

Математика  
1 курс, 5 лекция

Большаков Юрий Иванович

# Лекция 5.

Интервалы возрастания (убывания) функции и экстремумы.

Интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика.

Определение 1. Точка  $x_0$  — точка возрастающей функции, если  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$  в этой точке при достаточно малых  $\Delta x$  и  $x_0$  — точка убывания, если  $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ .

Теорема 1. Если дифференцируемая в точке  $x_0$  имеет положительную производную, т.е.  $f'(x_0) > 0$ , то  $f(x)$  возрастает в точке  $x_0$ . Если  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ , то  $f'(x_0) \geq 0$ .

▲ Существует  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$  и, следовательно,

для  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta x$ :  $|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta y}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon$ , полага-

вая  $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0$ , находим  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > \frac{f'(x_0)}{2} > 0$ , т.е.  $f(x)$  возрастает в точке  $x_0$ . Вторая часть доказывается методом от противного. ▲

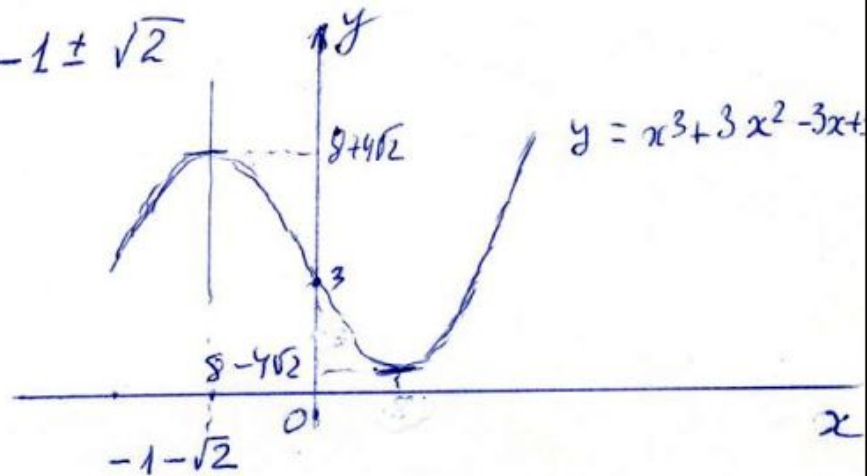
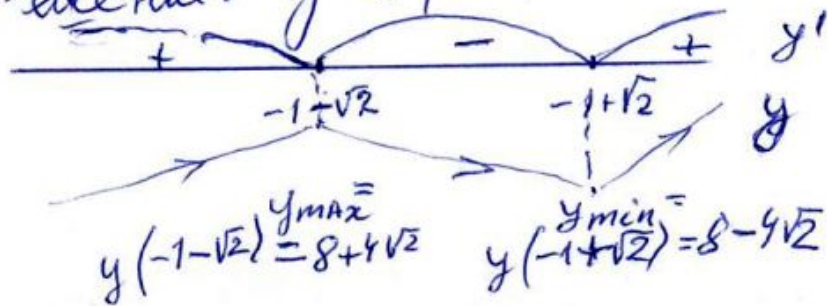
Определение 2. Функция  $y = f(x)$  называется возрастающей на  $(a, b)$  (убывающей на  $(a, b)$ ), если она возрастает (убывает) в каждой точке этого интервала.

Следствие. Для нахождения интервалов возрастания (убывания) дифф. функции достаточно найти интервалы знакопостоянства её производной и там, где  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ), там функция  $y = f(x)$  возрастает (убывает). Точки, в которых происходит смена знака производной, соответствующим образом локальных экстремумов.

**Определение 3.** Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума функции  $y = f(x)$ , если существует такая её окрестность, что для любой точки  $x$  из этой окрестности  $f(x_0) > f(x)$  ( $f(x_0) < f(x)$ ).

**Пример 1.**  $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 3$ . Найти интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции.

Решение.  $y' = 3(x^2 + 2x - 1) = 0$ ,  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$



интервала выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

Определение 4 Мы будем говорить, что график функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  обращён выпуклостью вверх (вниз) если локально он целиком расположен под (над) касательной, проведённой к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

Пусть график  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  в некоторой её окрестности лежит под касательной  $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , т.е.  $y_{кас} > f(x) \Rightarrow$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) > f(x) \Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0 \Rightarrow$$
$$f'(x_0 + \theta_1(x - x_0))(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)(f'(x_0 + \theta_1(x - x_0)) - f'(x_0)) =$$

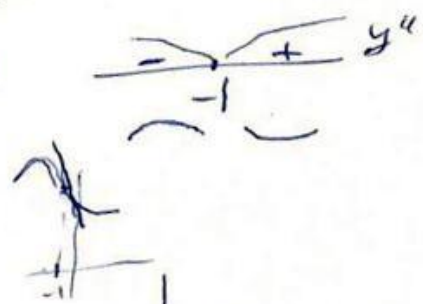
$$(x - x_0) f''(x_0 + \theta_2 \theta_1(x - x_0)) \theta_1(x - x_0) = \theta_1(x - x_0)^2 \cdot f''(x_0 + \theta_1 \theta_2(x - x_0)) < 0$$

$f''(x_0) < 0$ . Укаже график под касат.  $\Rightarrow f'' < 0 \sim$  график  
обращён выпуклостью вверх,

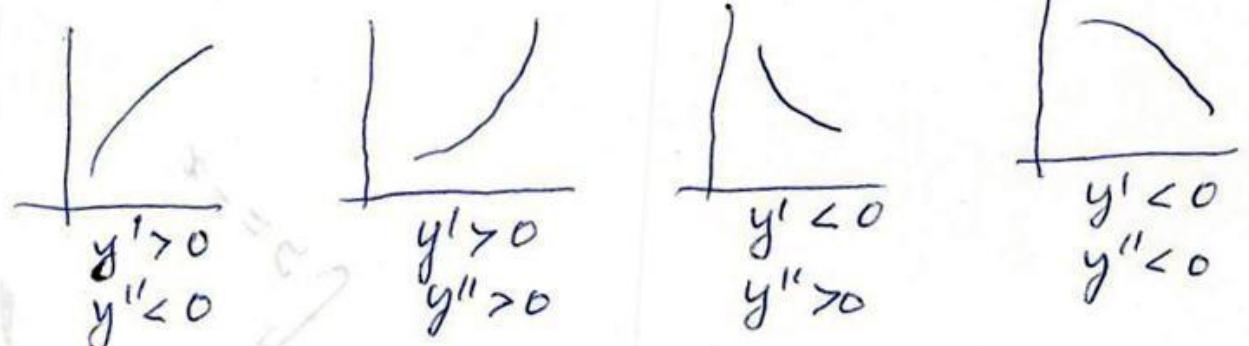
**Определение 5.** Точка  $(x_0, f(x_0))$  - точка перегиба графика функции  $y = f(x)$ , если при переходе через точку  $x_0$  меняется тип выпуклости.

**Пример 2.**  $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 3$ . Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.

Решение.  $y' = 3x^2 + 6x - 3$ ,  $y'' = 6x + 6 = 6(x+1)$   
 $x_0 = -1$ ,  $f'(-1) = -6 = \text{tg} \alpha$   
 $(-1; 8)$  - точка перегиба



**Пример 3.**



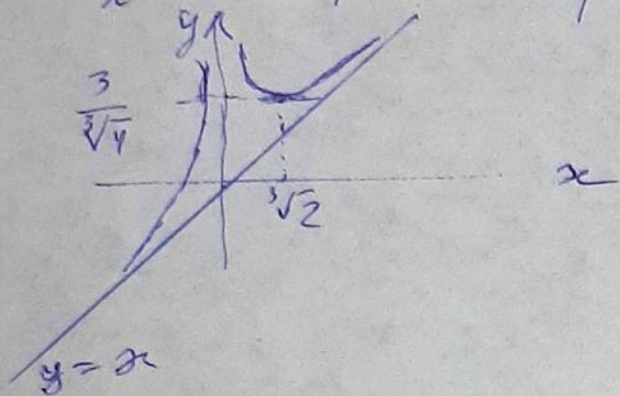
**Определение 6.** Прямая  $y = kx + b$  - наклонная асимптота к графику функции  $y = f(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ . При этом,  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ .

Пример 4.  $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ . Найдем асимптоты и график  $y = f(x)$ .

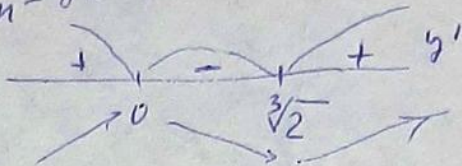
а) Если  $x = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$  вертикальная асимптота.

б)  $y = kx + b$  - наклонная асимптота, тогда  
 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^3} + 1 \right) = 1$ .  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ .

$\Rightarrow y = x$  - наклонная асимптота. Более того  $f(x) - (kx + b) = \frac{1}{x^2} > 0$ , т.е. график  $y = f(x)$  выше асимптоты  $y = x$ :



$$б) y' = -\frac{2}{x^3} + 1 = 0, x = \sqrt[3]{2}; f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = y_{\min} = y(\sqrt[3]{2}).$$



$$в) y'' = \frac{6}{x^4} > 0 \Rightarrow \text{везде } \cup$$

Схема исследования функции:

1. Область определения функции;
- 2) Чётность - нечётность, периодичность;
3. Точки пересечения с осями координат;
4. Непрерывность, дифференцируемость;
5. С помощью  $y'$  найдем интервалы монотонности и экстремумы функции;
6. С помощью  $y''$  найдем интервалы выпуклости - вогнутости и точки перегиба графика;
7. Асимптоты и график;
8. График функции.

Дифференциал функции:  $df = f'(x) \Delta x$ . Если  $f(x) = x$ , то  
 $dx = df = f'(x) \Delta x = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$ , т.е.  $\boxed{df(x) = f'(x) dx}$ .  
Свойства  $df$ :  $d(f+g) = df + dg$ ;  $d(\lambda f) = \lambda df$ ;  $d(uv) = u dv + v du$ .

Лемма. Дифференцируемая на  $[a, b]$  функция  $f(x) = c$

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

Н)  $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$

Д) Пусть  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , тогда по теореме Лагранжа

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$  где

$\forall \xi \in [a, b]$