МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение. Систему n случайных величин называют n-мерной (многомерной) случайной величиной или случайным вектором $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Ее можно интерпретировать как случайную точку или случайный вектор в n-мерном пространстве.

Многомерная СВ есть функция элементарного события ω: $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \varphi(\omega)$. Каждому элементарному событию ω ставится в соответствие n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения, принятые случайными величинами $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в результате опыта. Вектор $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется реализацией случайного вектора $\vec{\mathbf{X}} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Полной характеристикой n-мерной СВ является n-мерный закон распределения, который может быть задан функцией распределения или плотностью вероятности.

Определение. **Функцией распределения n-мерной случайной величиной** $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется вероятность выполнения n неравенств вида $X_i < x_i$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}.$$

Функция распределения $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ обладает такими же свойствами, как и функция распределения двух СВ $F(x, y)$. В частности; она принимает значения на отрезке [0, 1]; $F(\infty, \infty, ..., \infty) = 1$, $F(-\infty, -\infty, ..., -\infty) = 0$; функцию распределения любой частной системы из случайных величин, входящих в систему, можно получить, если положить все остальные аргументы n-мерной функции распределения равными бесконечности, например, $F_2(x_2) = F(\infty, x_2, ..., \infty)$.

Определение. **Плотностью распределения непрерывной n-мерной СВ $(X_1, X_2, ..., X_n)$** называется n-я смешанная частная производная её функции распределения, взятая один раз по каждому аргументу:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}.$$

Плотность определения обладает следующими свойствами:

1) положительная определенность: $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$;

2) условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n = 1$;

3) плотности распределения меньшего порядка определяются путем интегрирования n-мерной плотности по ненужным переменным.

Например, одномерная плотность распределения СВ X_k равна

$$f_k(x_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot_{(n-1)}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_n$$

4) Функция распределения $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ выражается через плотность вероятности $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ n-кратным интегралом

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n=1$$

5) Вероятность попадания случайной точки $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ в область D из n-мерного пространства равна n-кратному интегралу по этой области:

$$P\{(X_1,X_2,\ldots,X_n)\}=\iint\limits_{(D)}\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Необходимым и достаточным условием взаимной независимости случайных величин, входящих в n-мерную СВ, является равенство

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\ldots F_n(x_n);$$

для непрерывной n-мерной СВ:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n).$$

Основными **числовыми характеристиками** n-мерной случайной величиной $(X_1, X_2, ..., X_n)$ являются:

1) математические ожидания составляющих X_i: $m_i = M[X_i], i = \overline{1, n}$;

2) дисперсии составляющих X_i: $D_i = D[X_i], i = \overline{1, n}$;

3) ковариации $K_{ij} = M[\tilde{X}_i \tilde{Y}_j] = M[X_i Y_j] - M[X_i] M[Y_j]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Ковариации K_{ij} образуют ковариационную матрицу

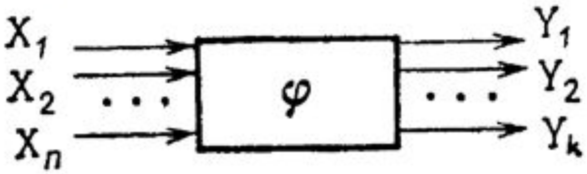
$$\|K_{ij}\| = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & ... & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & ... & K_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ K_{n1} & K_{n2} & ... & K_{nn} \end{bmatrix} \text{ или, так как } K_{ii} = D_i, \quad \|K_{ij}\| = \begin{bmatrix} D_1 & K_{12} & ... & K_{1n} \\ K_{21} & D_2 & ... & K_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ K_{n1} & K_{n2} & ... & D_n \end{bmatrix}.$$

Ковариационная матрица является симметрической, так как $K_{ij} = K_{ji}$.

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В практических применениях теории вероятностей большое место занимают задачи, требующие нахождения законов распределения и числовых характеристик функций случайных величин.

Обычно в инженерных приложениях задача ставится так: на вход технического устройства поступает случайное воздействие X. Устройство подвергает это воздействие некоторому функциональному преобразованию φ, результатом которого является случайная величина $Y=\varphi\left(X\right)$. При известном законе распределения СВ X (или только её числовых характеристик) требуется определить закон распределения (или только числовые характеристики) СВ Y.



В более сложном случае на вход устройства подается не одно, а несколько случайных воздействий $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, а на выходе снимается несколько случайных величин $\left(Y_1, Y_2, ..., Y_k\right)$ (в общем случае $k \neq n$). Требуется, зная закон распределения или только числовые характеристики системы $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, найти закон распределения или только числовые характеристики системы $\left(Y_1, Y_2, ..., Y_k\right)$.

Определение. Если каждому возможному значению СВ X по определенному правилу соответствует одно возможное значение СВ Y, то Y называется функцией случайного аргумента. Обозначается: $Y=\varphi(X)$.

Пусть имеется СВ X с известным законом распределения. Пусть СВ X подвергается детерминированному преобразованию φ. В результате будем иметь новую СВ Y, связанную с X функциональной зависимостью: $Y=\varphi(X)$.

1. Пусть аргумент X - дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, ..., p_n$, т.е. $p_i = P\{X = x_i\}$, $i=\overline{1,n}$.

Очевидно, что $Y=\varphi(X)$ – также дискретная случайная величина с возможными значениями $y_1=\varphi(x_1), y_2=\varphi(x_2), ..., y_n=\varphi(x_n)$. Так как событие {величина X приняла значение x_i} влечет за собой событие {величина Y приняла значение $y_i=\varphi(x_i)$}, то вероятности возможных значений Y соответственно равны $p_1, p_2, ..., p_n$.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

Для нахождения закона распределения ДСВ Y в форме ряда распределения необходимо определить её возможные значения, упорядочить их в порядке возрастания и при определении вероятностей каждого из значений ДСВ Y учитывать следующее:

а) если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения функции Y, то вероятности соответствующих значений X и Y между собой;

б) если различным возможным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Пример. ДСВ X задана рядом распределения

X	-2	2	3
p	0,3	0,5	0,2

Найти распределение СВ $Y = X^2$.

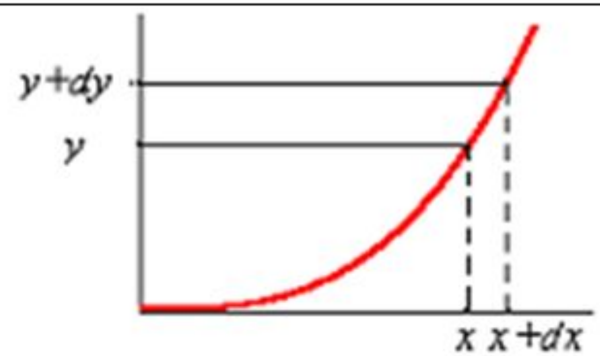
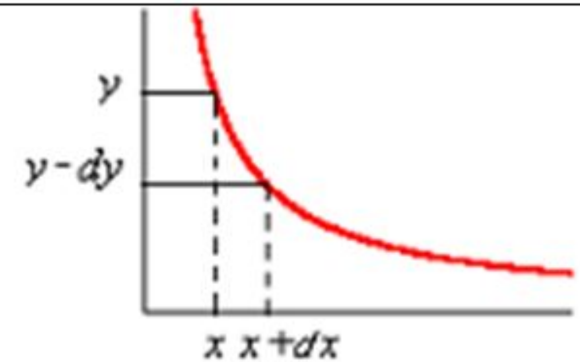
Решение. Возможные значения СВ Y: y_1=4 и y_2=9. Вероятность значения y_1=4 равна сумме вероятностей несовместных событий X=–2 и X=2. Вероятность значения y_2=9 равна вероятности события X=3. Таким образом, для ряда распределения СВ Y получаем:

Y	4	9
p	0,8	0,2

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

2. Пусть аргумент X – непрерывная случайная величина. Нахождение плотности распределения СВ $Y=\varphi(X)$ зависит от того, монотонна или немонотонна функция $\varphi(x)$.

1) Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна, дифференцируема и строго **монотонна**. Из строгой монотонности $\varphi(x)$ **следует однозначность обратной функция** $x=\psi(y)$.

Монотонные функции $\varphi(x)$	
	
Строго возрастающая функция	Строго убывающая функция

Пусть $\varphi(x)$ монотонно возрастает. Рассмотрим интервал Δx, непосредственно примыкающий к точке x. Изменению аргумента X в диапазоне $(x,\ x+\Delta x)$ соответствует изменение функции в диапазоне $(y,\ y+\Delta y)$.

При этом вероятность попадания СВ Y в интервал шириной Δy будет равна вероятности попадания СВ X в интервал шириной Δx:

$$\int_{y}^{y+\Delta y} f_y(y)dy = \int_{x}^{x+\Delta x} f_x(x)dx,$$

т. е. площади соответствующих полос шириной Δy и Δx под кривыми распределений $f_y(y)$ и $f_x(x)$ равны между собой. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, получаем равенство элементов вероятности: $f_y(y)dy = f_x(x)dx$.

Отсюда следует: $f_y(y) = f_x(x)\dfrac{dx}{dy} = f_x\left[\psi(y)\right]\dfrac{d\psi(y)}{dy}$. (*)

Для **монотонно убывающей функции** $\varphi(x)$ получим такое же выражение, однако входящая в него производная будет отрицательной, т.е. будем иметь

$$f_y(y) = f_x(x)\frac{dx}{dy} = -f_x\left[\psi(y)\right]\frac{d\psi(y)}{dy}. \quad (**)$$

Учитывая, что плотность распределения есть неотрицательная функция, формулы (*) и (**) можно объединить в одну:

$$\boxed{f_y(y) = f_x\left[\psi(y)\right]\left|\frac{d\psi(y)}{dy}\right|.}$$

Здесь $\psi(y)$ – функция, обратная к $\varphi(x)$.

Пример. **Линейное преобразования СВ** $Y = aX + b$. Плотность распределения СВ X известна и равна $f(x)$. Найти плотность распределения СВ *Y*.

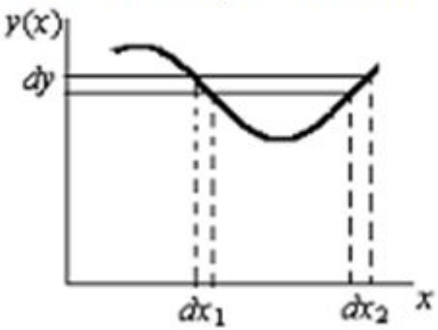
Решение. Обратная функция имеет вид $x = \psi(y) = (y-b)/a$. Для неё

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = \frac{1}{a}, \quad \left|\frac{d\psi(y)}{dy}\right| = \frac{1}{|a|},$$

и для плотности распределения СВ *Y* получаем $f_y(y) = \dfrac{1}{|a|} f_x\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

Из этого выражения следует, что линейное преобразование не меняет характера распределения.

2) Будем теперь полагать, что **функция преобразования СВ немонотонная**, т.е. обратная функция неоднозначна. В этом случае данному значению *y* соответствует несколько значений *x*, т.е. обратная функция имеет несколько ветвей.



Обозначим их $x_k = \psi_k(y)$. Тогда событию *A*, которое состоит в том, что случайная величина *Y* попадет в интервал шириной Δy, соответствует несколько несовместных событий A_k (k=1, 2, …) – попаданий случайной величины *X* на один из участков Δx_1 или Δx_2, и т. д., причем безразлично на какой.

Разобьём интервал возможных значений СВ X на k участков монотонности и найдем для каждого из них обратную функцию $\psi_k(y)$. Плотность распределения СВ Y на каждом из участков монотонности выражается полученной выше формулой, а для всего интервала возможных значений СВ X плотность распределения СВ Y будет равна сумме плотностей распределения на каждом из участков монотонности:

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_k f_X\left[\psi_k(y)\right]\left|\frac{\psi_k(y)}{dy}\right|. \quad (*)}$$

Пример. **Квадратичное преобразование СВ $Y = X^2$.** Найти плотность распределения СВ Y.

Решение. Функция преобразования немонотонная, обратная функция имеет две ветви: $\psi_1(y) = -\sqrt{y};\ \psi_2(y) = \sqrt{y}$. По формуле (*) получаем выражение для плотности распределения СВ Y:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(-\sqrt{y}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(\sqrt{y}\right), \quad (y > 0).$$

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

Пусть система двух непрерывных СВ (X, Y) имеет совместную плотность распределения $f(x,y)$. Тогда для функции распределения СВ $Z=\varphi(X,Y)$ имеем

$$F_Z(z)=P(Z<z)=P\{\varphi(x,y)<z\}=\iint_{D_z} f(x,y)dxdy,$$

где D_z – множество точек плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\varphi(x,y)<z$. Плотность распределения СВ Z получаем дифференцированием её функции распределения:

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}.$$

Для наиболее важного на практике случая суммы двух случайных величин $Z=X+Y$ приведем без вывода выражения для плотности распределения СВ Z:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy.$$

Если СВ X и Y независимы, то $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ и

$$f_Z(z)=f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy.$$

Закон распределения суммы двух независимых СВ называется *композицией* или ***сверткой*** законов распределения слагаемых.

Задана функция $Y=\varphi(X)$ случайного аргумента X. Требуется найти числовые характеристики этой функции, зная закон распределения аргумента, т.е. закон распределения СВ X.

1. Пусть аргумент X **– дискретная СВ** с возможными значениями x_i, вероятности которых равны соответственно p_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Как уже отмечалось ранее, вероятности возможных значений СВ Y $y_i=\varphi(x_i)$ равны p_i. Следовательно, математическое ожидание и дисперсия функции $Y=\varphi(X)$ случайного аргумента X определяются формулами:

$$M[Y]=M\left[\varphi(X)\right]=\sum_{i=1}^{n} y_i p_i=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)p_i=m_y,$$

$$D[Y]=D[\varphi(x)]=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-m_y\right)^2 p_i=\sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i)-m_y]^2 p_i.$$

2. Пусть аргумент X **– непрерывная СВ** с плотностью распределения $f_X(x)$. Для отыскания математического ожидания функции $Y=\varphi(X)$ необходимо найти плотность распределения $f_Y(y)$ СВ Y, а затем воспользоваться формулой

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy.$$

Однако если отыскание плотности распределения $f_Y(y)$ является затруднительным, то математическое ожидание можно найти по формуле

$$M[Y]=M[\varphi(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f_X(x)dx$$

Эта формула следует из формулы для матожидания ДСВ, если заменить суммирование интегрированием, а вероятность – элементом вероятности $f_X(x)dx$.

Аналогично для дисперсии функции $Y=\varphi(X)$ случайного аргумента X имеем:

$$D[Y]=D[\varphi(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x)-m_y]^2 f_X(x)dx.$$

Начальные моменты k-го порядка СВ $Y=\varphi(X)$ вычисляются по формулам:

$$\alpha_k=M\left[Y^k\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(x_i)\right]^k p_i$$ – для дискретной СВ X;

$$\alpha_k=M\left[Y^k\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x)\right]^k f_X(x)dx$$ – для непрерывной СВ X.

Центральные моменты k-го порядка СВ $Y=\varphi(X)$ вычисляются по формулам:

$$\mu_k=M\left[\left(Y-m_y\right)^k\right]=M\left[\tilde{Y}^k\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(x_i)-m_y\right]^k p_i$$ – для дискретной СВ X;

$$\mu_k=M\left[\left(Y-m_y\right)^k\right]=M\left[\tilde{Y}^k\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x)-m_y\right]^k f_X(x)dx$$ – для непрерывной СВ X.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ МНОГОМЕРНОЙ СВ

Для вычисления числовых характеристик функции многомерной случайной величины, как и для функции одной случайной величины, нет необходимости в отыскании плотности распределения результата преобразования СВ. Достаточно знать лишь совместную плотность распределения входной СВ.

Пусть $Y=\varphi(X_1,X_2,...,X_n)$, где $(X_1,X_2,...,X_n)$ – непрерывная n-мерная случайная величина с известной плотностью распределения $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Тогда начальные α_k и центральные μ_k моменты k-го порядка СВ Y вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha_k=M\left[Y^k\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x_1,x_2,...,x_n)\right]^k f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n,$$

$$\mu_k=M\left[\left(Y-m_y\right)^k\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x_1,x_2,...,x_n)-m_y\right]^k f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n.$$

Для математического ожидания и дисперсии СВ Y имеем:

$$M[Y]=\alpha_1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,x_2,...,x_n)f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n=m_y,$$

$$D(Y)=M\left[\left(Y-m_y\right)^2\right]=\mu_2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x_1,x_2,...,x_n)-m_y\right]^2 f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n$$

Пусть $Y=\varphi(X_1,X_2,...,X_n)$, где $(X_1,X_2,...,X_n)$ – n-мерная с известными числовыми характеристиками: вектором математических ожиданий $\vec{M}=(m_1,m_2,...m_n)$, вектором дисперсий $\vec{D}=(D_1,D_2,...D_n)$, матрицей ковариаций $\|K_{ij}\|$.

Теорема о математическом ожидании суммы случайных величин. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M[Y]=M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}M[X_i]=\sum_{i=1}^{n}m_i .$$

Доказательство. Пусть $n=2$, т.е. $Y=X_1+X_2$, и предположим, что слагаемые есть непрерывные СВ с совместной плотностью распределения $f(x_1,x_2)$. Тогда

$$M[Y]=M[X_1+X_2]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+x_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_2 f(x_1,x_2)dx_1dx_2=M[X_1]+M[X_2]=m_1+m_2 .$$

Аналогично и для дискретных СВ. Применяя метод математической индукции (переход от n к n+1), нетрудно доказать, что теорема справедлива для любого n.

Теорема о дисперсии суммы случайных величин.

Дисперсия суммы случайных величин равна сумме всех элементов ковариационной матрицы:

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij} .$$

Так как ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали, на которой находятся дисперсии СВ X, то эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} K_{ij} .$$

Доказательство:

$$D[Y] = M\left[\left(Y - m_y\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{n} \tilde{X}_i \tilde{X}_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{n} M\left[\tilde{X}_i \tilde{X}_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}.$$

Следствие. Дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме их дисперсий $D[Y] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i]$, т.к. для них $K_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

Теорема о математическом ожидании произведения случайных величин.

Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс ковариация:

$$M[Y] = M[X_1 X_2] = M[X_1]M[X_2] + K_{12}.$$

Доказательство:

$$K_{12} = M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] = M[X_1 X_2 - m_1 X_2 - m_2 X_1 + m_1 m_2] =$$

$$= M[X_1 X_2] - m_1 M[X_2] - m_2 M[X_1] + m_1 m_2 = M[X_1 X_2] - m_1 m_2.$$

Отсюда следует: $M[X_1 X_2] = m_1 m_2 + K_{12} = M[X_1]M[X_2] + K_{12}$.

Следствие. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M[Y] = M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i].$$

Теорема о дисперсии произведения независимых случайных величин.

Дисперсия произведения независимых случайных величин равна

$$D[Y] = D\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n}\left(D_i + m_i^2\right) - \prod_{i=1}^{n} m_i^2.$$