

**Определение.** Систему  $n$  случайных величин называют  $n$ -мерной (многомерной) случайной величиной или случайным вектором  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Ее можно интерпретировать как случайную точку или случайный вектор в  $n$ -мерном пространстве.

Многомерная СВ есть функция элементарного события  $\omega$ :  $(X_1, X_2, \dots, X_n) = \varphi(\omega)$ . Каждому элементарному событию  $\omega$  ставится в соответствие  $n$  действительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – значения, принятые случайными величинами  $X_1, X_2, \dots, X_n$  в результате опыта. Вектор  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется реализацией случайного вектора  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Полной характеристикой  $n$ -мерной СВ является  $n$ -мерный закон распределения, который может быть задан функцией распределения или плотностью вероятности.

**Определение.** Функцией распределения  $n$ -мерной случайной величиной  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  называется вероятность выполнения  $n$  неравенств вида  $X_i < x_i$ :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}.$$

Функция распределения  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  обладает такими же свойствами, как и функция распределения двух СВ  $F(x, y)$ . В частности, она принимает значения на отрезке  $[0, 1]$ ;  $F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$ ,  $F(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = 0$ ; функцию распределения любой частной системы из случайных величин, входящих в систему, можно получить, если положить все остальные аргументы  $n$ -мерной функции распределения равными бесконечности, например,  $F_2(x_2) = F(\infty, x_2, \dots, \infty)$ .

**Определение.** Плотностью распределения непрерывной  $n$ -мерной СВ  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  называется  $n$ -я смешанная частная производная её функции распределения, взятая один раз по каждому аргументу:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Плотность определения обладает следующими свойствами:

1) положительная определенность:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ ;

2) условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$ ;

3) плотности распределения меньшего порядка определяются путем интегрирования  $n$ -мерной плотности по ненужным переменным.

Например, одномерная плотность распределения СВ  $X_k$  равна

$$f_k(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$$

4) Функция распределения  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  выражается через плотность вероятности  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -кратным интегралом

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

5) Вероятность попадания случайной точки  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  в область  $D$  из  $n$ -мерного пространства равна  $n$ -кратному интегралу по этой области:

$$P\{(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = \int \int \dots \int_{(D)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

**Необходимым и достаточным условием взаимной независимости случайных величин, входящих в  $n$ -мерную СВ, является равенство**

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_n(x_n);$$

для непрерывной  $n$ -мерной СВ:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n).$$

Основными **числовыми характеристиками**  $n$ -мерной случайной величиной  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  являются:

- 1) математические ожидания составляющих  $X_i$ :  $m_i = M[X_i], i = \overline{1, n}$ ;
- 2) дисперсии составляющих  $X_i$ :  $D_i = D[X_i], i = \overline{1, n}$ ;
- 3) ковариации  $K_{ij} = M[\tilde{X}_i \tilde{Y}_j] = M[X_i Y_j] - M[X_i]M[Y_j], i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ .

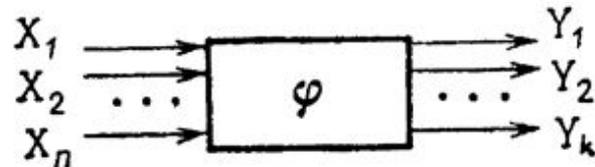
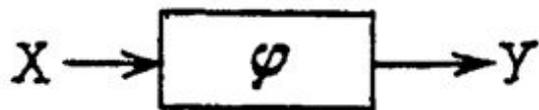
Ковариации  $K_{ij}$  образуют ковариационную матрицу

$$\|K_{ij}\| = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{или, так как } K_{ii} = D_i, \quad \|K_{ij}\| = \begin{bmatrix} D_1 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & D_2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & D_n \end{bmatrix}.$$

Ковариационная матрица является симметрической, так как  $K_{ij} = K_{ji}$ .

В практических применениях теории вероятностей большое место занимают задачи, требующие нахождения законов распределения и числовых характеристик функций случайных величин.

Обычно в инженерных приложениях задача ставится так: на вход технического устройства поступает случайное воздействие  $X$ . Устройство подвергает это воздействие некоторому функциональному преобразованию  $\varphi$ , результатом которого является случайная величина  $Y = \varphi(X)$ . При известном законе распределения СВ  $X$  (или только её числовых характеристик) требуется определить закон распределения (или только числовые характеристики) СВ  $Y$ .



В более сложном случае на вход устройства подается не одно, а несколько случайных воздействий  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , а на выходе снимается несколько случайных величин  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$  (в общем случае  $k \neq n$ ). Требуется, зная закон распределения или только числовые характеристики системы  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , найти закон распределения или только числовые характеристики системы  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ .

Определение. Если каждому возможному значению СВ  $X$  по определенному правилу соответствует одно возможное значение СВ  $Y$ , то  $Y$  называется функцией случайного аргумента. Обозначается:  $Y = \varphi(X)$ .

Пусть имеется СВ  $X$  с известным законом распределения. Пусть СВ  $X$  подвергается детерминированному преобразованию  $\varphi$ . В результате будем иметь новую СВ  $Y$ , связанную с  $X$  функциональной зависимостью:  $Y = \varphi(X)$ .

**1. Пусть аргумент  $X$  - дискретная случайная величина с возможными значениями  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , вероятности которых соответственно равны  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , т.е.  $p_i = P\{X = x_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .**

Очевидно, что  $Y = \varphi(X)$  – также дискретная случайная величина с возможными значениями  $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), \dots, y_n = \varphi(x_n)$ . Так как событие {величина  $X$  приняла значение  $x_i$ } влечет за собой событие {величина  $Y$  приняла значение  $y_i = \varphi(x_i)$ }, то вероятности возможных значений  $Y$  соответственно равны  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

## ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

Для нахождения закона распределения ДСВ  $Y$  в форме ряда распределения необходимо определить её возможные значения, упорядочить их в порядке возрастания и при определении вероятностей каждого из значений ДСВ  $Y$  учитывать следующее:

а) если различным возможным значениям аргумента  $X$  соответствуют различные возможные значения функции  $Y$ , то вероятности соответствующих значений  $X$  и  $Y$  между собой;

б) если различным возможным значениям  $X$  соответствуют значения  $Y$ , среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений  $Y$ .

*Пример.* ДСВ  $X$  задана рядом распределения

$X$	-2	2	3
$p$	0,3	0,5	0,2

Найти распределение СВ  $Y = X^2$ .

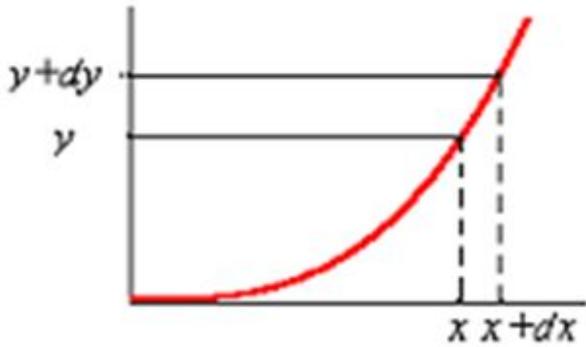
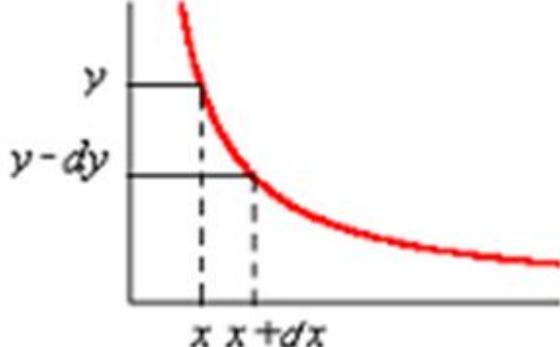
*Решение.* Возможные значения СВ  $Y$ :  $y_1=4$  и  $y_2=9$ . Вероятность значения  $y_1=4$  равна сумме вероятностей несовместных событий  $X=-2$  и  $X=2$ . Вероятность значения  $y_2=9$  равна вероятности события  $X=3$ . Таким образом, для ряда распределения СВ  $Y$  получаем:

$Y$	4	9
$p$	0,8	0,2

# ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

2. Пусть аргумент  $X$  – непрерывная случайная величина. Нахождение плотности распределения СВ  $Y = \varphi(X)$  зависит от того, монотонна или немонотонна функция  $\varphi(x)$ .

1) Пусть функция  $\varphi(x)$  непрерывна, дифференцируема и строго монотонна. Из строгой монотонности  $\varphi(x)$  следует однозначность обратной функция  $x = \psi(y)$ .

Монотонные функции $\varphi(x)$	
	
Строго возрастающая функция	Строго убывающая функция

Пусть  $\varphi(x)$  монотонно возрастает. Рассмотрим интервал  $\Delta x$ , непосредственно примыкающий к точке  $x$ . Изменению аргумента  $X$  в диапазоне  $(x, x + \Delta x)$  соответствует изменение функции в диапазоне  $(y, y + \Delta y)$ .

## ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

При этом вероятность попадания СВ  $Y$  в интервал шириной  $\Delta y$  будет равна вероятности попадания СВ  $X$  в интервал шириной  $\Delta x$ :

$$\int_y^{y+\Delta y} f_y(y)dy = \int_x^{x+\Delta x} f_x(x)dx,$$

т. е. площади соответствующих полос шириной  $\Delta y$  и  $\Delta x$  под кривыми распределений  $f_y(y)$  и  $f_x(x)$  равны между собой. Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ , получаем равенство элементов вероятности:  $f_y(y)dy = f_x(x)dx$ .

$$\text{Отсюда следует: } f_y(y) = f_x(x) \frac{dx}{dy} = f_x[\psi(y)] \frac{d\psi(y)}{dy}. \quad (*)$$

Для **монотонно убывающей функции**  $\varphi(x)$  получим такое же выражение, однако входящая в него производная будет отрицательной, т.е. будем иметь

$$f_y(y) = f_x(x) \frac{dx}{dy} = -f_x[\psi(y)] \frac{d\psi(y)}{dy}. \quad (**)$$

Учитывая, что плотность распределения есть неотрицательная функция, формулы (\*) и (\*\*) можно объединить в одну:

$$f_y(y) = f_x[\psi(y)] \left| \frac{d\psi(y)}{dy} \right|.$$

Здесь  $\psi(y)$  – функция, обратная к  $\varphi(x)$ .

*Пример.* **Линейное преобразования СВ**  $Y = aX + b$ . Плотность распределения СВ  $X$  известна и равна  $f(x)$ . Найти плотность распределения СВ  $Y$ .

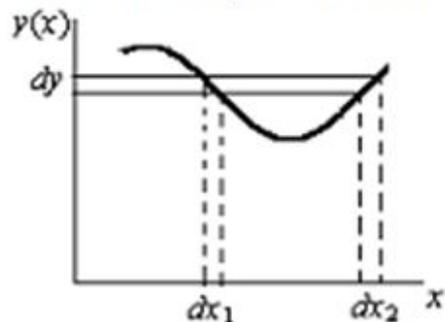
*Решение.* Обратная функция имеет вид  $x = \psi(y) = (y - b)/a$ . Для неё

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = \frac{1}{a}, \quad \left| \frac{d\psi(y)}{dy} \right| = \frac{1}{|a|},$$

и для плотности распределения СВ  $Y$  получаем  $f_y(y) = \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)$ .

Из этого выражения следует, что линейное преобразование не меняет характера распределения.

2) Будем теперь полагать, что **функция преобразования СВ немонотонная**, т.е. обратная функция неоднозначна. В этом случае данному значению  $y$  соответствует несколько значений  $x$ , т.е. обратная функция имеет несколько ветвей.



Обозначим их  $x_k = \psi_k(y)$ . Тогда событию  $A$ , которое состоит в том, что случайная величина  $Y$  попадет в интервал шириной  $\Delta y$ , соответствует несколько несовместных событий  $A_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) – попаданий случайной величины  $X$

на один из участков  $\Delta x_1$  или  $\Delta x_2$ , и т. д., причем безразлично на какой.

Разобьём интервал возможных значений СВ  $X$  на  $k$  участков монотонности и найдем для каждого из них обратную функцию  $\psi_k(y)$ . Плотность распределения СВ  $Y$  на каждом из участков монотонности выражается полученной выше формулой, а для всего интервала возможных значений СВ  $X$  плотность распределения СВ  $Y$  будет равна сумме плотностей распределения на каждом из участков монотонности:

$$f_Y(y) = \sum_k f_X[\psi_k(y)] \left| \frac{\psi_k(y)}{dy} \right|. \quad (*)$$

*Пример.* Квадратичное преобразование СВ  $Y = X^2$ . Найти плотность распределения СВ  $Y$ .

*Решение.* Функция преобразования немонотонная, обратная функция имеет две ветви:  $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$ ;  $\psi_2(y) = \sqrt{y}$ . По формуле (\*) получаем выражение для плотности распределения СВ  $Y$ :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}), \quad (y > 0).$$

Пусть система двух непрерывных СВ  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $f(x, y)$ . Тогда для функции распределения СВ  $Z = \varphi(X, Y)$  имеем

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P\{\varphi(x, y) < z\} = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy,$$

где  $D_z$  – множество точек плоскости  $xOy$ , координаты которых удовлетворяют неравенству  $\varphi(x, y) < z$ . Плотность распределения СВ  $Z$  получаем дифференцированием её функции распределения:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}.$$

Для наиболее важного на практике случая суммы двух случайных величин  $Z = X + Y$  приведем без вывода выражения для плотности распределения СВ  $Z$ :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) dy.$$

Если СВ  $X$  и  $Y$  независимы, то  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$  и

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y) dy.$$

Закон распределения суммы двух независимых СВ называется *композицией* или *сверткой* законов распределения слагаемых.

Задана функция  $Y = \varphi(X)$  случайного аргумента  $X$ . Требуется найти числовые характеристики этой функции, зная закон распределения аргумента, т.е. закон распределения СВ  $X$ .

**1. Пусть аргумент  $X$  – дискретная СВ** с возможными значениями  $x_i$ , вероятности которых равны соответственно  $p_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Как уже отмечалось ранее, вероятности возможных значений СВ  $Y$   $y_i = \varphi(x_i)$  равны  $p_i$ . Следовательно, математическое ожидание и дисперсия функции  $Y = \varphi(X)$  случайного аргумента  $X$  определяются формулами:

$$M[Y] = M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^n y_i p_i = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i = m_y,$$

$$D[Y] = D[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^n (y_i - m_y)^2 p_i = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - m_y]^2 p_i.$$

**2. Пусть аргумент  $X$  – непрерывная СВ** с плотностью распределения  $f_X(x)$ . Для отыскания математического ожидания функции  $Y = \varphi(X)$  необходимо найти плотность распределения  $f_Y(y)$  СВ  $Y$ , а затем воспользоваться формулой

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy.$$

Однако если отыскание плотности распределения  $f_Y(y)$  является затруднительным, то математическое ожидание можно найти по формуле

$$M[Y] = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x) dx$$

Эта формула следует из формулы для матожидания ДСВ, если заменить суммирование интегрированием, а вероятность – элементом вероятности  $f_X(x)dx$ .

Аналогично для дисперсии функции  $Y = \varphi(X)$  случайного аргумента  $X$  имеем:

$$D[Y] = D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x) - m_y]^2 f_X(x) dx.$$

**Начальные моменты**  $k$ -го порядка СВ  $Y = \varphi(X)$  вычисляются по формулам:

$$\alpha_k = M[Y^k] = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i)]^k p_i \text{ – для дискретной СВ } X;$$

$$\alpha_k = M[Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^k f_X(x) dx \text{ – для непрерывной СВ } X.$$

**Центральные моменты**  $k$ -го порядка СВ  $Y = \varphi(X)$  вычисляются по формулам:

$$\mu_k = M[(Y - m_y)^k] = M[\tilde{Y}^k] = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - m_y]^k p_i \text{ – для дискретной СВ } X;$$

$$\mu_k = M[(Y - m_y)^k] = M[\tilde{Y}^k] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y]^k f_X(x) dx \text{ – для непрерывной СВ } X.$$

Для вычисления числовых характеристик функции многомерной случайной величины, как и для функции одной случайной величины, нет необходимости в отыскании плотности распределения результата преобразования СВ. Достаточно знать лишь совместную плотность распределения входной СВ.

Пусть  $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , где  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  – непрерывная  $n$ -мерная случайная величина с известной плотностью распределения  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Тогда начальные  $\alpha_k$  и центральные  $\mu_k$  моменты  $k$ -го порядка СВ  $Y$  вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha_k = M[Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)]^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

$$\mu_k = M[(Y - m_y)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - m_y]^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Для математического ожидания и дисперсии СВ  $Y$  имеем:

$$M[Y] = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = m_y,$$

$$D(Y) = M[(Y - m_y)^2] = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - m_y]^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Пусть  $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , где  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  –  $n$ -мерная с известными числовыми характеристиками: вектором математических ожиданий  $\vec{M} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ , вектором дисперсий  $\vec{D} = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ , матрицей ковариаций  $\|K_{ij}\|$ .

*Теорема о математическом ожидании суммы случайных величин.* Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M[Y] = M\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n M[X_i] = \sum_{i=1}^n m_i.$$

*Доказательство.* Пусть  $n = 2$ , т.е.  $Y = X_1 + X_2$ , и предположим, что слагаемые есть непрерывные СВ с совместной плотностью распределения  $f(x_1, x_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} M[Y] &= M[X_1 + X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = M[X_1] + M[X_2] = m_1 + m_2. \end{aligned}$$

Аналогично и для дискретных СВ. Применяя метод математической индукции (переход от  $n$  к  $n+1$ ), нетрудно доказать, что теорема справедлива для любого  $n$ .

*Теорема о дисперсии суммы случайных величин.*

Дисперсия суммы случайных величин равна сумме всех элементов ковариационной матрицы:

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}.$$

Так как ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали, на которой находятся дисперсии СВ  $X$ , то эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D[X_i] + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n K_{ij}.$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} D[Y] &= M\left[(Y - m_y)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n m_i\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i\right)^2\right] = \\ &= M\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{X}_i \tilde{X}_j\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[\tilde{X}_i \tilde{X}_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}. \end{aligned}$$

*Следствие.* Дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме их дисперсий  $D[Y] = \sum_{i=1}^n D[X_i]$ , т.к. для них  $K_{ij} = 0$  для всех  $i \neq j$ .

*Теорема о математическом ожидании произведения случайных величин.*

Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс ковариация:

$$M[Y] = M[X_1 X_2] = M[X_1]M[X_2] + K_{12}.$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} K_{12} &= M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] = M[X_1 X_2 - m_1 X_2 - m_2 X_1 + m_1 m_2] = \\ &= M[X_1 X_2] - m_1 M[X_2] - m_2 M[X_1] + m_1 m_2 = M[X_1 X_2] - m_1 m_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует:  $M[X_1 X_2] = m_1 m_2 + K_{12} = M[X_1]M[X_2] + K_{12}$ .

*Следствие.* Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M[Y] = M\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n M[X_i].$$

*Теорема о дисперсии произведения независимых случайных величин.*

Дисперсия произведения независимых случайных величин равна

$$D[Y] = D\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n (D_i + m_i^2) - \prod_{i=1}^n m_i^2.$$