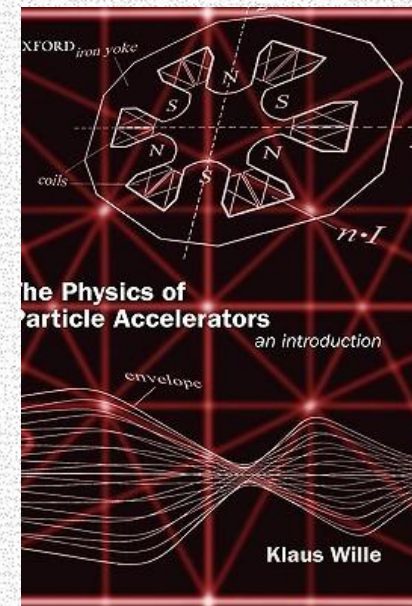
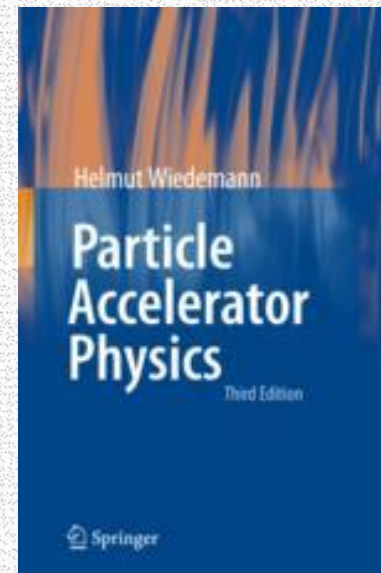
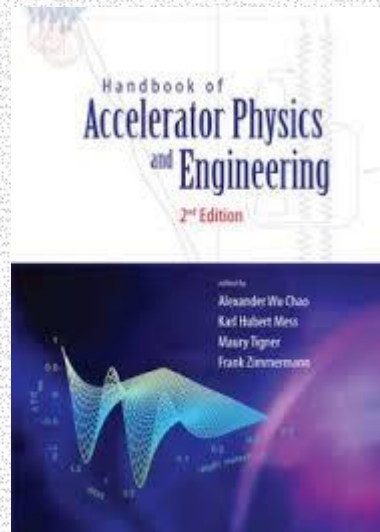
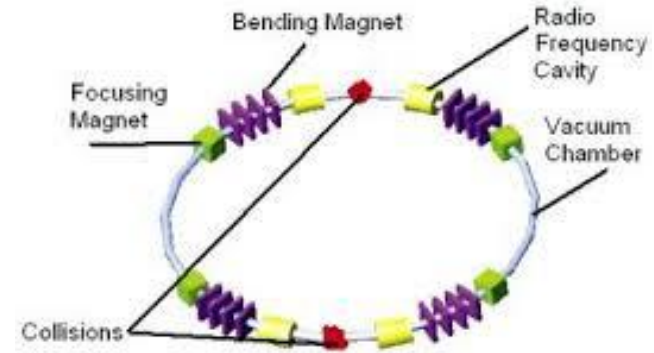
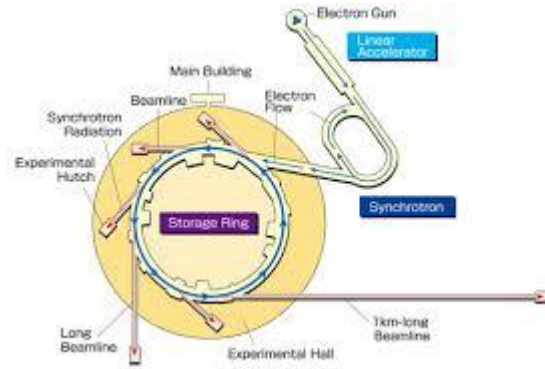


# ФІЗИКА ПРИСКОРЮВАЧІВ

Лекція №2  
ВСТУП

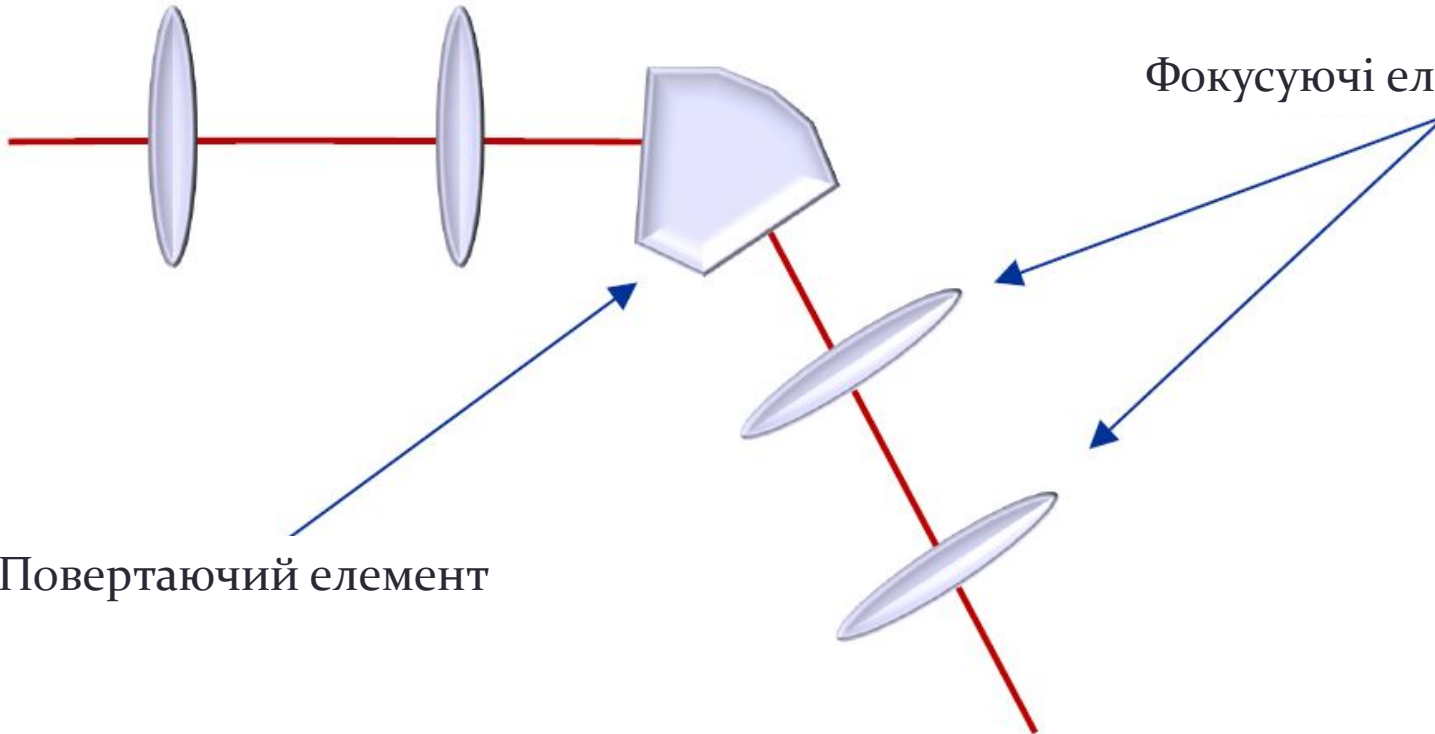


PD Dr. HP Beck / HS 2007



Фокусуєчі елементи

Повертаючий елемент



$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$v \approx c$$



$$|\vec{E}| = c |\vec{B}|$$

$$B = 1 \text{ T}$$



$$E = 3 \cdot 10^8 \text{ V/m}$$

??!!



Для релятивістських енергій використовують тільки магнітні поля для управління (повертання, фокусування) пучками частинок

**Квадруполь**



**Дипольний магніт**

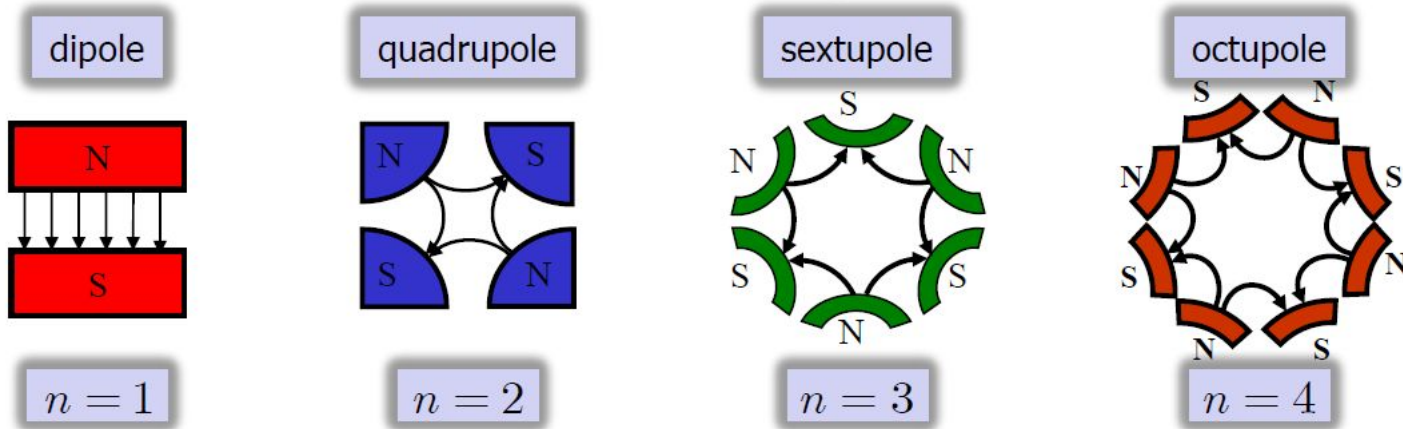


**Секступоль**



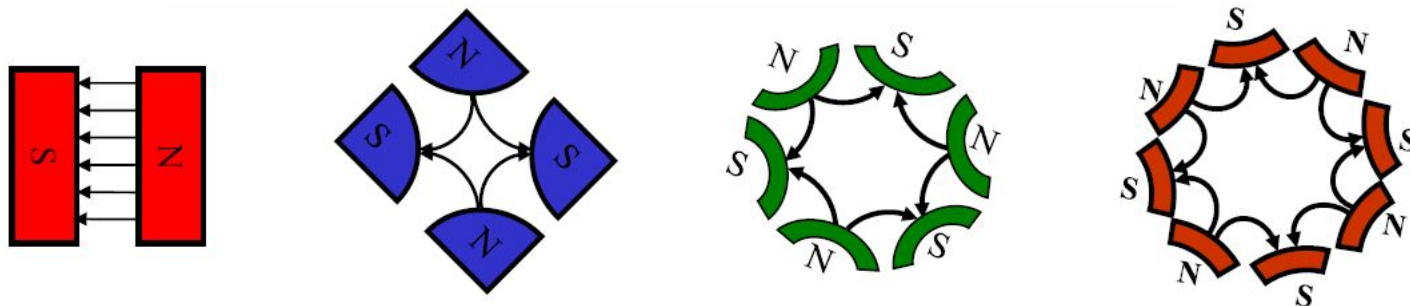
# 2n-польні магніти

Дія в горизонтальній площині



обертання на  $\pi/n$  – інверсна дія

Дія в вертикальній площині (обертання на  $\pi/2n$ )

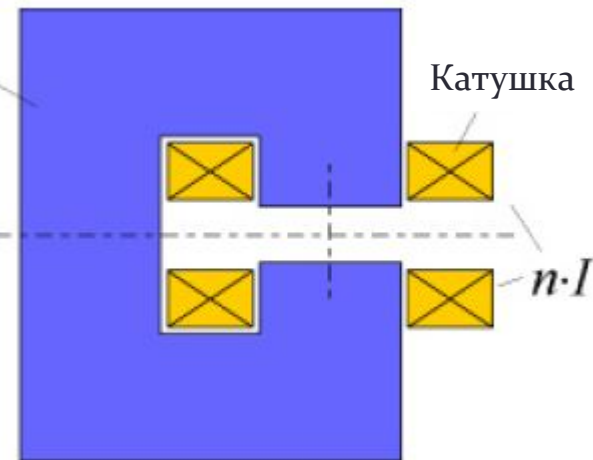
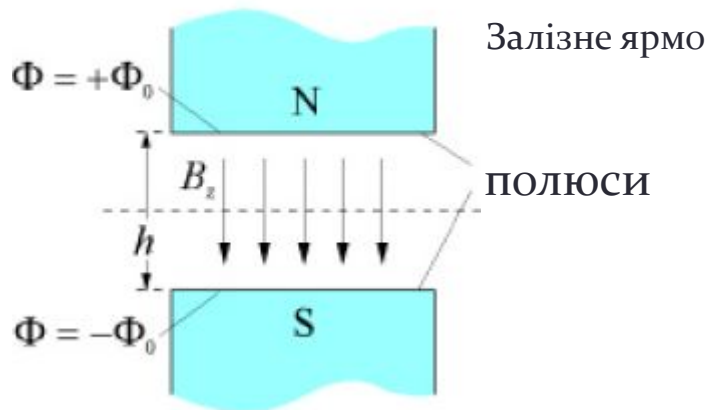


# Диполь

$$B_x = 0$$

$$B_z = g_D$$

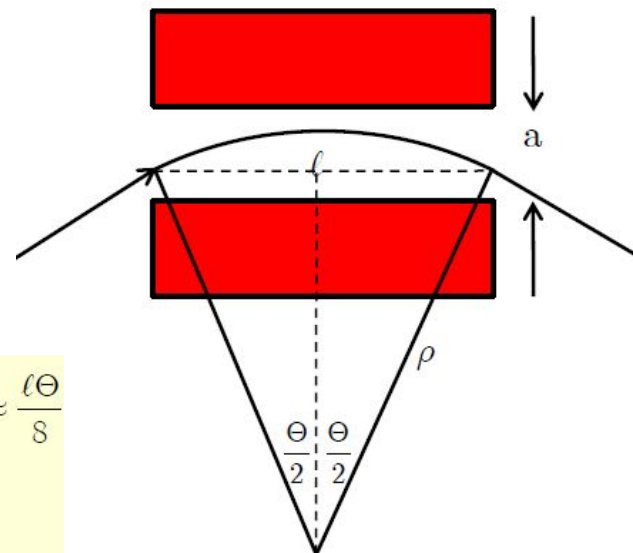
$$g_D = \frac{\mu_0 n I}{h}$$



$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{\ell}{2\rho} = \frac{\ell B}{2(B\rho)} = \frac{\ell B}{2(p/e)} = e \frac{\ell B}{2p}$$

$$\Theta \approx \frac{e\ell B}{p}$$

Апертура  $a$   
повинна бути  
достатньою для  
проходження  
поворотної дуги

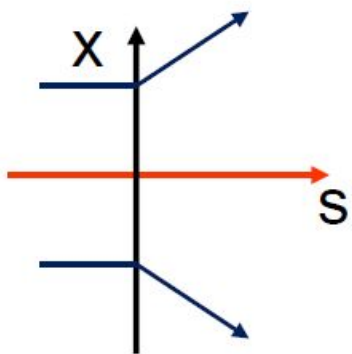
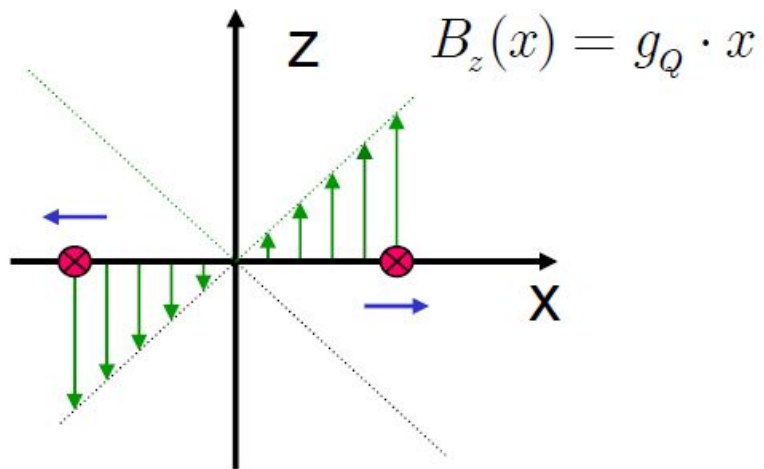


Апертура  $a$  повинна бути  
великою для малих імпульсів -  
тому потрібен початковий  
інжектор

$$a > \rho \left( 1 - \cos \frac{\Theta}{2} \right) \approx \rho \frac{\Theta^2}{8} \approx \frac{\ell \Theta}{8}$$

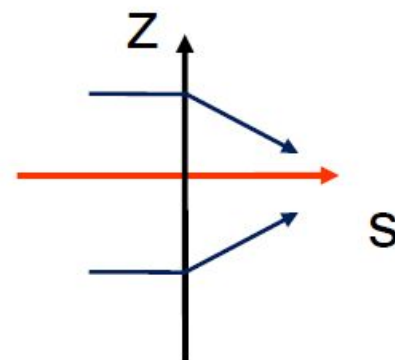
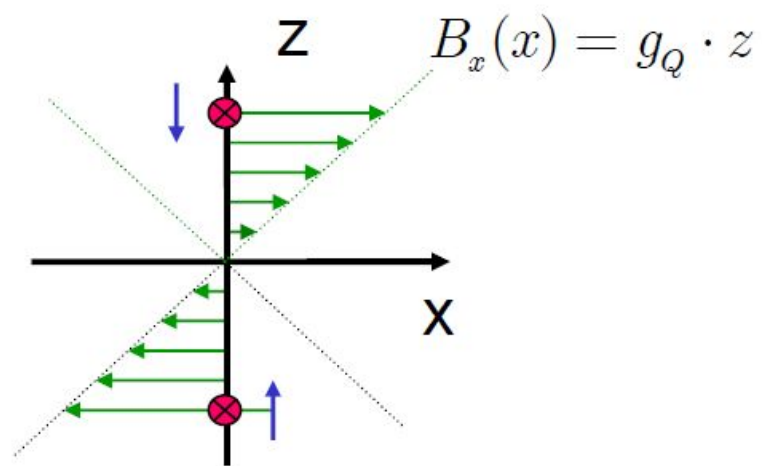
$$> \frac{e\ell^2 B}{8p}$$

# Горизонтальна площина



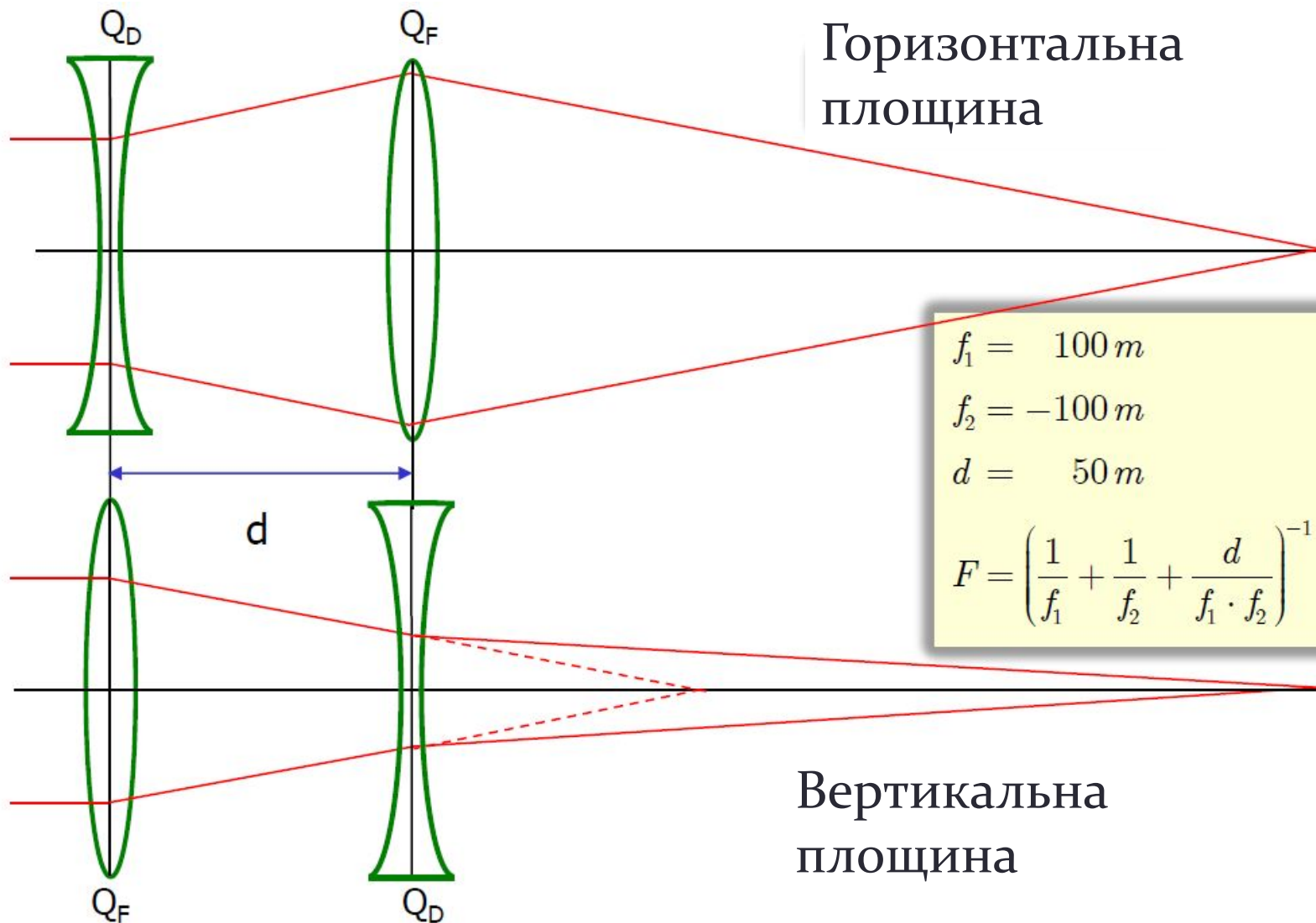
Дефокусування

# Вертикальна площина



Фокусування

# Фокусування квадруполями





# Квадруполь

Квадрупольний магніт – фокусуючі лінзи в одній площині і дефокусуючі – в іншій

Квадрупольний магніт продукує поле з постійним градієнтом.

В середині магніта

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$



$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

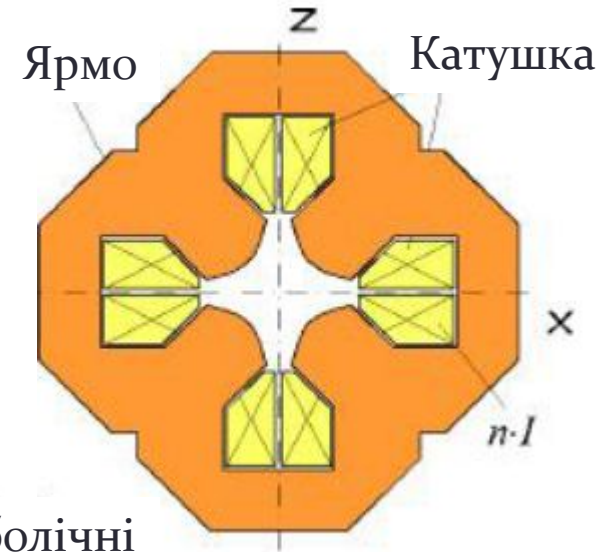
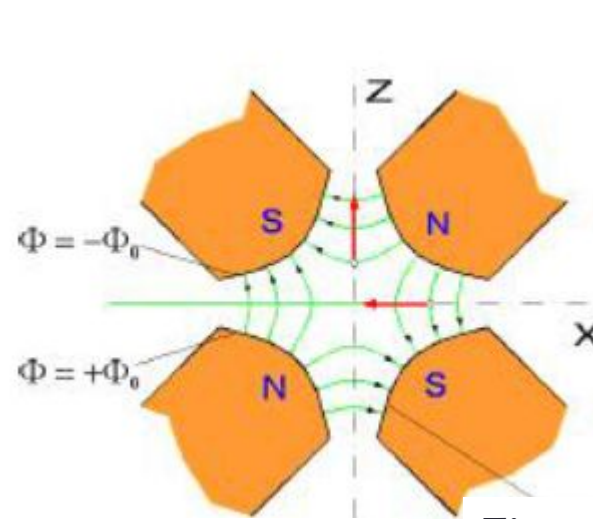
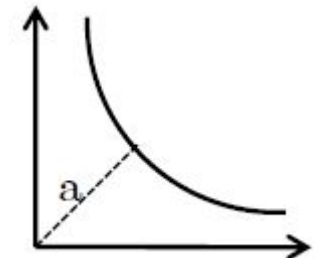
Гіперболічні поверхні полюсів

$$B_x = g_Q \cdot z$$

$$B_z = g_Q \cdot x$$

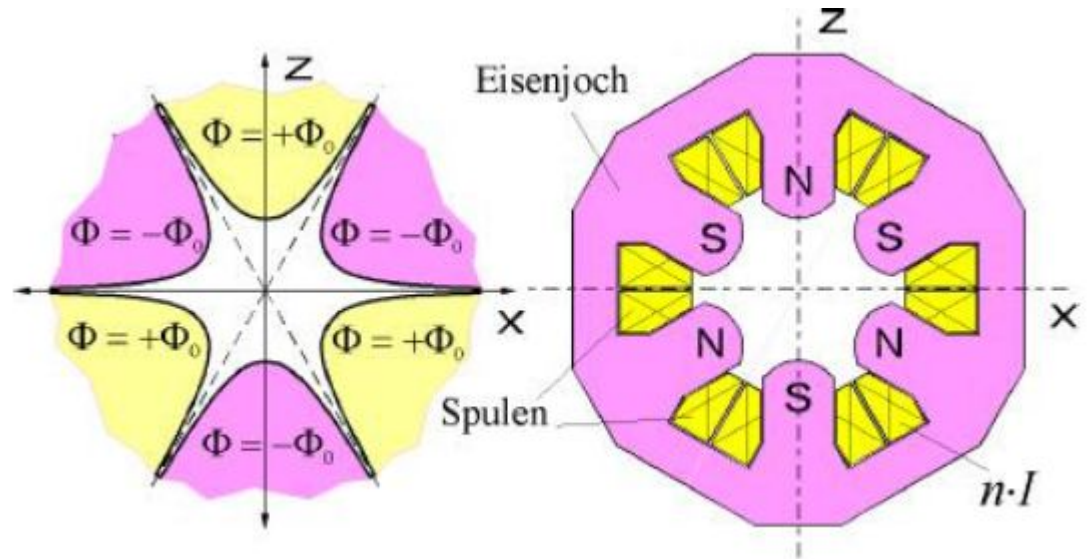
$$g_Q = \frac{2\mu_0 n I}{a^2}$$

$a$  - радіус гіперболічного полюсного башмака



# Секступоль

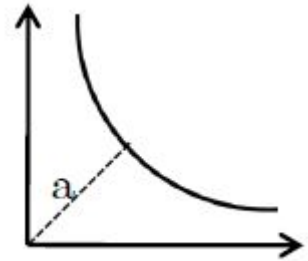
Використовується для корекції ахроматичних спотворень. Секступоль діє як квадруполь з фокусною силою, яка пропорційна зміщенню замкненої орбіти від секступольного центру



$$B_x = g_S \cdot xz$$

$$\text{with } g_S = \frac{6\mu_0 nI}{a^3}$$

$$B_z = \frac{1}{2} g_S \cdot (x^2 - z^2)$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \text{Зберігається}$$

$$\vec{B} = (B_x, B_z, 0)$$

$$B_z \rho = \frac{p}{e} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{e}{p} B_z(x, z, s)$$

Розклад в ряд Тейлора

$$B_z(x) = B_{z0} + \frac{dB_z}{dx} x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 B_z}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 B_z}{dx^3} x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{e}{p} B_z(x) &= \frac{e}{p} B_{z0} + \frac{e}{p} \frac{dB_z}{dx} x + \frac{1}{2!} \frac{e}{p} \frac{d^2 B_z}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{e}{p} \frac{d^3 B_z}{dx^3} x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{\rho} + kx + \frac{1}{2!} mx^2 + \frac{1}{3!} ox^3 + \dots \end{aligned}$$

Dipole

Quadrupole

Sextupole

Octupole

Multipole	Defintion	Used for
Dipole	$\frac{1}{\rho} = \frac{e}{p} B_{z0}$	Bending
Quadrupole	$k = \frac{e}{p} \frac{dB_z}{dx}$	Focusing
Sextupole	$m = \frac{e}{p} \frac{d^2 B_z}{dx^2}$	Correcting chromaticity
Octupole	$o = \frac{e}{p} \frac{d^3 B_z}{dx^3}$	Correct ing field errors
...		

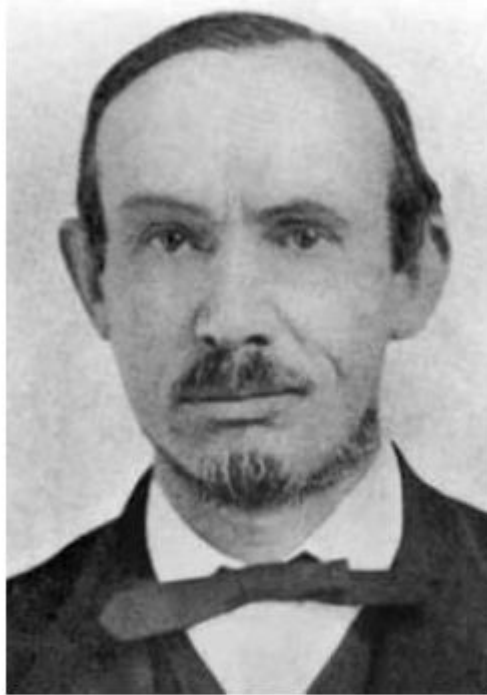
**Диполь і квадруполь – лінійна магнітна оптика**

# Рівняння Хілла

Розвинув теорію орбіт Юпітера і Сатурна

Дослідив гравітаційні ефекти впливу руху планет на Місяць – вирішував задачу 4 тіл

Диференціальні рівняння з періодичними інтегралами



**George William Hill**

\* 3 March 1838, New York, NY

† 16 April 1914, New York, NY

Рівняння періодичного поперечного руху частинок пучку з номінальним імпульсом  $p_0$

$$x''(s) + \left( \frac{1}{\rho^2(s)} - k(s) \right) x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0}$$

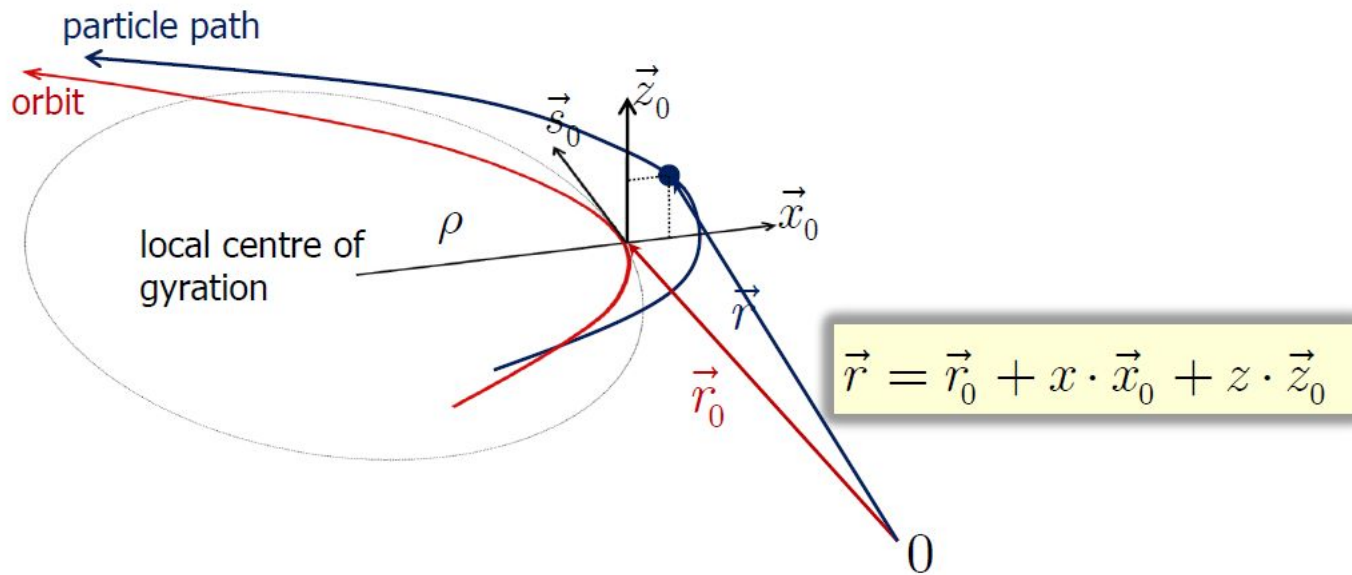
$$z''(s) + k(s) z(s) = 0$$

$$x''(s) + K_x(s)x(s) = 0$$

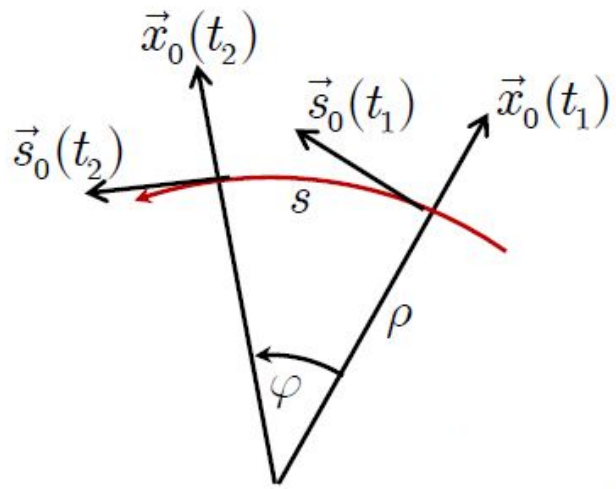
$$z''(s) + K_z(s)z(s) = 0$$

# Co-moving Coordinates

## Координати в системі орбітального руху пучка



$$\dot{\vec{x}}_0, \dot{\vec{z}}_0, \dot{\vec{s}}_0, \dot{\vec{r}}_0 \neq \vec{0}$$



$$\vec{x}_0(t_2) = \vec{x}_0(t_1) \cos \varphi + \vec{s}_0(t_1) \sin \varphi$$

$$\vec{s}_0(t_2) = -\vec{x}_0(t_1) \sin \varphi + \vec{s}_0(t_1) \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_0(t_2) &= \vec{x}_0(t_1) \cos \varphi + \vec{s}_0(t_1) \sin \varphi \\ \vec{s}_0(t_2) &= -\vec{x}_0(t_1) \sin \varphi + \vec{s}_0(t_1) \cos \varphi\end{aligned}$$



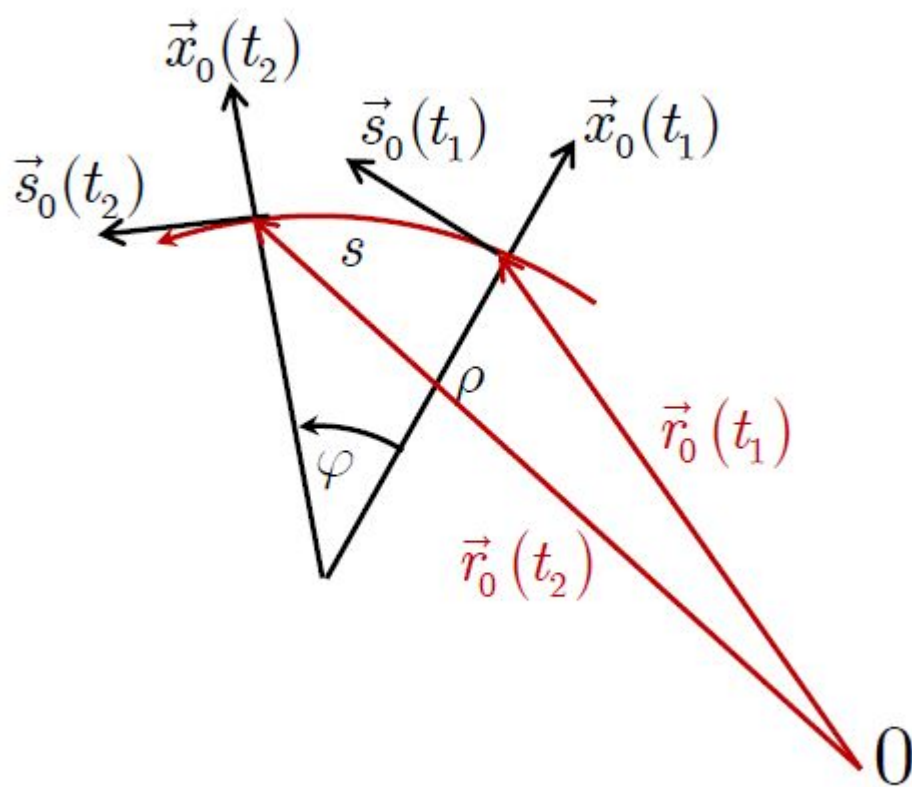
$$\frac{d\vec{s}_0}{d\varphi} = -\vec{x}_0 \quad \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi} = \vec{s}_0$$

$$ds = \rho d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt}$$

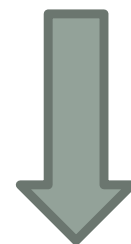


$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \dot{s} \vec{s}_0 \quad \dot{\vec{s}}_0 = \frac{d\vec{s}_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\rho} \dot{s} \vec{x}_0 \quad \dot{\vec{z}}_0 = 0$$



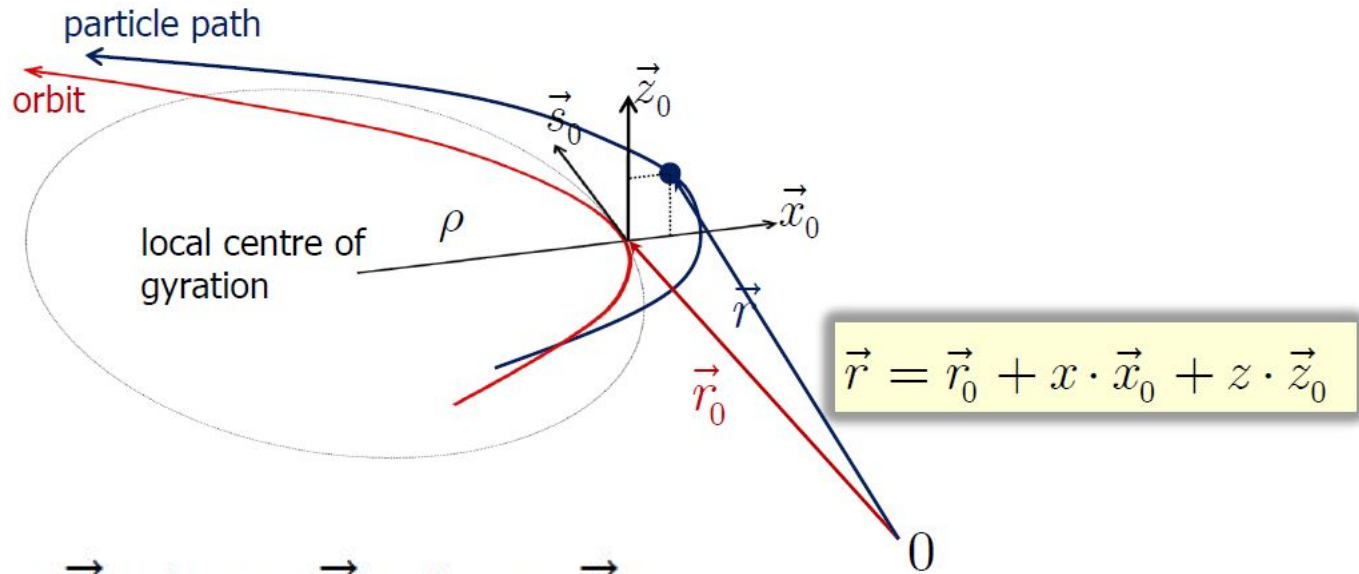


$$d\vec{r}_0 = ds \cdot \vec{s}_0$$



Поділимо ліву і  
праву частини  
на  $dt$

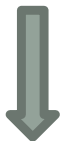
$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{s} \cdot \vec{s}_0$$



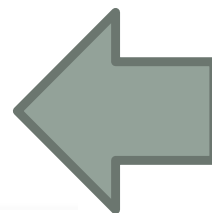
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x \cdot \vec{x}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$



$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{x}\vec{x}_0 + x\dot{\vec{x}}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 + z\dot{\vec{z}}_0$$



$$\dot{\vec{r}} = \dot{s}\vec{s}_0 + \dot{x}\vec{x}_0 + \frac{x}{\rho}\dot{s}\vec{s}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$$

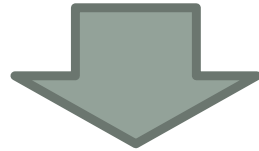


$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{s} \cdot \vec{s}_0$$

$$\dot{z}_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \dot{s}\vec{s}_0$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{s}\vec{s}_0 + \dot{x}\vec{x}_0 + \frac{x}{\rho}\dot{s}\vec{s}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$$



$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\dot{s}\vec{s}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{x} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right]\vec{x}_0 + \ddot{z}\vec{z}_0 + \left[\frac{2}{\rho}\dot{x}\dot{s} + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\ddot{s}\right]\vec{s}_0$$



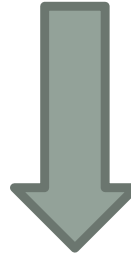
$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{d\vec{x}_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \dot{s}\vec{s}_0$$

$$\dot{\vec{s}}_0 = \frac{d\vec{s}_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\rho} \dot{s}\vec{x}_0$$

$$\dot{\vec{z}}_0 = 0$$

## Зробимо заміну:

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \equiv x' \dot{s} \quad \ddot{x} = \dot{x}' \dot{s} + x'' \dot{s}^2 = x'' \dot{s}^2 + x' \ddot{s}$$
$$\dot{z} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt} \equiv z' \dot{s} \quad \ddot{z} = \dot{z}' \dot{s} + z'' \dot{s}^2 = z'' \dot{s}^2 + z' \ddot{s}$$



$$\dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{x}_0 + \dot{z} \vec{z}_0 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} \vec{s}_0$$
$$\ddot{\vec{r}} = \left[ \ddot{x} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{\dot{s}^2}{\rho} \right] \vec{x}_0 + \ddot{z} \vec{z}_0 + \left[ \frac{2}{\rho} \dot{x} \dot{s} + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \ddot{s} \right] \vec{s}_0$$

$$\dot{\vec{r}} = x' \dot{s} \vec{x}_0 + z' \dot{s} \vec{z}_0 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} \vec{s}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left[ x'' \dot{s}^2 - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{\dot{s}^2}{\rho} \right] \vec{x}_0 + (z'' \dot{s}^2 + z' \ddot{s}) \vec{z}_0 + \left[ \frac{2}{\rho} x' \dot{s}^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \ddot{s} \right] \vec{s}_0$$

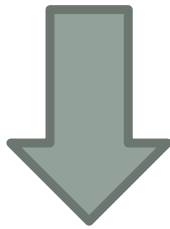
$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$



$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

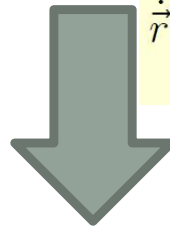
$$\vec{B} = (B_x, B_z, 0)$$



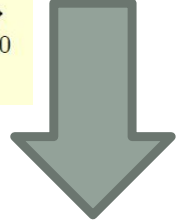
$$F_x = e(v_y B_z - v_z B_y)$$

$$F_y = e(v_z B_x - v_x B_z)$$

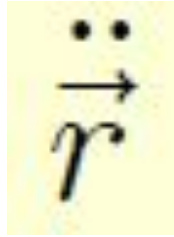
$$F_z = e(v_x B_y - v_y B_x)$$



$$\dot{\vec{r}} = x' \dot{s} \vec{x}_0 + z' \dot{s} \vec{z}_0 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} \vec{s}_0$$

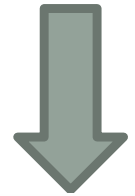


$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} \dot{r}_z B_s - \dot{r}_s B_z \\ \dot{r}_s B_x - \dot{r}_x B_s \\ \dot{r}_x B_z - \dot{r}_z B_x \end{pmatrix} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} -\dot{r}_s B_z \\ \dot{r}_s B_x \\ \dot{r}_x B_z - \dot{r}_z B_x \end{pmatrix} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} B_z \\ \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} B_x \\ x' \dot{s} B_z - z' \dot{s} B_x \end{pmatrix}$$



$$\left[ x''\dot{s}^2 - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{\dot{s}^2}{\rho} \right] \vec{x}_0 + (z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s}) \vec{z}_0 + \left[ \frac{2}{\rho} x'\dot{s}^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \ddot{s} \right] \vec{s}_0$$

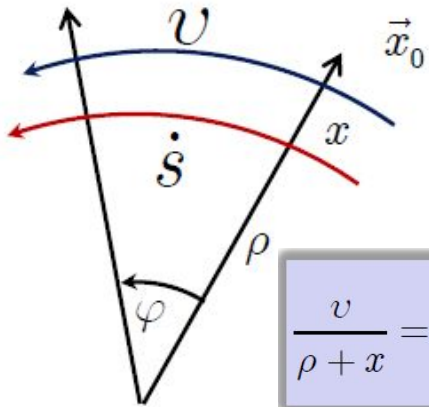
$$\frac{e}{m} \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} B_z \\ \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} B_x \\ x'\dot{s} B_z - z'\dot{s} B_x \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \vec{x}_0: \quad & x''\dot{s}^2 + x'\ddot{s} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{\dot{s}^2}{\rho} = -\frac{e}{m} B_z \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} \\ \vec{z}_0: \quad & z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s} = \frac{e}{m} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s} \\ \vec{s}_0: \quad & \frac{2}{\rho} x'\dot{s}^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \ddot{s} = x'\dot{s} B_z - z'\dot{s} B_x \end{aligned}$$

Використаємо спрощення

$$\ddot{s} \approx 0$$



$$p = mv$$

$$\frac{v}{\rho + x} = \frac{\dot{s}}{\rho} \Rightarrow v = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s}$$

$$\vec{x}_0: x'' \dot{s}^2 + x' \ddot{s} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{\dot{s}^2}{\rho} = -\frac{e}{m} B_z \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s}$$

$$\vec{z}_0: z'' \dot{s}^2 + z' \ddot{s} = \frac{e}{m} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \dot{s}$$

Використовуємо наближення

$$\vec{x}_0: x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = -\frac{e}{p} B_z \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\vec{z}_0: z'' = \frac{e}{p} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\vec{x}_0: \quad x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = -\frac{e}{p} B_z \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\vec{z}_0: \quad z'' = \frac{e}{p} B_x \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\frac{e}{p_0} B_z = \frac{1}{\rho} - kx$$

$$\frac{e}{p_0} B_x = -kz$$

← У лінійному наближенні (диполі і квадруполі) для частинки на орбіті з номінальним імпульсом  $p_0$

$$p = p_0 + \Delta p$$



$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0 + \Delta p} \approx \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

$$\vec{x}_0: \quad x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = -\left(\frac{1}{\rho} - kx\right) \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

$$\vec{z}_0: \quad z'' = -kz \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$



$$\vec{x}_0: \quad x'' - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} = - \left(\frac{1}{\rho} - kx\right) \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

$$\vec{z}_0: \quad z'' = -kz \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

Використовуємо наближення:  $x \ll \rho$ ,  $z \ll \rho$ ,  $\frac{\Delta p}{p_0} \ll 1$

Нехтуємо членами другого і вище порядку по  $x$  та  $z$ , а також  $\frac{\Delta p}{p_0}$  по відношенню до 1



$$x''(s) + \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)\right) x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$z''(s) + k(s) z(s) = 0$$

$$x''(s) + \left( \frac{1}{\rho^2(s)} - k(s) \right) x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$z''(s) + k(s) z(s) = 0$$



Це фундаментальна система рівнянь лінійної оптики пучків, диференціальні рівняння 2-го порядку – очікується тип осцилюючих функцій

$$x''(s) + K_x(s)x(s) = 0$$

$$z''(s) + K_z(s)z(s) = 0$$

Система рівнянь Хілла –  
для випадку руху  
частинки по орбіті ( $p=p_0$ )

## Система рівнянь Хілла – для випадку руху частинки по орбіті ( $p=p_0$ )

$$x''(s) + K_x(s)x(s) = 0$$

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)$$

$$z''(s) + K_z(s)z(s) = 0$$

$$K_z(s) = k(s)$$

Лінійні рівняння з залежними від  $s$  коефіцієнтами – гармонічний осцилятор з частотою, яка залежить від часу

В прискорювальному кільці, або транспортній лінії з симетріями коефіцієнти періодичні

Не можливо на даний момент отримати аналітичний розв'язок для загального випадку