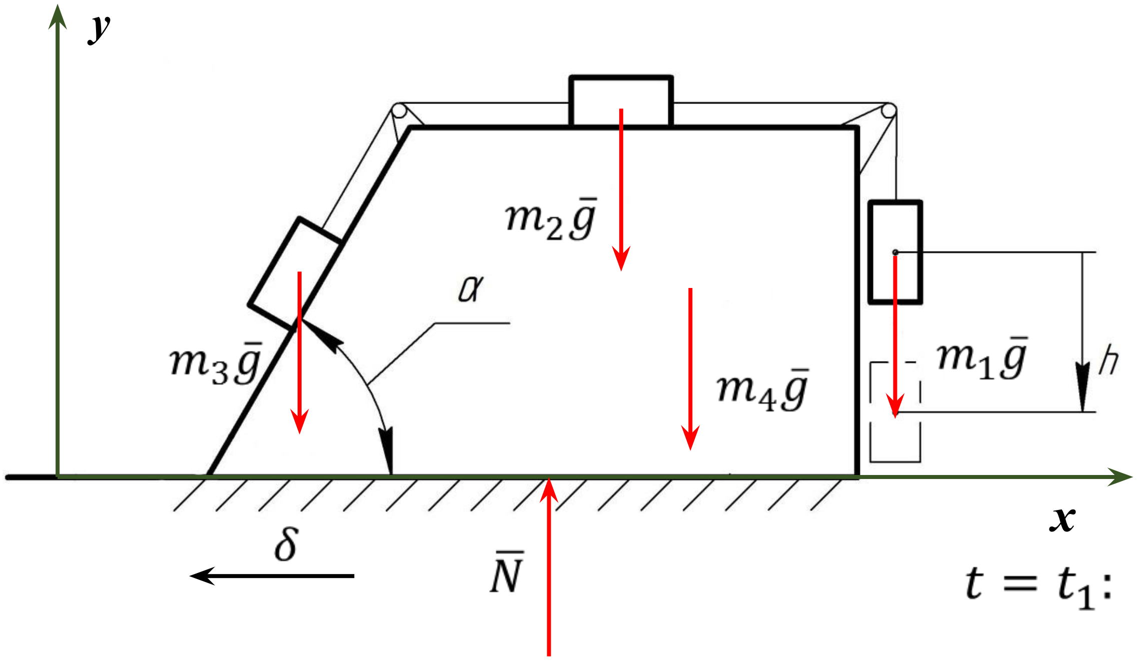
Теорема о движении центра масс.

Три груза массой m_1, m_2 и m_3 соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок. Масса основания m_4. Пренебрегая трением между основанием и полом, определить перемещение основания, если груз m_1 опустится на высоту h. Массой нити пренебречь.



Решение:

$$Ma_x^C = \sum F_{kx}^{(e)} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} v_x^C &= const \\ t = 0:\ v_x^C(0) &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \ v_x^C \equiv 0$$

$$x_C = const$$

$$t = 0: \quad x_{C0} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$t = t_1: \quad x_C = \frac{m_1(x_1-\delta)+m_2(x_2+h-\delta)+m_3(x_3+h\cos\alpha-\delta)+m_4(x_4-\delta)}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$x_{C0} = x_C$:

$$\cancel{m_1x_1} + \cancel{m_2x_2} + \cancel{m_3x_3} + \cancel{m_4x_4} = m_1(\cancel{x_1}-\delta) + m_2(\cancel{x_2}+h-\delta) + m_3(\cancel{x_3} + h\cos\alpha - \delta) + m_4(\cancel{x_4}-\delta)$$

$$(m_1+m_2+m_3+m_4)\delta = (m_2+m_3\cos\alpha)h \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{(m_2+m_3\cos\alpha)h}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

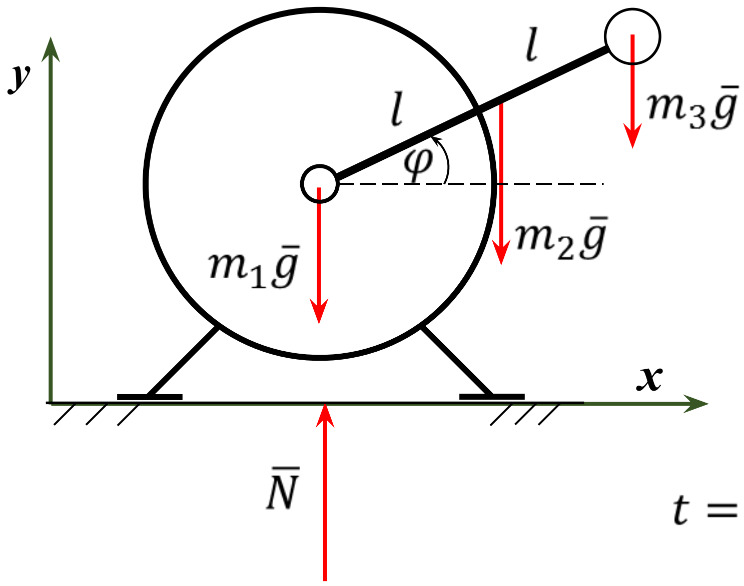
Теорема о движении центра масс.

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Электрический мотор массой m_1 установлен без крепления на гладком горизонтальном фундаменте. На валу мотора под прямым углом закреплён одним концом однородный стержень длиной $2l$ и массой m_2. На другой конец стержня насажен точечный груз массой m_3. Угловая скорость вала $\omega = const$.

1) Определить горизонтальное движение мотора.
2) Наибольшее горизонтальное усилие F, действующее на болты, если ими будет закреплен кожух электромотора на фундаменте.
3) Угловую скорость вала, при которой электромотор будет подпрыгивать над фундаментом не будучи закрепленным на нем болтами.

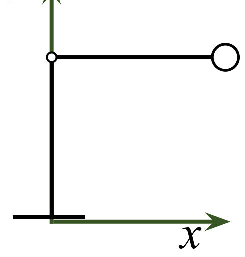
***Решение*:**



1) $$Ma_x^C = \sum F_{kx}^{(e)} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &v_x^C = const \\ &t = 0:\ v_x^C(0) = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow\ v_x^C \equiv 0$$

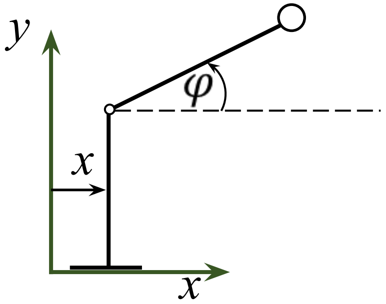
$t = 0$



$$x_C = const$$

$$t = 0: \qquad x_{C0} = \frac{m_2 l + m_3 2l}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$t = t_1$



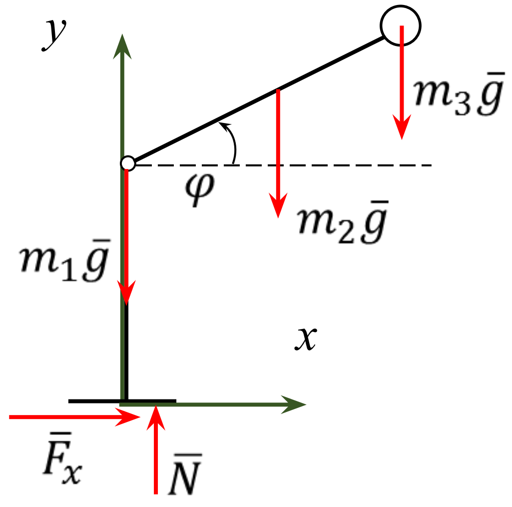
$$t = t_1: \qquad x_C = \frac{m_1 x + m_2(x + l\cos\varphi) + m_3(x + 2l\cos\varphi)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Теорема о движении центра масс.

$$x_{C0}=x_C:\quad m_2l+m_3 2l=m_1x+m_2(x+l\cos\varphi)+m_3(x+2l\cos\varphi);\qquad \varphi=\omega t$$

$$x(t)=\frac{(m_2+2m_3)l}{m_1+m_2+m_3}(1-\cos\omega t)$$

2) Пусть двигатель закреплен на фундаменте.



$$M\ddot{x}_C=\sum F_{kx}^{(e)}=F_x$$

$$x_C=\frac{(m_2+2m_3)\,l\cos\omega t}{m_1+m_2+m_3}$$

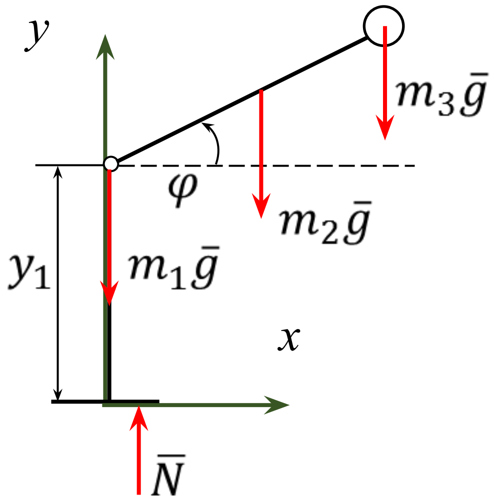
$$\ddot{x}_C=\frac{-(m_2+2m_3)\omega^2 l\cos\omega t}{m_1+m_2+m_3}$$

$$F_x=-(m_2+2m_3)\omega^2 l\cos\omega t\,;$$

$$F_x^{max}=(m_2+2m_3)\omega^2 l$$

Теорема о движении центра масс.

3) Условие отрыва двигателя $N = 0$.



$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)} = N - m_1 g - m_2 g - m_3 g$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + (m_2 + 2m_3)\, l\sin\omega t}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\ddot{y}_C = \frac{-(m_2 + 2m_3)\omega^2 l\sin\omega t}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$N = M\ddot{y}_C + Mg = Mg - (m_2 + 2m_3)\omega^2 l\sin\omega t$$

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{Mg}{(m_2 + 2m_3)\, l\sin\omega t}$$

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{Mg}{(m_2 + 2m_3)\, l}}$$

Теорема об изменении количества движения системы.

По горизонтальной платформе массы M, движущейся по инерции со скоростью v_0, перемещается тележка массы m с постоянной относительной скоростью u_0. В некоторый момент времени тележка была заторможена. Определить:

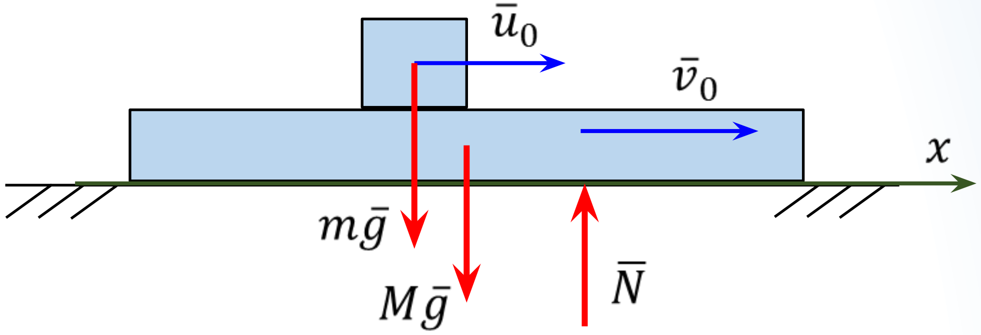
1) Общую скорость v платформы с тележкой после ее остановки.

2) Путь s, который пройдет тележка по платформе с момента начала торможения до полной остановки, и полное время торможения τ, если считать, что при торможении возникает постоянная по величине сила сопротивления F.

Решение:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{(e)} = 0$$

$$Q_x = const$$



$$Q_x = Mv + m(v+u) = (M+m)v + mu$$

Н.У.: $t = 0 \quad v = v_0, \qquad u = u_0$

$$Q_{0x} = (M+m)v_0 + mu_0$$

В конце пути $u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_x = (M+m)v$

$$Q_{0x} = Q_x$$

$$(M+m)v_0 + mu_0 = (M+m)v; \qquad v = v_0 + \frac{m}{M+m}u_0$$

Теорема об изменении количества движения системы.

Для системы целиком:

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0; \qquad \frac{d}{dt}\big((M+m)v + mu\big) = (M+m)\dot{v} + m\dot{u} = 0$$

Расчленим систему.

Для платформы:

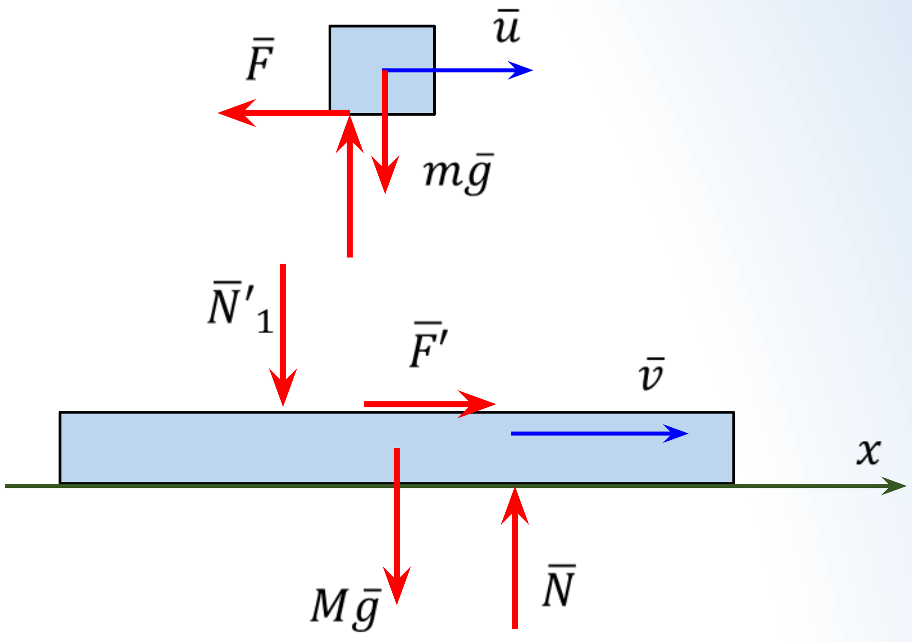
$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{(e)}; \qquad \frac{d}{dt}(Mv) = F; \qquad M\dot{v} = F$$

$$(M+m)\frac{F}{M} + m\dot{u} = 0; \qquad \dot{u} = -(M+m)\frac{F}{Mm}$$

$$u = -(M+m)\frac{Ft}{Mm} + C_1$$

Н.У.: $t = 0 \quad u = u_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = u_0; \quad u = -(M+m)\frac{Ft}{Mm} + u_0$

В конце движения тележки: $u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{Mm}{(M+m)} \cdot \frac{u_0}{F}$



Теорема об изменении количества движения системы.

Определим путь, пройденный тележкой до остановки.

$$u = u_0 - (M+m)\frac{Ft}{Mm}$$

$$s(t) = u_0 t - (M+m)\frac{Ft^2}{2Mm} + C_2$$

Н.У.: $t = 0 \quad s = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 0;$

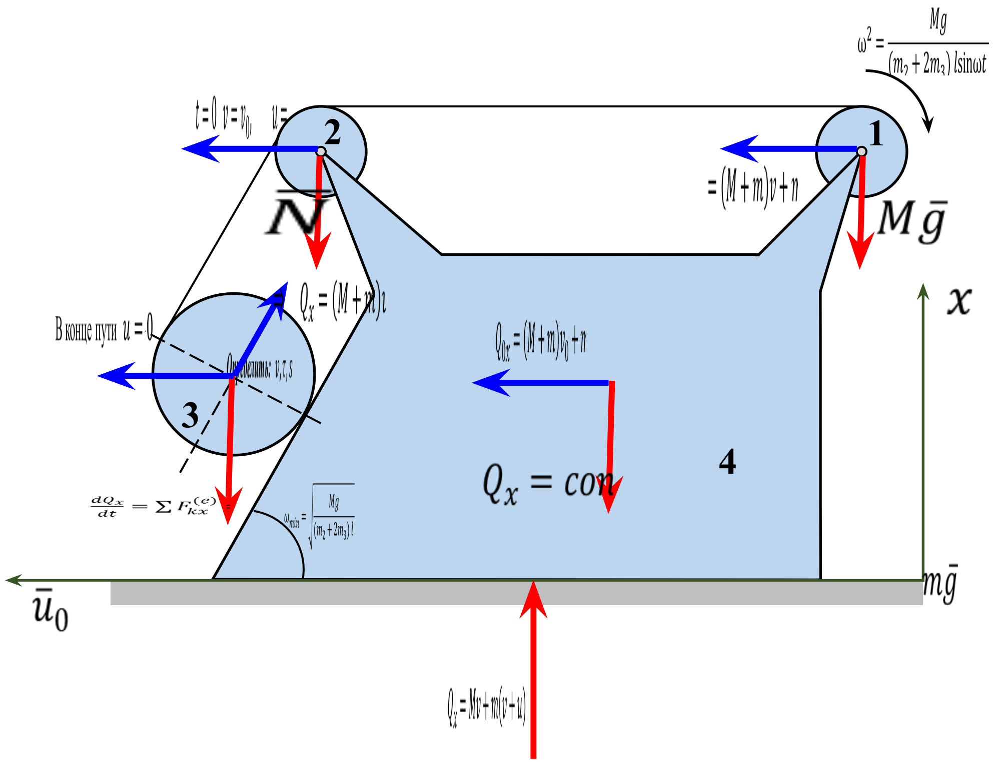
При $t = \tau$:

$$s = \frac{Mm}{(M+m)} \cdot \frac{{u_0}^2}{F} - \frac{F(M+m)}{2Mm} \cdot \left(\frac{Mm}{(M+m)} \cdot \frac{u_0}{F}\right)^2 = \frac{Mm}{2(M+m)} \cdot \frac{{u_0}^2}{F}$$

Теорема об изменении количества движения системы.

$$\bar{v}_0$$

Решение.



$$Q_{0x} = Q_x$$

$$(M+m)v_0 + mu_0 = (M+m)v;$$

$$v = v_0 + \frac{m}{M+m} u_0$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0;$$

$$\bar{N}'_1 \qquad v_{Cr} = 0{,}5\omega_{1z} r = 0{,}5\dot{\varphi} r$$

$$M\bar{g}$$

$$x \qquad m\bar{g}$$

$$\bar{N}$$

Теорема об изменении количества движения системы.

$$\bar{F}$$

Н.У.: $\bar{v}$ $\quad$ $\bar{F}'$

$$10mv - 0{,}5m\dot{\varphi}r = 0 \qquad \frac{d}{dt}(Mv) = F;$$

Н.У.: $M\dot{v} = F$ $\qquad (M+m)\dfrac{F}{M} + m\dot{u} = 0;$

$$\dot{u} = -(M+m)\frac{F}{Mm}$$

Ускорение призмы : $u = -(M+m)\dfrac{Ft}{Mm} + C_1$

Реакцию опоры определим из уравнения:

$$t = 0 \quad u = u_0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = u_0; \qquad \sum F_{ky}^{(e)} = N - 10mg.$$

$$0{,}5m\ddot{\varphi}r\sqrt{3} = N - 10mg$$

$$N = 10mg + 2\sqrt{3}m\varepsilon r$$