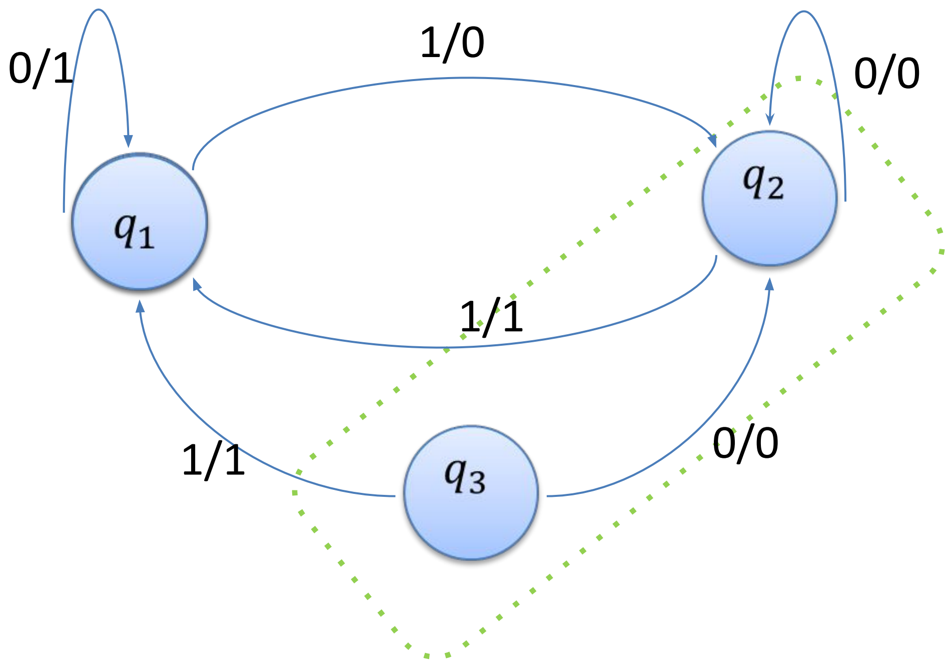
Лекция 5
Эквивалентные состояния и эквивалентные автоматы. Задача минимизации автоматов

§1 Эквивалентные состояния

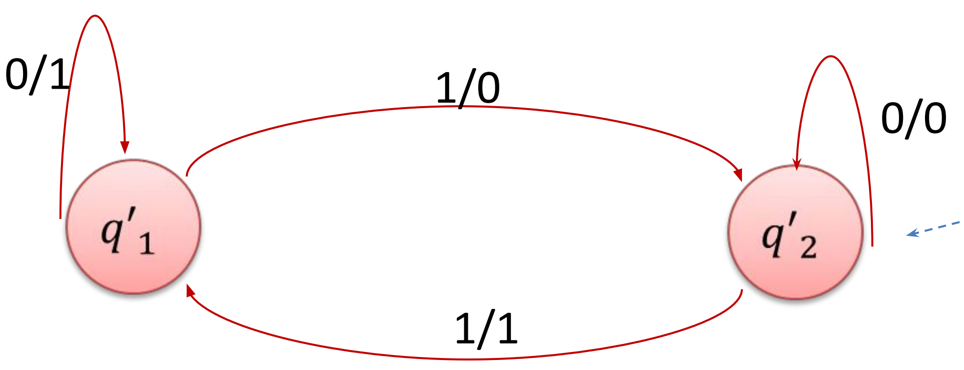
$q_i \sim q_j$, если $\forall \alpha \; S(q_i, \alpha) = S(q_{j,}\alpha)$

Пример:

- S



T



Пусть

$$\alpha = x_1 \dots x_n = x_1\alpha'$$

если $x_1 = 0$, то

$$q_2 \xrightarrow[0]{0} q_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

$$q_3 \xrightarrow[0]{0} q_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

если $x_1 = 1$, то

$$q_2 \xrightarrow[1]{1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots$$

$$q_3 \xrightarrow[1]{1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots$$

$$q_2 \sim q_3 \sim q'_2$$

S~ T

- **Эквивалентные автоматы**

$$S = \{X, Q, Y, \varphi, \psi\} \sim T = \{X, Q', Y, \varphi', \psi'\},$$

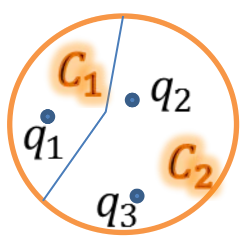
если

$$\forall q \in Q \;\; \exists\, q' \in Q' : q \sim q' \text{ и наоборот.}$$

Автомат *S* называется **минимальным** автоматом (S_{min}), если среди всех автоматов, эквивалентных *S*, он имеет наименьшее число состояний.

Для построения S_{min} состояния автомата исходного автомата разбивают на **классы эквивалентности**.

В примере



2 класса эквивалентности C_1 и C_2

§2. Теорема о существовании минимального автомата

- Для всякого автомата S существует минимальный автомат S_{min} , который определен единственным образом с точностью до нумерации состояний.

<u>Лемма</u>. Если q_1 и q_2 находятся в одном классе эквивалентности, то любой символ *x* переводит их в один и тот же класс эквивалентности.

$$\left.\begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{x} q_1' \\ q_2 \xrightarrow{x} q_2' \end{array}\right\} \longrightarrow q_1' \sim q_2'$$

Доказательство: (от противного)

Пусть $q_1 \sim q_2$, но $q_1' \not\sim q_2'$

Тогда $\exists$ входное слово $\alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$

$S(q_1', \alpha) = y_{k_1} y_{k_2} \dots y_{k_s} = \omega$

$S(q_2', \alpha) = y_{k_1}' y_{k_2}' \dots y_{k_s}' = \omega'$, но $\omega \neq \omega'$

Пусть $x\alpha = x x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$ (вх. слово)

$$q_1 \xrightarrow[y]{x} q_1' \xrightarrow[y_{k_1}]{x_{i_1}} q_1'' \cdots\cdots \xrightarrow[y_{k_s}]{x_{i_s}}$$

$$q_2 \xrightarrow[y]{x} q_2' \xrightarrow[y_{k_1}']{x_{i_1}} \cdots\cdots \xrightarrow[y_{k_s}']{x_{i_s}}$$

Тогда $y\omega \neq y\omega'$ – не м. б.,

т.к. $q_1 \sim q_2 \Rightarrow S(q_1, x\alpha) = S(q_2, x\alpha)$

противоречие

Схема доказательства

- Рассмотрим автоматы S и S_m.

$S = \{X, Q, Y, \varphi, \psi\}$, $S_m = \{X, \tilde{Q}, Y, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$, где

$\widetilde{Q}$ =$\{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ – множество классов эквивалентных состояний.

$\forall x$ и $\forall q \in C_i$ определим $\widetilde{\varphi}(C_i, x) = C_j$,

где $\varphi(q, x) = q' \in C_j$, (согласно Лемме)

$\forall x$ и $\forall q \in C_i$ определим $\widetilde{\psi}(C_i, x) = \psi(q, x) = y$.

Построен S_m.

Далее: докажем, что построен минимальный автомат и он единственный с точностью до обозначения состояний.

1) $S_m \sim S$

Возьмем $\forall C \in \tilde{Q}$ и $\forall q \in C$. По построению $C \sim q$.

Наоборот: $q \in Q$, C - класс состояний, эквивалентных q. Поэтому $q \sim C$

2) Покажем, что S_m – минимальный автомат.

Пусть это не так. Тогда $\exists S_m' \sim S_m$, но S_m' имеет меньше состояний.

Тогда в S_m найдутся хотя бы 2 состояния, эквивалентных 1 состоянию S_m', т.е. 2 класса C_i и C_j : $C_i \sim C_j$. Противоречие.

3) Из (1) и (2) следует, что в любом другом минимальном автомате число состоянию такое же, как в S_m.

Следовательно, все минимальные автоматы отличаются только нумерацией состояний.

Алгоритм минимизации автомата. (алгоритм Ауфенкампа и Хона)

1. С помощью функции выходов ψ разобьём Q на классы первого порядка:

$$Q = C_{11} \cup C_{12} \cup \cdots \cup C_{1m}.$$

$$q \text{ и } q' \in C_{1i}, \text{если } \forall x\, \psi(q,x) = \psi(q',x)$$

2. Каждый класс первого порядка разбивают на классы второго порядка C_{2j} с помощью функции переходов φ. q и $q' \in C_{2j}$, если

$$\forall x\, \varphi(q,x) = \tilde{q} \in C_{1k}$$

$$\varphi(q',x) = \hat{q} \in C_{1k}$$

3. Каждый класс второго порядка разбивают на классы третьего порядка C_{3l} аналогично.

$$q \text{ и } q' \in C_{3l}, \text{если}$$

$$\forall x\ \varphi(q, x) = \tilde{q} \in C_{2t}$$

$$\varphi(q', x) = \hat{q} \in C_{2t}$$

4. И т.д.

Алгоритм заканчивается, если на шаге *k* мы получаем то же разбиение, что и на *k-1* шаге.

Пример:

-
  1.

$C_{11}=\alpha, C_{12}=\beta, C_{13}=\gamma$

$x(t)$ \ $q(t-1)$	α q_1	α q_2	α q_3	β q_4	γ q_5	γ q_6
a_1	0 q_2	0 q_3	0 q_4	1 q_4	1 q_5	1 q_6
a_2	1 q_2	1 q_3	1 q_4	0 q_4	1 q_6	1 q_5

  2.

$x(t)$ \ $q(t-1)$	α			β	γ	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
a_1	q_2 α	q_3 α	q_4 β	q_4 β	q_5 γ	q_6 γ
a_2	q_2 α	q_3 α	q_4 β	q_4 β	q_6 γ	q_5 γ

3.

$C_{21}=\alpha, C_{22}=\beta, C_{23}=\gamma, \; C_{24}=\delta$

$x(t)$ \ $q(t-1)$	α: q_1	α: q_2	β: q_3	γ: q_4	δ: q_5	δ: q_6
a_1	q_2 α	q_3 β	q_4 γ	q_4 γ	q_5 δ	q_6 δ
a_2	q_2 α	q_3 β	q_4 γ	q_4 γ	q_6 δ	q_5 δ

4.

$C_{31}=\alpha, C_{32}=\beta, C_{33}=\gamma, \; C_{34}=\delta$

$C_{35}=\varepsilon$

$x(t)$ \ $q(t-1)$	α: q_1	β: q_2	γ: q_3	δ: q_4	ε: q_5	ε: q_6
a_1	q_2 β	q_3 γ	q_4 δ	q_4 δ	q_5 ε	q_6 ε
a_2	q_2 β	q_3 γ	q_4 δ	q_4 γ	q_6 ε	q_5 ε

5.

$x(t)$ \ $q(t-1)$	α	β	γ	δ	ε	
a_1	β / 0	γ / 0	δ / 0	δ / 1	ε / 1	← Smin
a_2	β / 1	γ / 1	δ / 1	γ / 0	ε / 1	

Обоснование алгоритма

Покажем, что в результате алгоритма классы, полученные на последнем (*k*-ом) шаге, являются классами эквивалентных состояний

Для этого докажем, что

1) Если q и $q' \in C_{ki}$, то $q \sim q'$.

2) Если $q \in C_{ri}$, $q' \in C_{rj}$ (*r* – шаг, когда состояния впервые попали в разные классы). Тогда $q \nsim q'$.

1) Пусть $q, q' \in C_{ki}$. Докажем, что $\forall \alpha\ S(q, \alpha) = S(q', \alpha)$.

$$\forall x \quad \left.\begin{matrix} \varphi(q,x) \\ \varphi(q',x) \end{matrix}\right\} \in C_{kj} \Rightarrow q, q' \in C_{1l} \Rightarrow \psi(q,x) = \psi(q,x) = y_{k1}$$

Пусть $\alpha = x_1 \dots x_n$.

$$\left.\begin{matrix} q \xrightarrow[y_{k_1}]{x_1} q_1 \xrightarrow[y_{k_2}]{x_2} \dots \xrightarrow[y_{k_n}]{x_n} q_n \\ q' \xrightarrow[y_{k_1}]{x_1} q'_1 \xrightarrow[y_{k_2}]{x_2} \dots \xrightarrow[y_{k_n}]{x_n} q'_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow S(q,\alpha) = S(q',\alpha)$$

2) Пусть $q \in C_{ri}$, $q' \in C_{rj}$ $(r \le k)$. Тогда $\exists x : \varphi(q,x) \in C_{r-1,i}$, $\varphi(q',x) \in C_{r-1,j}$

Тогда $\exists x'$ и $\varphi(\varphi(q,x),x')$ $\varphi(\varphi(q',x),x')$

попадут в разные классы порядка $r-1$

И т.д., пока не дойдем до классов первого порядка C_{1m} и C_{1n}(разных),

набрав слово α длины r, причем

$S(q,\alpha) \neq S(q', \alpha)$ (разные выходные слова). Т.е. $q \nsim q'$.

Автомат, все состояния которого эквивалентны, сводится к автомату с одним состоянием (КС).

Минимальный автомат – это автомат, все состояния которого не эквивалентны.

Пример: Какие из автоматов , представленных графами, являются эквивалентными?