x - x_0)\, f''(x_0 + \theta_2\theta_1(x - x_0))\, \theta_1(x - x_0) = \theta_1 (x - x_0)^2 \cdot f''(x_0 + \theta_1\theta_2(x - x_0)) < 0$$

$f''(x_0) < 0$. Иначе график под касат. $\Rightarrow f'' < 0$ ~ график обращён выпуклостью вверх.

Определение 5. Точка $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется тип выпуклости.

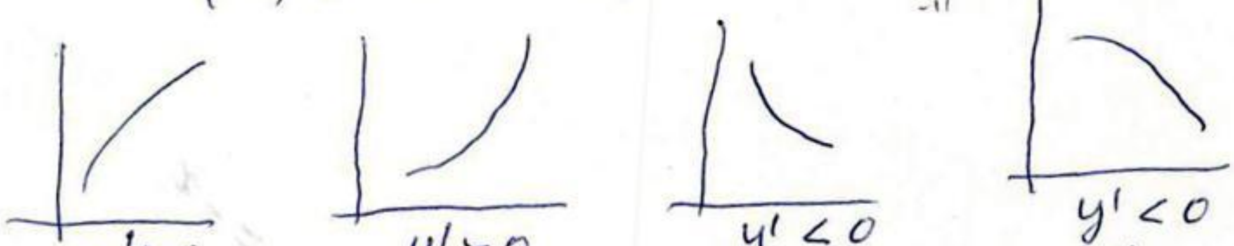
Пример 2. $y=x^3+3x^2-3x+3$. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.

Решение. $y'=3x^2+6x-3$, $y''=6x+6=6(x+1)$

$x_0=-1$, $f'(-1)=-6=tg\alpha$.

$(-1;8)$ – точка перегиба

Пример 3.



$y'>0$	$y'>0$	$y'<0$	$y'<0$
$y''<0$	$y''>0$	$y''>0$	$y''<0$

Определение 6. Прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота к графику функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(kx+b))=0$. При этом, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

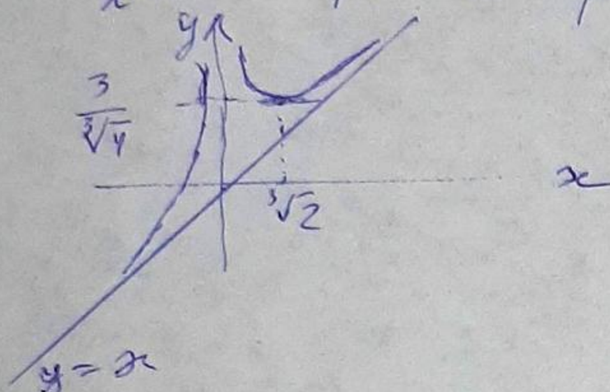
Пример 4. $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$. Найдем асимптоты к графику $y = f(x)$.

а) Если $x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ вертикальная асимптота.

б) $y = kx + b$ — наклонная асимптота, тогда

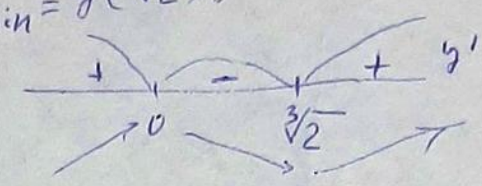
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3} + 1\right) = 1$. $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

$\Rightarrow y = x$ — наклонная асимптота. Более того $f(x) - (kx + b) = \frac{1}{x^2} > 0$, т. е. график $y = f(x)$ выше асимптоты $y = x$:



в) $y' = -\frac{2}{x^3} + 1 = 0$, $x = \sqrt[3]{2}$: $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}$

$= \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = y_{min} = y(\sqrt[3]{2})$.



г) $y'' = \frac{6}{x^4} > 0 \Rightarrow$ везде $\cup$

Схема исследования функции:

1. Область определения функции; 2) чётность-нечётность, периодичность; 3. Точки пересечения с осями координат; 4. Непрерывность, дифференцируемость; 5. С помощью y' ищем интервалы монотонности и экстремумы функции; 6. С помощью y'' ищем интервалы выпуклости — вогнутости и точки перегиба графика; 7. Асимптоты к графику; 8. График функции.

Дифференциал функции: $df = f'(x)\Delta x$. Если $f(x) = x$, то
$dx = df = f'(x)\Delta x = 1\cdot\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$, т.е. $\boxed{df(x) = f'(x)dx}$.
Свойства df: $d(f+g) = df + dg$; $d(\lambda f) = \lambda df$; $duv = udv + vdu$.

Лемма. Дифференцируемая на $[a, b]$ функция $f(x) \equiv c$
$\Leftrightarrow f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Н) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c-c}{\Delta x} = 0$

Д) Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$, тогда по теореме Лагранжа
$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{0}(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$ при
$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$