

# Лекция 5

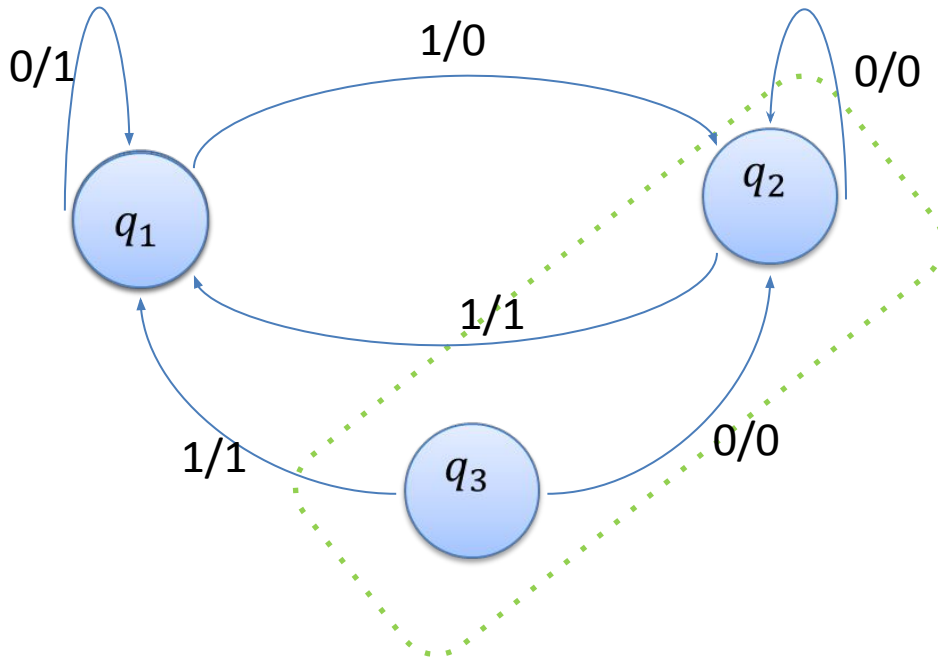
## Эквивалентные состояния и эквивалентные автоматы. Задача минимизации автоматов

### §1 Эквивалентные состояния

$q_i \sim q_j$ , если  $\forall \alpha S(q_i, \alpha) = S(q_j, \alpha)$

# Пример:

S



Пусть

$$\alpha = x_1 \dots x_n = x_1 \alpha'$$

если  $x_1 = 0$ , то

$$q_2 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

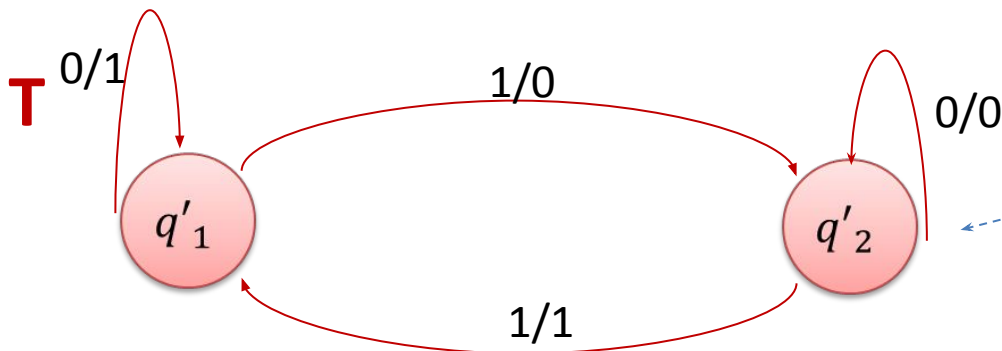
$$q_3 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

если  $x_1 = 1$ , то

$$q_2 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots$$

$$q_3 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots$$

$$q_2 \sim q_3 \sim q'_2$$



$S \sim T$

- **Эквивалентные автоматы**

$$S = \{X, Q, Y, \varphi, \psi\} \sim T = \{X, Q', Y, \varphi', \psi'\},$$

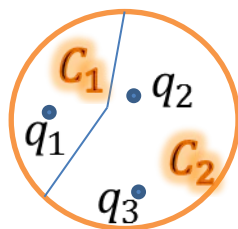
если

$$\forall q \in Q \exists q' \in Q': q \sim q' \text{ и наоборот.}$$

Автомат  $S$  называется **минимальным** автоматом ( $S_{min}$ ), если среди всех автоматов, эквивалентных  $S$ , он имеет наименьшее число состояний.

Для построения  $S_{min}$  состояния автомата исходного автомата разбивают на **классы эквивалентности**.

В примере



2 класса эквивалентности  $C_1$  и  $C_2$

## §2. Теорема о существовании минимального автомата

- Для всякого автомата  $S$  существует минимальный автомат  $S_{min}$ , который определен единственным образом с точностью до нумерации состояний.

Лемма. Если  $q_1$  и  $q_2$  находятся в одном классе эквивалентности, то любой символ  $x$  переводит их в один и тот же класс эквивалентности.

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{x} q_1' \\ q_2 \xrightarrow{x} q_2' \end{array} \right\} \longrightarrow q_1' \sim q_2'$$

Доказательство: (от противного)

Пусть  $q_1 \sim q_2$ , но  $q_1' \neq q_2'$

Тогда  $\exists$  входное слово  $\alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$

$$S(q_1', \alpha) = y_{k_1} y_{k_2} \dots y_{k_s} = \omega$$

$$S(q_2', \alpha) = y_{k_1'} y_{k_2'} \dots y_{k_s'} = \omega', \text{ но } \omega \neq \omega'$$

Пусть  $\dots \alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$  (вх. слово)

$$q_1 \xrightarrow{x} q_1' \xrightarrow[y_{k_1}]{x_{i_1}} q_1'' \dots \xrightarrow[y_{k_s}]{x_{i_s}}$$

$$q_2 \xrightarrow{x} q_2' \xrightarrow[y_{k_1'}]{x_{i_1}} \dots \xrightarrow[y_{k_s'}]{x_{i_s}}$$

Тогда  $y \omega \neq y \omega'$  - не м.б.,

$$\text{т.к. } q_1 \sim q_2 \Rightarrow S(q_1, \alpha) = S(q_2, \alpha)$$

противоречие

# Схема доказательства

Рассмотрим автоматы  $S$  и  $S_m$ .

$S = \{X, Q, Y, \varphi, \psi\}$ ,  $S_m = \{X, \tilde{Q}, Y, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ , где

$\tilde{Q} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$  – множество классов эквивалентных состояний.

$\forall x$  и  $\forall q \in C_i$  определим  $\tilde{\varphi}(C_i, x) = C_j$ ,

где  $\varphi(q, x) = q' \in C_j$ , (согласно Лемме)

$\forall x$  и  $\forall q \in C_i$  определим  $\tilde{\psi}(C_i, x) = \psi(q, x) = y$ .

Построен  $S_m$ .

Далее: докажем, что построен минимальный автомат и он единственный с точностью до обозначения состояний.

1)  $S_m \sim S$

Возьмем  $\forall C \in \tilde{Q}$  и  $\forall q \in S$ . По построению  $C \sim q$ .

Наоборот:  $q \in Q$ ,  $C$  - класс состояний, эквивалентных  $q$ . Поэтому  $q \sim C$

2) Покажем, что  $S_m$  – минимальный автомат.

Пусть это не так. Тогда  $\exists S_m' \sim S_m$ , но  $S_m'$  имеет меньше состояний.

Тогда в  $S_m$  найдутся хотя бы 2 состояния, эквивалентных 1 состоянию  $S_m'$ , т.е. 2 класса  $C_i$  и  $C_j : C_i \sim C_j$ . Противоречие.

3) Из (1) и (2) следует, что в любом другом минимальном автомате число состояний такое же, как в  $S_m$ .

Следовательно, все минимальные автоматы отличаются только нумерацией состояний.

# Алгоритм минимизации автомата. (алгоритм Ауфенкампа и Хона)

1. С помощью функции выходов  $\psi$  разобьём  $Q$  на классы первого порядка:

$$Q = C_{11} \cup C_{12} \cup \dots \cup C_{1m}.$$

$$q \text{ и } q' \in C_{1i}, \text{ если } \forall x \psi(q, x) = \psi(q', x)$$

2. Каждый класс первого порядка разбивают на классы второго порядка  $C_{2j}$  с помощью функции переходов  $\varphi$ .  $q$  и  $q' \in C_{2j}$ , если

$$\forall x \varphi(q, x) = \tilde{q} \in C_{1k}$$

$$\varphi(q', x) = \hat{q} \in C_{1k}$$



3. Каждый класс второго порядка разбивают на классы третьего порядка  $C_{3l}$  аналогично.

$$q \text{ и } q' \in C_{3l}, \text{ если}$$
$$\forall x \varphi(q, x) = \tilde{q} \in C_{2t}$$
$$\varphi(q', x) = \hat{q} \in C_{2t}$$

4. И т.д.

Алгоритм заканчивается, если на шаге  $k$  мы получаем то же разбиение, что и на  $k-1$  шаге.

# Пример:

•

1.

$$C_{11}=\alpha, C_{12}=\beta, C_{13}=\gamma$$

|          |                   |                   |                   |                  |                   |                   |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $q(t-1)$ | $\alpha$<br>$q_1$ | $\alpha$<br>$q_2$ | $\alpha$<br>$q_3$ | $\beta$<br>$q_4$ | $\gamma$<br>$q_5$ | $\gamma$<br>$q_6$ |
| $x(t)$   |                   |                   |                   |                  |                   |                   |
| $a_1$    | 0                 | $q_2$             | $q_3$             | $q_4$            | $q_4$             | $q_5$             |
| $a_2$    | 1                 | $q_2$             | $q_3$             | $q_4$            | $q_4$             | $q_5$             |

2.

|          |       |                   |       |                  |                   |       |
|----------|-------|-------------------|-------|------------------|-------------------|-------|
| $q(t-1)$ | $q_1$ | $\alpha$<br>$q_2$ | $q_3$ | $\beta$<br>$q_4$ | $\gamma$<br>$q_5$ | $q_6$ |
| $x(t)$   |       |                   |       |                  |                   |       |
| $a_1$    | $q_2$ | $q_3$             | $q_4$ | $q_4$            | $q_5$             | $q_6$ |
| $a_2$    | $q_2$ | $q_3$             | $q_4$ | $q_4$            | $q_6$             | $q_5$ |

3.

$$C_{21}=\alpha, C_{22}=\beta, C_{23}=\gamma, C_{24}=\delta$$

|                          |                   |                  |                   |                   |                   |                   |
|--------------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $q(t-1) \backslash x(t)$ | $q_1$             | $q_2$            | $q_3$             | $q_4$             | $q_5$             | $q_6$             |
| $a_1$                    | $q_2$<br>$\alpha$ | $q_3$<br>$\beta$ | $q_4$<br>$\gamma$ | $q_4$<br>$\gamma$ | $q_5$<br>$\delta$ | $q_6$<br>$\delta$ |
| $a_2$                    | $q_2$<br>$\alpha$ | $q_3$<br>$\beta$ | $q_4$<br>$\gamma$ | $q_4$<br>$\gamma$ | $q_6$<br>$\delta$ | $q_5$<br>$\delta$ |

4.

$$C_{31}=\alpha, C_{32}=\beta, C_{33}=\gamma, C_{34}=\delta$$

$$C_{35}=\epsilon$$

|                          |                  |                   |                   |                   |                     |                     |
|--------------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|
| $q(t-1) \backslash x(t)$ | $q_1$            | $q_2$             | $q_3$             | $q_4$             | $q_5$               | $q_6$               |
| $a_1$                    | $q_2$<br>$\beta$ | $q_3$<br>$\gamma$ | $q_4$<br>$\delta$ | $q_4$<br>$\delta$ | $q_5$<br>$\epsilon$ | $q_6$<br>$\epsilon$ |
| $a_2$                    | $q_2$<br>$\beta$ | $q_3$<br>$\gamma$ | $q_4$<br>$\delta$ | $q_4$<br>$\gamma$ | $q_6$<br>$\epsilon$ | $q_5$<br>$\epsilon$ |

5.

|          |              |               |               |               |                 |
|----------|--------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|
| $q(t-1)$ | $\alpha$     | $\beta$       | $\gamma$      | $\delta$      | $\epsilon$      |
| $x(t)$   |              |               |               |               |                 |
| $a_1$    | $\beta$<br>0 | $\gamma$<br>0 | $\delta$<br>0 | $\delta$<br>1 | $\epsilon$<br>1 |
| $a_2$    | $\beta$<br>1 | $\gamma$<br>1 | $\delta$<br>1 | $\gamma$<br>0 | $\epsilon$<br>1 |

← Smin

# Обоснование алгоритма

Покажем, что в результате алгоритма классы, полученные на последнем ( $k$ -ом) шаге, являются классами эквивалентных состояний

Для этого докажем, что

1) Если  $q$  и  $q' \in C_{ki}$ , то  $q \sim q'$ .

2) Если  $q \in C_{ri}$ ,  $q' \in C_{rj}$  ( $r$  – шаг, когда состояния впервые попали в разные классы). Тогда  $q \not\sim q'$ .

1) Пусть  $q, q' \in C_{ki}$ . Докажем, что  $\forall \alpha S(q, \alpha) = S(q', \alpha)$ .

$$\forall x \left. \begin{array}{l} \varphi(q, x) \\ \varphi(q', x) \end{array} \right\} \in C_{kj} \Rightarrow q, q' \in C_{li} \Rightarrow \psi(q, x) = \psi(q', x) = y_{k1}$$

Пусть  $\alpha = x_1 \dots x_n$ .

$$\left. \begin{array}{l} q \xrightarrow{y_{k1}} \frac{x_1}{y_{k1}} \rightarrow q_1 \xrightarrow{y_{k2}} \frac{x_2}{y_{k2}} \rightarrow \dots \xrightarrow{y_{kn}} \frac{x_n}{y_{kn}} \rightarrow q_n \\ q' \xrightarrow{y_{k1}} \frac{x_1}{y_{k1}} \rightarrow q'_1 \xrightarrow{y_{k2}} \frac{x_2}{y_{k2}} \rightarrow \dots \xrightarrow{y_{kn}} \frac{x_n}{y_{kn}} \rightarrow q'_n \end{array} \right\} \Rightarrow S(q, \alpha) = S(q', \alpha)$$

2) Пусть  $q \in C_{ri}$ ,  $q' \in C_{rj}$  ( $r \leq k$ ). Тогда  $\exists x: \varphi(q, x) \in C_{r-1,i}$ ,  $\varphi(q', x) \in C_{r-1,j}$

Тогда  $\exists x'$  и  $\varphi(\varphi(q, x), x')$  и  $\varphi(\varphi(q', x), x')$

попадут в разные классы порядка  $r - 1$

И т.д., пока не дойдем до классов первого порядка  $C_{1m}$  и  $C_{1n}$  (разных),

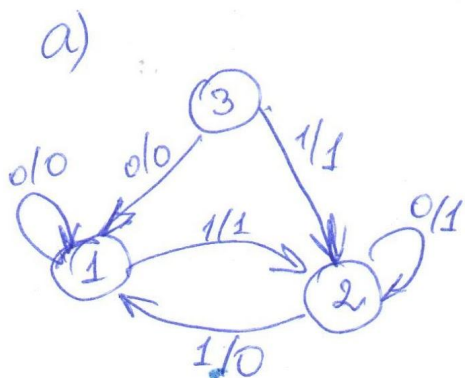
набрав слово  $\alpha$  длины  $r$ , причем

$S(q, \alpha) \neq S(q', \alpha)$  (разные выходные слова). Т.е.  $q \neq q'$ .

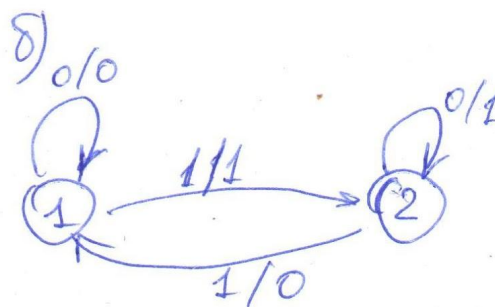
Автомат, все состояния которого эквивалентны, сводится к автомату с одним состоянием (КС).

Минимальный автомат – это автомат, все состояния которого не эквивалентны.

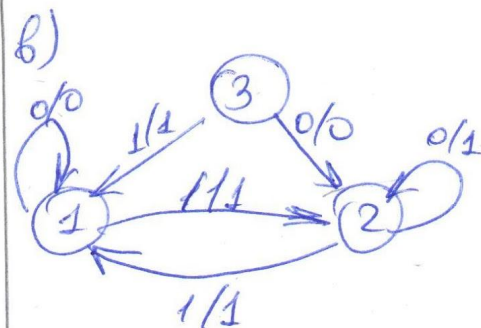
Пример: Какие из автоматов, представленных графами, являются эквивалентными?



| x \ Q | 1 | 2 | 3 |
|-------|---|---|---|
| 0     | 1 | 2 | 1 |
| 1     | 2 | 1 | 2 |



| x \ Q | 1 | 2 |
|-------|---|---|
| 0     | 1 | 2 |
| 1     | 2 | 1 |



| x \ Q | 1 | 2 | 3 |
|-------|---|---|---|
| 0     | 1 | 2 | 2 |
| 1     | 2 | 1 | 1 |