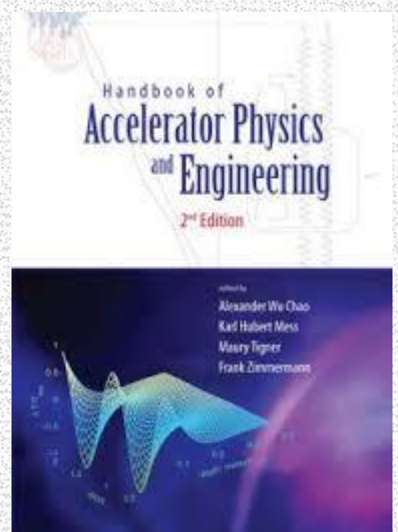
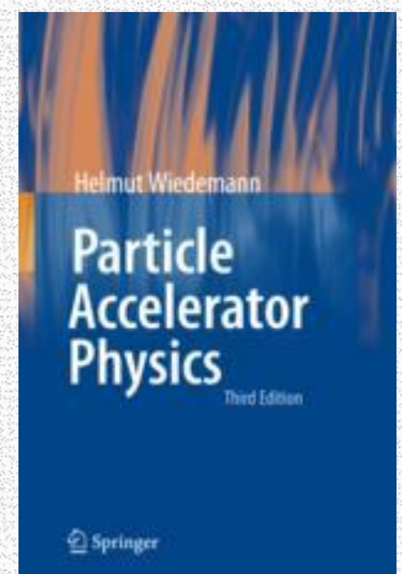
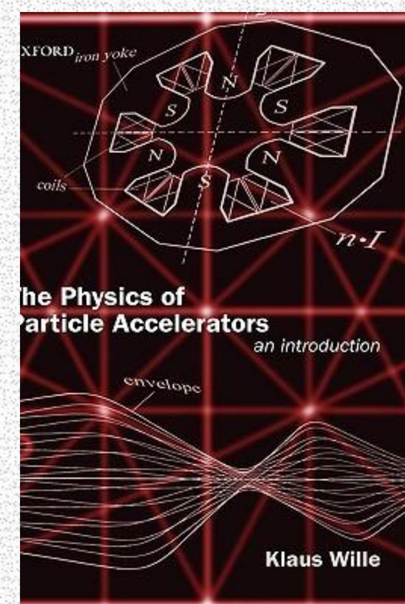
ФІЗИКА ПРИСКОРЮВАЧІВ

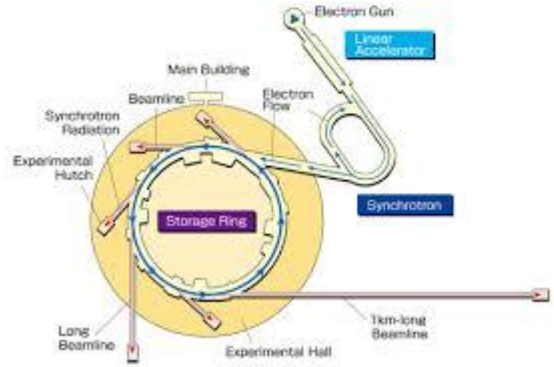
Лекція №2
ВСТУП

PD Dr. HP Beck / HS 2007

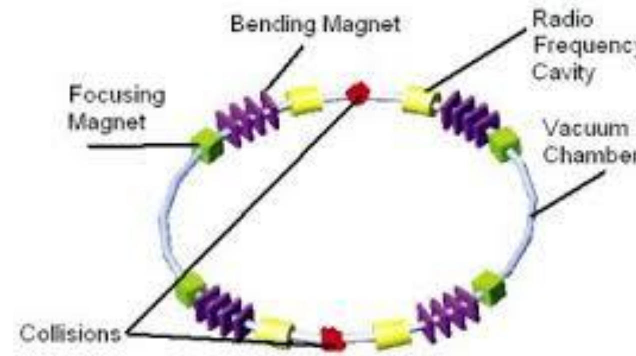




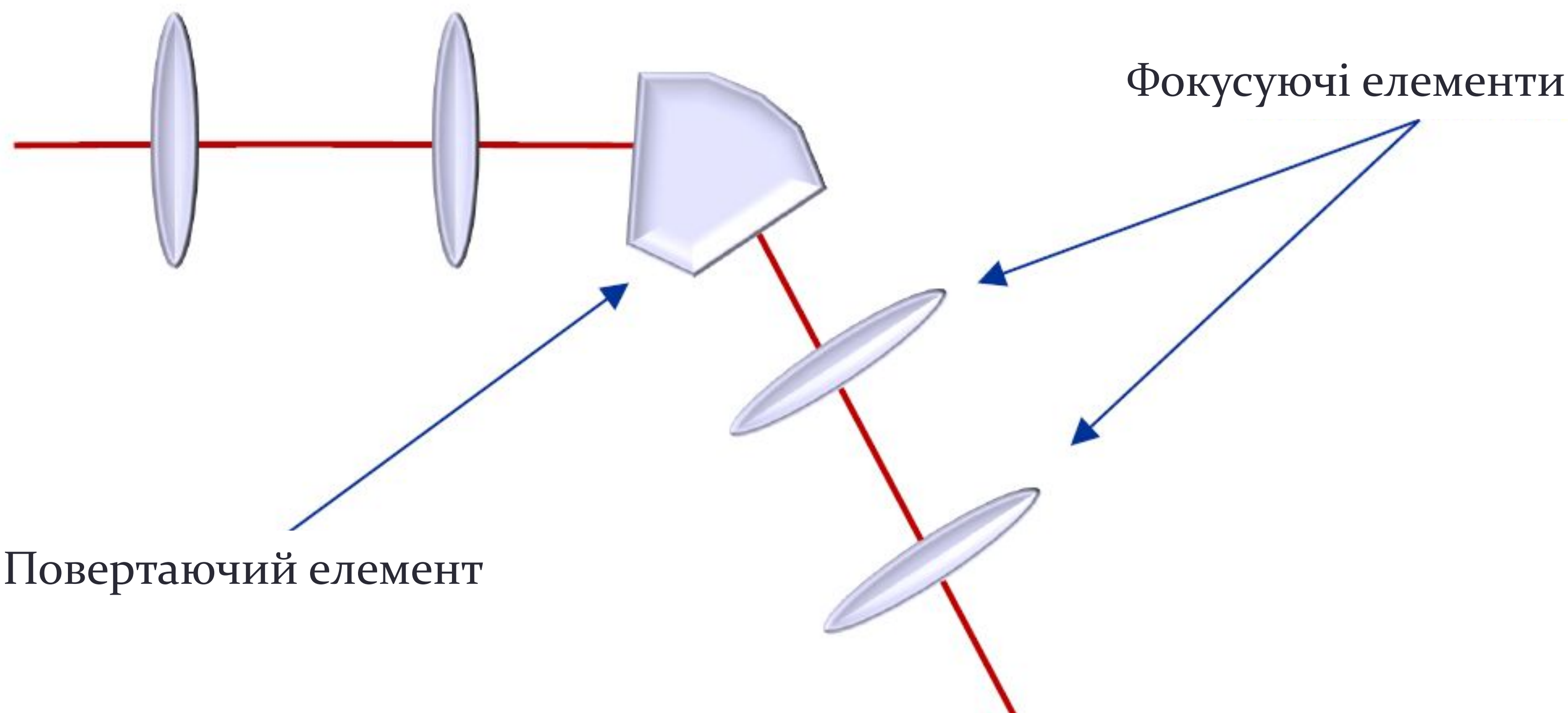




Electron Gun
Linear Accelerator
Main Building
Beamline
Electron Pipe
Synchrotron Radiation
Experimental Hutch
Storage Ring
Synchrotron
Long Beamline
Experimental Hall
1km-long Beamline



Bending Magnet
Radio Frequency Cavity
Focusing Magnet
Vacuum Chamber
Collisions



Фокусуючі елементи
Повертаючий елемент

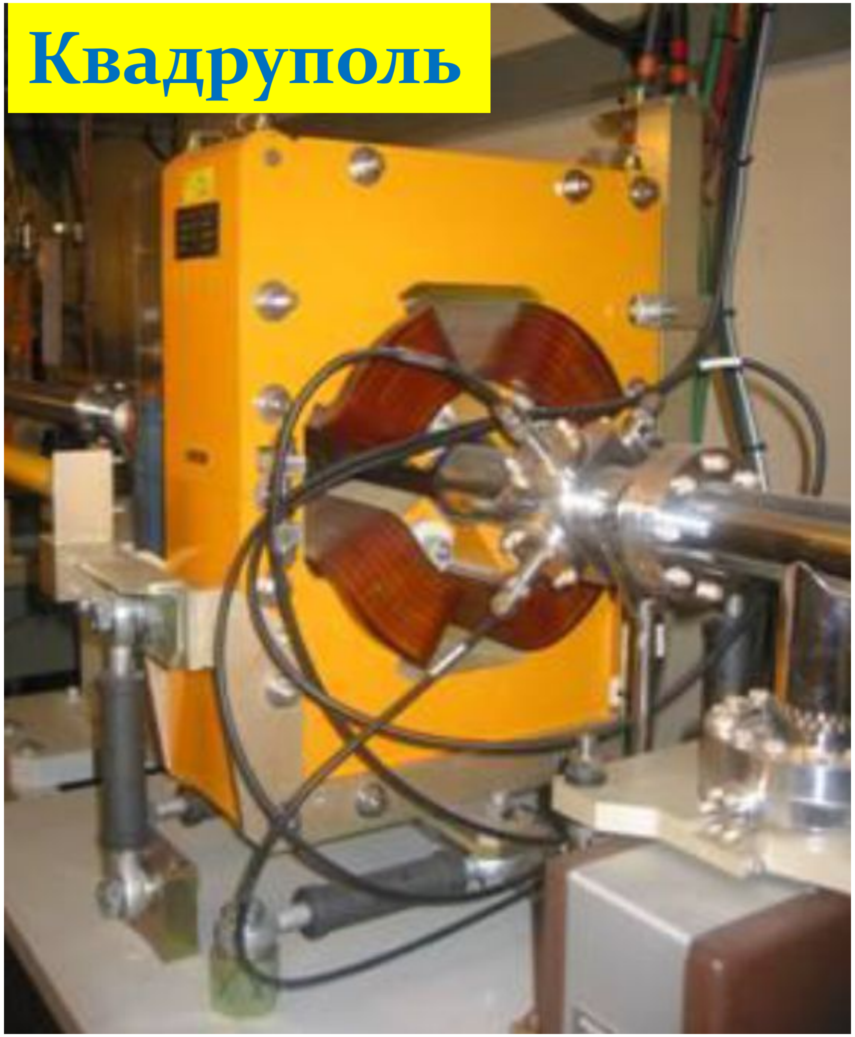
$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$\upsilon \approx c$ $\Rightarrow$ $\left|\vec{E}\right| = c\left|\vec{B}\right|$

B=1 T $\Rightarrow$ $E=3\cdot 10^8$ V/m ??!!

$\Downarrow$

Для релятивістських енергій використовують тільки магнітні поля для управління (повертання, фокусування) пучками частинок

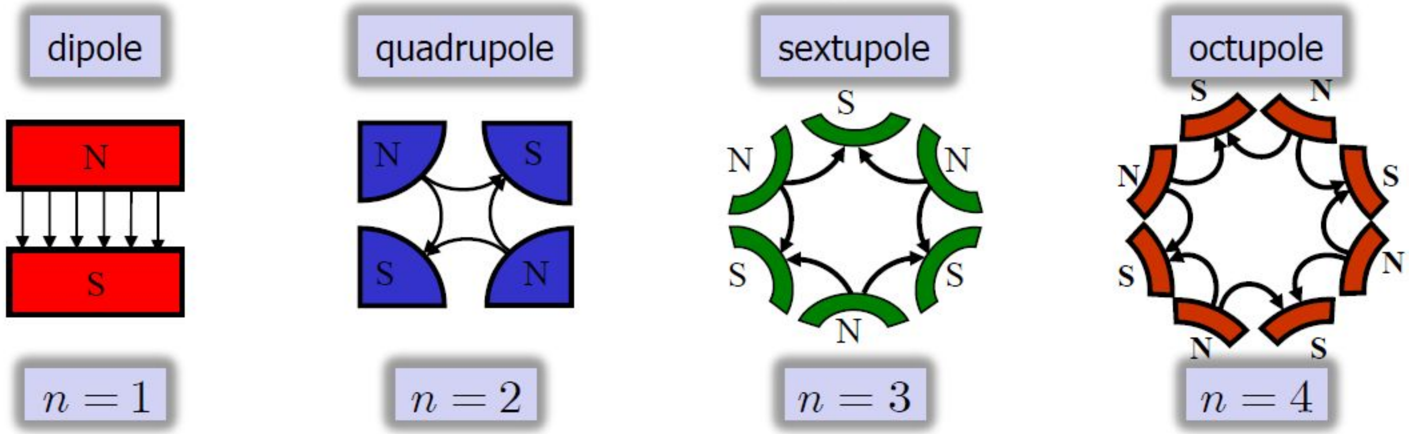

Квадруполь


Дипольний магніт


Секступоль

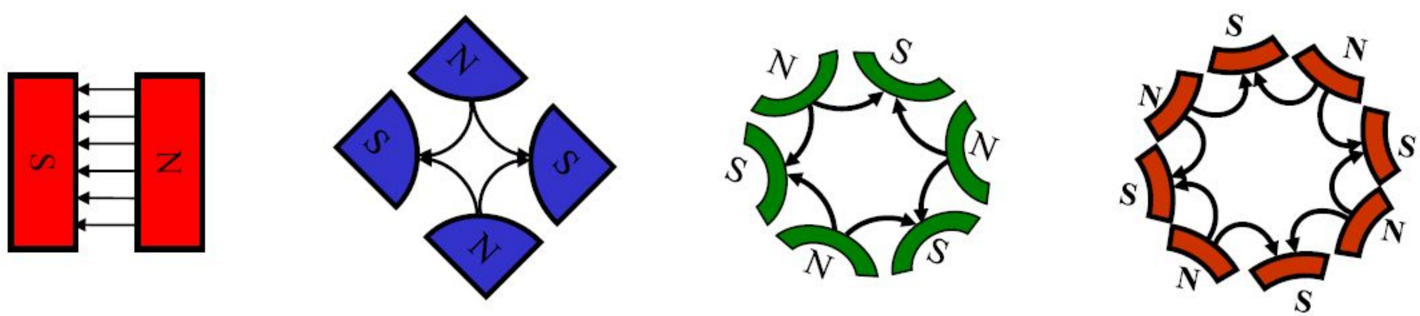
2n-польні магніти

Дія в горизонтальній площині



обертання на π/n – інверсна дія

Дія в вертикальній площині (обертання на $\pi/2n$)

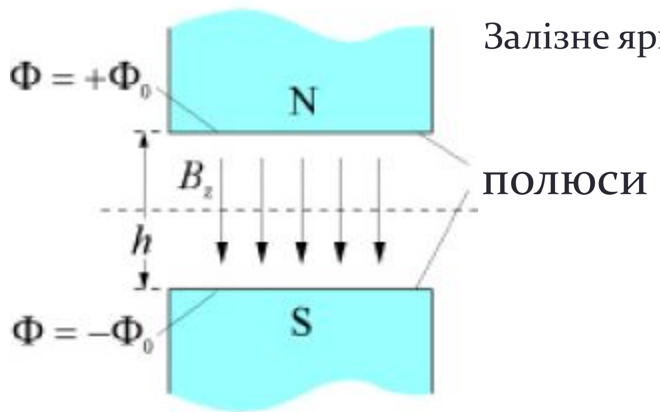


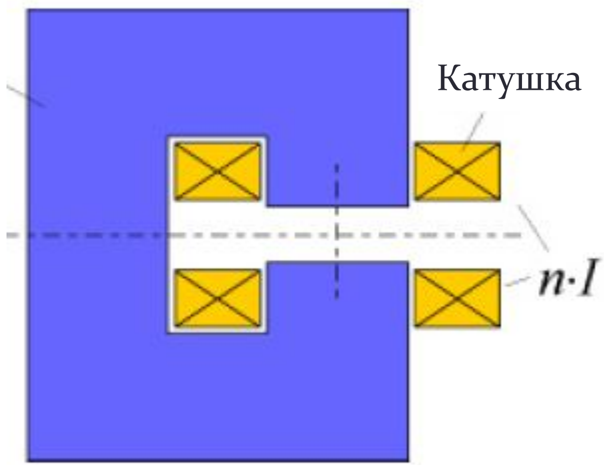
Диполь

$$B_x = 0$$

$$B_z = g_D$$

$$g_D = \frac{\mu_0 n I}{h}$$

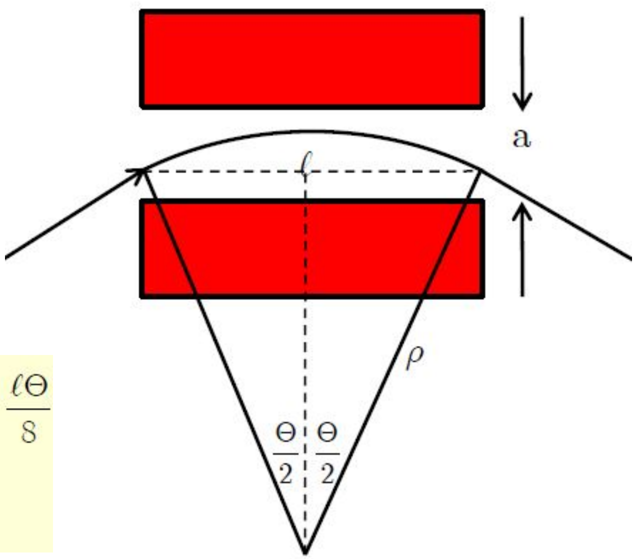




$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{\ell}{2\rho} = \frac{\ell B}{2(B\rho)} = \frac{\ell B}{2\left(p/e\right)} = e\frac{\ell B}{2p}$$

$$\Theta \approx \frac{e\ell B}{p}$$

Апертура ***a*** повинна бути достатньою для проходження поворотної дуги



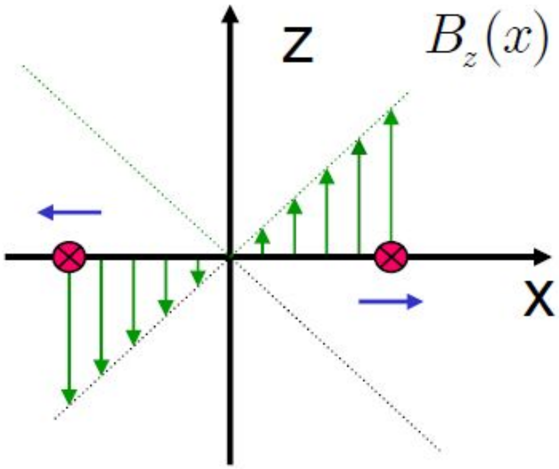
Апертура ***a*** повинна бути великою для малих імпульсів – тому потрібен початковий інжектор

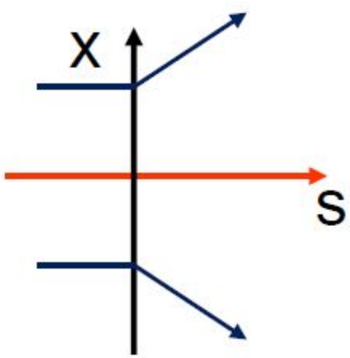
$$a > \rho\left(1 - \cos\frac{\Theta}{2}\right) \approx \rho\frac{\Theta^2}{8} \approx \frac{\ell\Theta}{8}$$

$$> \frac{e\ell^2 B}{8p}$$

Горизонтальна площина

$$B_z(x) = g_Q \cdot x$$

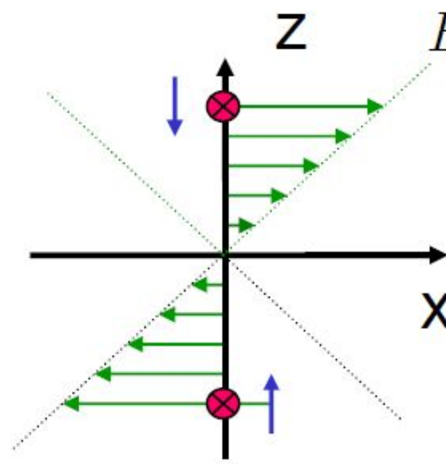


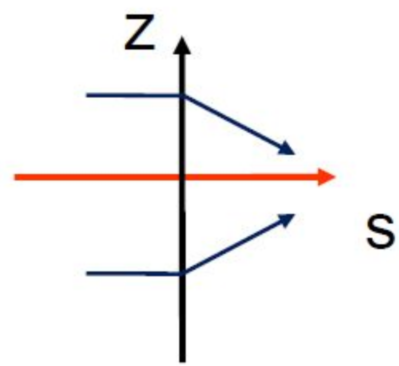


Дефокусування

Вертикальна площина

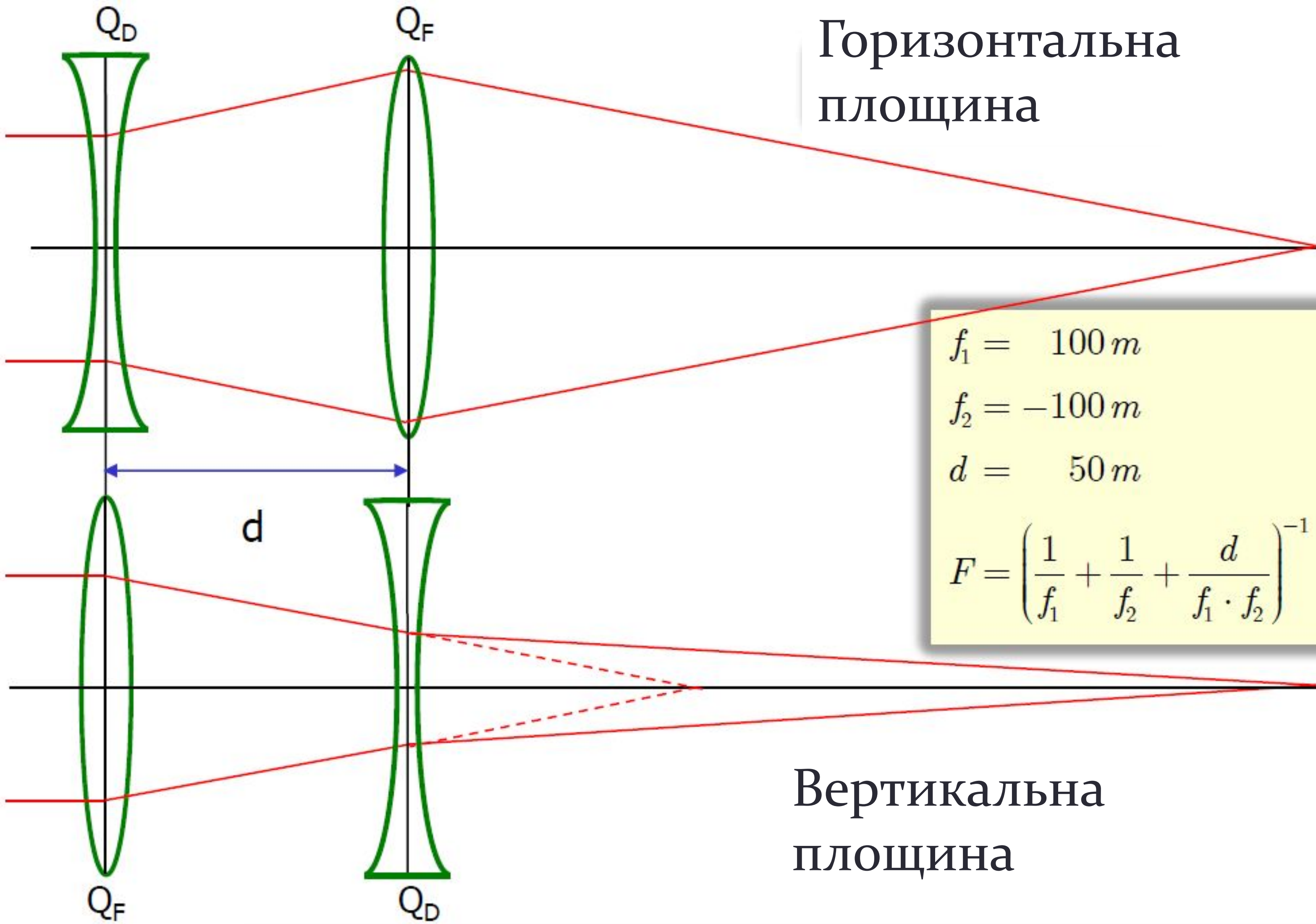
$$B_x(x) = g_Q \cdot z$$





Фокусування

Фокусування квадруполями



$$f_1 = 100\,m$$

$$f_2 = -100\,m$$

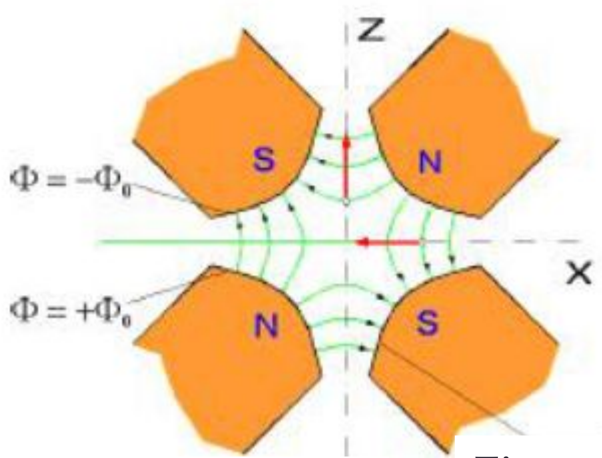
$$d = 50\,m$$

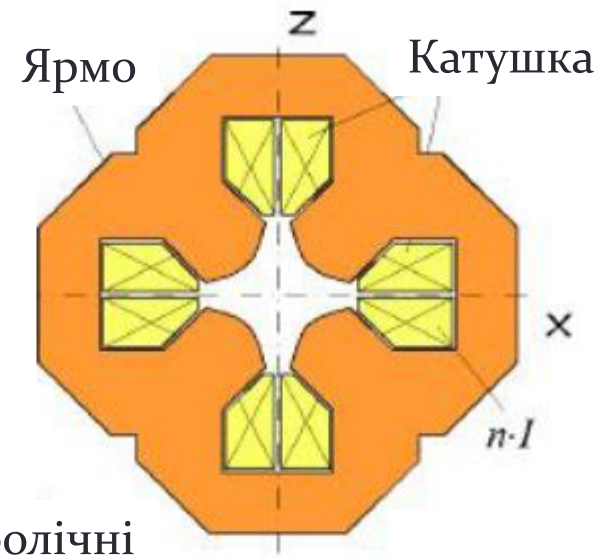
$$F = \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 \cdot f_2}\right)^{-1} = 200\,m$$

Квадруполь

Квадрупольний магніт – **фокусуючі лінзи** в одній площині і **дефокусуючі** – в іншій

Квадрупольний магніт продукує поле з постійним градієнтом.





Гіперболічні поверхні полюсів

В середині магніта

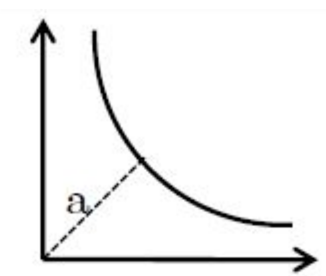
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$B_x = g_Q \cdot z$$

$$B_z = g_Q \cdot x$$

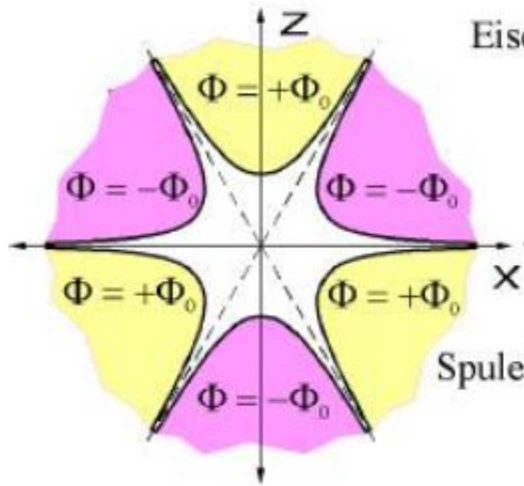
$$g_Q = \frac{2\mu_0 n I}{a^2}$$

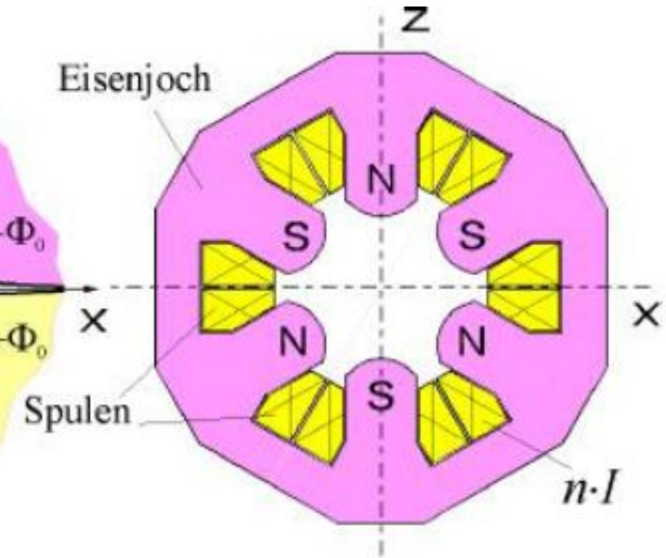
a - радіус гіперболічного полюсного башмака



Секступоль

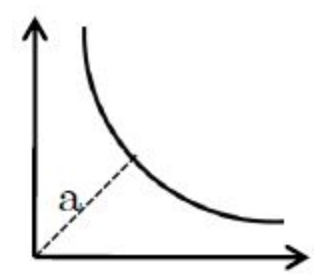
Використовується для корекції ахроматичних спотворень. Секступоль діє як квадруполь з фокусною силою, яка пропорційна зміщенню замкненої орбіти від секступольного центру





$$B_x = g_S \cdot xz \qquad \text{with } g_S = \frac{6\mu_0 nI}{a^3}$$

$$B_z = \frac{1}{2} g_S \cdot \left(x^2 - z^2\right)$$



$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ Зберігається

$$\vec{B} = (B_x, B_z, 0)$$

$$B_z \rho = \frac{p}{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{e}{p} B_z(x, z, s)$$

Розклад в ряд Тейлора

$$B_z(x) = B_{z0} + \frac{dB_z}{dx} x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 B_z}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 B_z}{dx^3} x^3 + \cdots$$

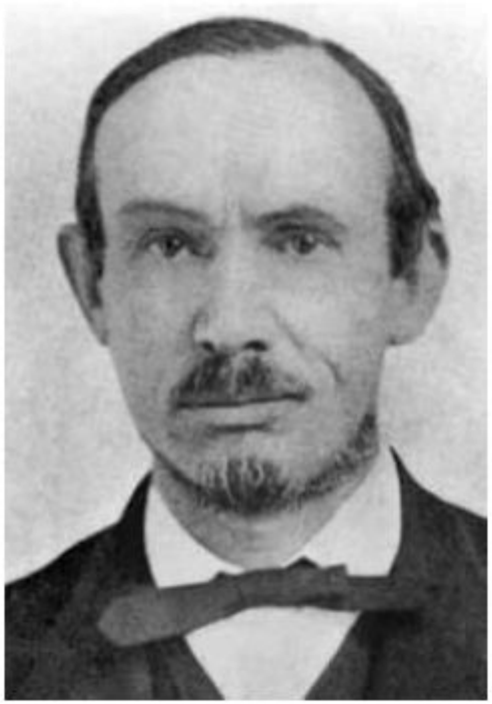
$$\begin{aligned}
\frac{e}{p} B_z(x) &= \frac{e}{p} B_{z0} + \frac{e}{p} \frac{dB_z}{dx} x + \frac{1}{2!} \frac{e}{p} \frac{d^2 B_z}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{e}{p} \frac{d^3 B_z}{dx^3} x^3 + \cdots \\
&= \frac{1}{\rho} + kx + \frac{1}{2!} m x^2 + \frac{1}{3!} o x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Dipole Quadrupole Sextupole Octupole

Multipole	Defintion	Used for
Dipole	$\frac{1}{\rho} = \frac{e}{p} B_{z0}$	Bending
Quadrupole	$k = \frac{e}{p} \frac{dB_z}{dx}$	Focusing
Sextupole	$m = \frac{e}{p} \frac{d^2 B_z}{dx^2}$	Correcting chromaticity
Octupole	$o = \frac{e}{p} \frac{d^3 B_z}{dx^3}$	Correct ing field errors
...		

Диполь і квадруполь – лінійна магнітна оптика

Рівняння Хілла



George William Hill
* 3 March 1838, New York, NY
† 16 April 1914, New York, NY

Розвинув теорію орбіт Юпітера і Сатурна

Дослідив гравітаційні ефекти впливу руху планет на Місяць – вирішував задачу 4 тіл

Диференційні рівняння з періодичними інтегралами

$$x''(s) + \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)\right) x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$z''(s) + k(s)\, z(s) = 0$$

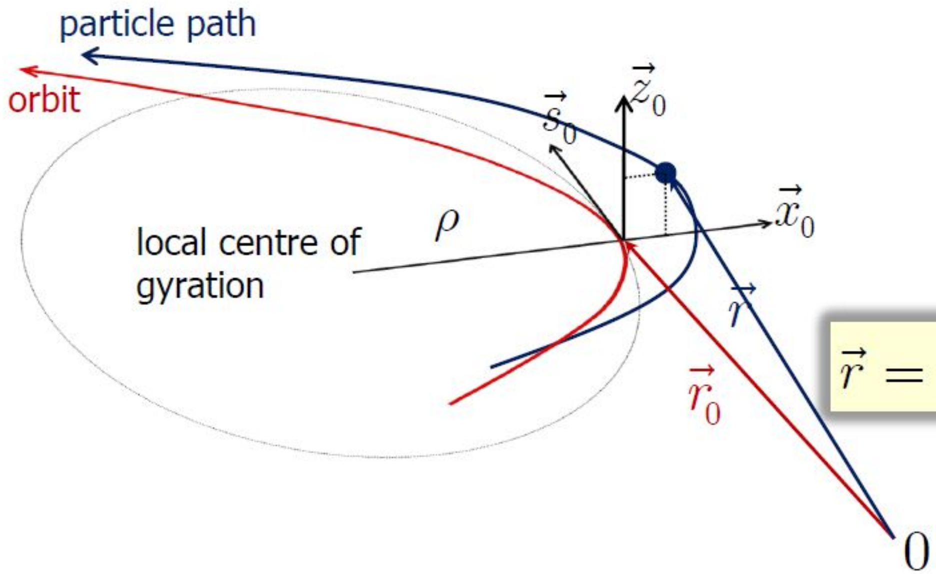
$$x''(s) + K_x(s) x(s) = 0$$

$$z''(s) + K_z(s) z(s) = 0$$

Рівняння періодичного поперечного руху частинок пучку з номінальним імпульсом p_0

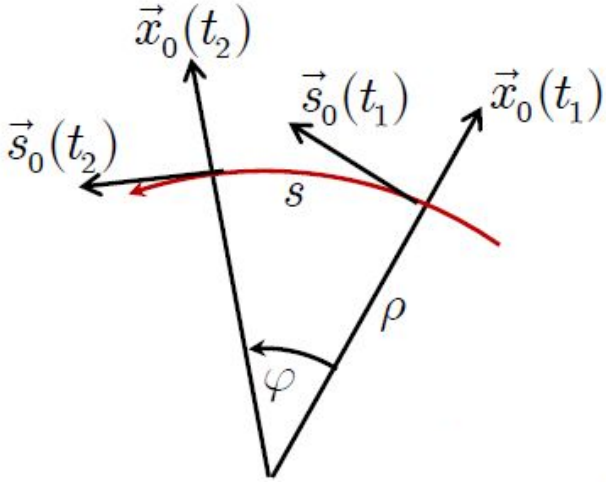
Co-moving Coordinates

Координати в системі орбітального руху пучка



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x \cdot \vec{x}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

$$\dot{\vec{x}}_0, \dot{\vec{z}}_0, \dot{\vec{s}}_0, \dot{\vec{r}}_0 \neq \vec{0}$$



$$\begin{aligned}\vec{x}_0(t_2) &= \vec{x}_0(t_1)\cos\varphi + \vec{s}_0(t_1)\sin\varphi \\ \vec{s}_0(t_2) &= -\vec{x}_0(t_1)\sin\varphi + \vec{s}_0(t_1)\cos\varphi\end{aligned}$$

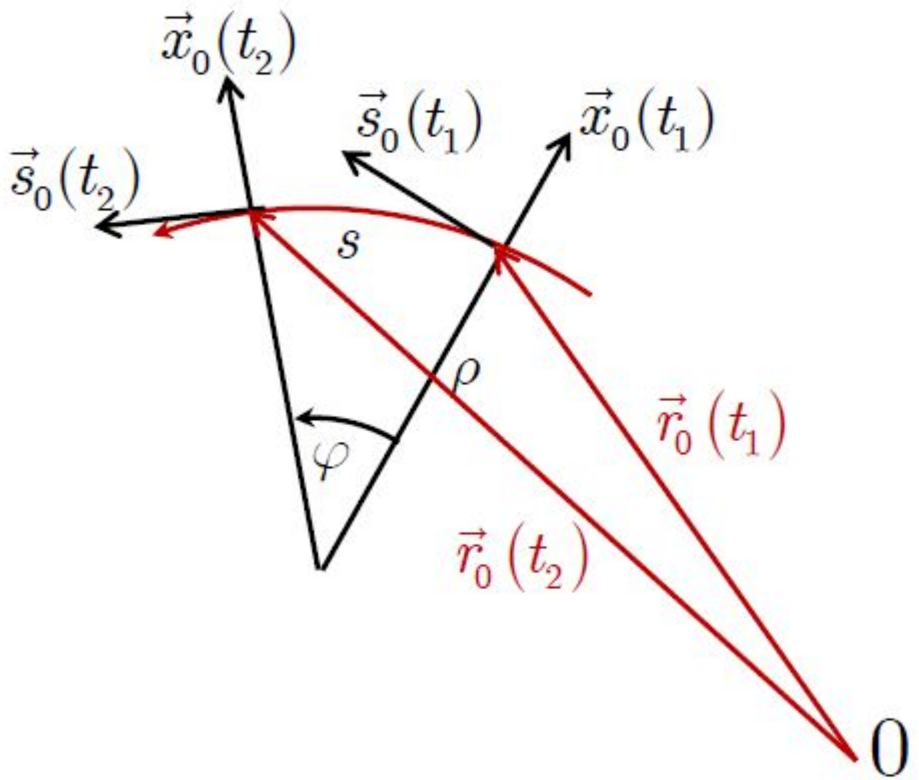
$$\vec{x}_0(t_2) = \vec{x}_0(t_1)\cos\varphi + \vec{s}_0(t_1)\sin\varphi$$
$$\vec{s}_0(t_2) = -\vec{x}_0(t_1)\sin\varphi + \vec{s}_0(t_1)\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{s}_0}{d\varphi} = -\vec{x}_0 \qquad \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi} = \vec{s}_0$$

$$ds = \rho\, d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\Downarrow$$

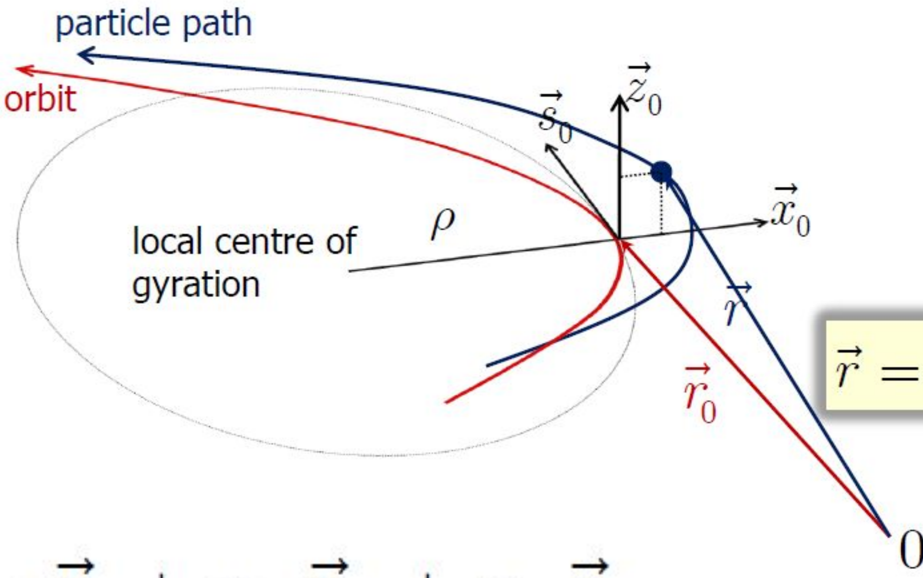
$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}\dot{s}\vec{s}_0 \qquad \dot{\vec{s}}_0 = \frac{d\vec{s}_0}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\rho}\dot{s}\vec{x}_0 \qquad \dot{\vec{z}}_0 = 0$$



$$d\vec{r}_0 = ds \cdot \vec{s}_0$$

Поділимо ліву і праву частини на dt

$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{s} \cdot \vec{s}_0$$



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x \cdot \vec{x}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x \cdot \vec{x}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{x}\vec{x}_0 + x\dot{\vec{x}}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 + z\dot{\vec{z}}_0$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{s}\vec{s}_0 + \dot{x}\vec{x}_0 + \frac{x}{\rho}\dot{s}\vec{s}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$$

$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{s} \cdot \vec{s}_0$$

$$\dot{\vec{z}}_0 = 0$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}\dot{s}\vec{s}_0$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{s}\vec{s}_0 + \dot{x}\vec{x}_0 + \frac{x}{\rho}\dot{s}\vec{s}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}\vec{s}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{x} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right]\vec{x}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 + \left[\frac{2}{\rho}\dot{x}\dot{s} + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\ddot{s}\right]\vec{s}_0$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}\dot{s}\vec{s}_0 \qquad \dot{\vec{s}}_0 = \frac{d\vec{s}_0}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\rho}\dot{s}\vec{x}_0 \qquad \dot{\vec{z}}_0 = 0$$

Зробимо заміну:

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \equiv x'\dot{s} \qquad \ddot{x} = \dot{x}'\dot{s} + x'\ddot{s} = x''\dot{s}^2 + x'\ddot{s}$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt} \equiv z'\dot{s} \qquad \ddot{z} = \dot{z}'\dot{s} + z'\ddot{s} = z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}\vec{s}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{x} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right]\vec{x}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 + \left[\frac{2}{\rho}\dot{x}\dot{s} + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\ddot{s}\right]\vec{s}_0$$

$$\dot{\vec{r}} = x'\dot{s}\vec{x}_0 + z'\dot{s}\vec{z}_0 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}\vec{s}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left[x''\dot{s}^2 - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right]\vec{x}_0 + \left(z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s}\right)\vec{z}_0 + \left[\frac{2}{\rho}x'\dot{s}^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\ddot{s}\right]\vec{s}_0$$

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_z, 0)$$

$$F_x = e\left(v_y B_z - v_z B_y\right)$$
$$F_y = e\left(v_z B_x - v_x B_z\right)$$
$$F_z = e\left(v_x B_y - v_y B_x\right)$$

$$\dot{\vec{r}} = x'\dot{s}\vec{x}_0 + z'\dot{s}\vec{z}_0 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}\vec{s}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\begin{pmatrix} \dot{r}_z B_s - \dot{r}_s B_z \\ \dot{r}_s B_x - \dot{r}_x B_s \\ \dot{r}_x B_z - \dot{r}_z B_x \end{pmatrix} = \frac{e}{m}\begin{pmatrix} -\dot{r}_s B_z \\ \dot{r}_s B_x \\ \dot{r}_x B_z - \dot{r}_z B_x \end{pmatrix} = \frac{e}{m}\begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}B_z \\ \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}B_x \\ x'\dot{s}B_z - z'\dot{s}B_x \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}$$

$$\left[x''\dot{s}^2 - \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right]\vec{x}_0 + \left(z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s}\right)\vec{z}_0 + \left[\frac{2}{\rho}x'\dot{s}^2 + \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\ddot{s}\right]\vec{s}_0$$

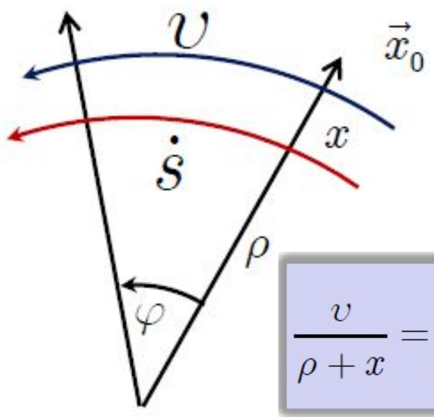
$$\frac{e}{m}\begin{pmatrix} -\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\dot{s}B_z \\ \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\dot{s}B_x \\ x'\dot{s}B_z - z'\dot{s}B_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0: \quad x''\dot{s}^2 + x'\ddot{s} - \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\frac{\dot{s}^2}{\rho} = -\frac{e}{m}B_z\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\dot{s}$$

$$\vec{z}_0: \quad z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s} = \frac{e}{m}B_x\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\dot{s}$$

$$\vec{s}_0: \quad \frac{2}{\rho}x'\dot{s}^2 + \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\ddot{s} = x'\dot{s}B_z - z'\dot{s}B_x$$

Використаємо спрощення $\ddot{s} \approx 0$



$$p = mv$$

$$\frac{\upsilon}{\rho + x} = \frac{\dot{s}}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}$$

$$\vec{x}_0: \quad x''\dot{s}^2 + x'\ddot{s} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\frac{\dot{s}^2}{\rho} = -\frac{e}{m}B_z\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}$$

$$\vec{z}_0: \quad z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s} = \frac{e}{m}B_x\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}$$

Використовуємо наближення

$$\vec{x}_0: \quad x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\frac{1}{\rho} = -\frac{e}{p}B_z\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\vec{z}_0: \quad z'' = \frac{e}{p}B_x\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\vec{x}_0: \quad x'' - \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\frac{1}{\rho} = -\frac{e}{p}B_z\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\vec{z}_0: \qquad z'' = \frac{e}{p}B_x\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\frac{e}{p_0}B_z = \frac{1}{\rho} - kx \qquad \frac{e}{p_0}B_x = -kz$$

У лінійному наближенні (диполі і квадруполі) для частинки на орбіті з номінальним імпульсом p_0

$$p = p_0 + \Delta p \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0+\Delta p} \approx \frac{1}{p_0}\left(1-\frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

$$\vec{x}_0: \quad x'' - \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\frac{1}{\rho} = -\left(\frac{1}{\rho} - kx\right)\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2\left(1-\frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

$$\vec{z}_0: \qquad z'' = -kz\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2\left(1-\frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

$$\vec{x}_0: \quad x'' - \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\frac{1}{\rho} = -\left(\frac{1}{\rho} - kx\right)\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2\left(1-\frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

$$\vec{z}_0: \quad z'' = -kz\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2\left(1-\frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

Використовуємо наближення: $x \ll \rho, \quad z \ll \rho, \quad \frac{\Delta p}{p_0} \ll 1$

Нехтуємо членами другого і вище порядку по x та z, а також $\frac{\Delta p}{p_0}$ по відношенню до 1

$$x''(s) + \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)\right)x(s) = \frac{1}{\rho(s)}\frac{\Delta p}{p_0}$$

$$z''(s) + k(s)\,z(s) = 0$$

$$x''(s) + \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)\right) x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$z''(s) + k(s)\, z(s) = 0$$

Це фундаментальна система рівнянь лінійної оптики пучків, диференційні рівняння 2-го порядку – очікується тип осцилюючих функцій

$$x''(s) + K_x(s) x(s) = 0$$

$$z''(s) + K_z(s) z(s) = 0$$

Система рівнянь Хілла – для випадку руху частинки по орбіті (p=p_0)

Система рівнянь Хілла – для випадку руху частинки по орбіті ($p=p_0$)

$$x''(s) + K_x(s)x(s) = 0$$

$$z''(s) + K_z(s)z(s) = 0$$

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)$$

$$K_z(s) = k(s)$$

Лінійні рівняння з залежними від s коефіцієнтами – гармонічний осцилятор з частотою, яка залежить від часу

В прискорювальному кільці, або транспортній лінії з симетріями коефіцієнти періодичні

Не можливо на даний момент отримати аналітичний розв'язок для загального випадку