

НЕРАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ И НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ

МОРОЗОВ АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

СВОЙСТВА НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

- существенно нелинейная зависимость от параметров состояния;
- большой уровень флуктуаций;
- сильная зависимость от предыстории;
- существенное влияние других необратимых процессов;
- плохая предсказуемость.

ОПИСАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Примеры дифференциальных уравнений:

- второй закон Ньютона;
- уравнения Максвелла;
- уравнения гидродинамики;
- описание диффузии и теплопроводности;
- описание броуновского движения;
- уравнение Шредингера;
- уравнение радиоактивного распада.

ОПИСАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод описания основан на решении дифференциального уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$X(t)|_{t=0} = X_0$$

ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{p}{mkT} f \right)$$

с начальным условием

$$f(p, r, t)|_{t=0} \stackrel{(4)}{=} f_0(r, p)$$

ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Решить уравнение

$$\frac{dX}{dt} + \alpha X = F(t) \quad (5)$$

с начальным условием

$$X(t)|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

Решение

$$X(t) = \int_0^t \exp(-\alpha(t-\tau)) F(\tau) d\tau \quad (7)$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Линейное интегральное уравнение

$$X(t) = \int_0^t G(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

Примеры ядер интегрального уравнения

1) $G(t-\tau) = \exp(-\alpha(t-\tau))$ (9)

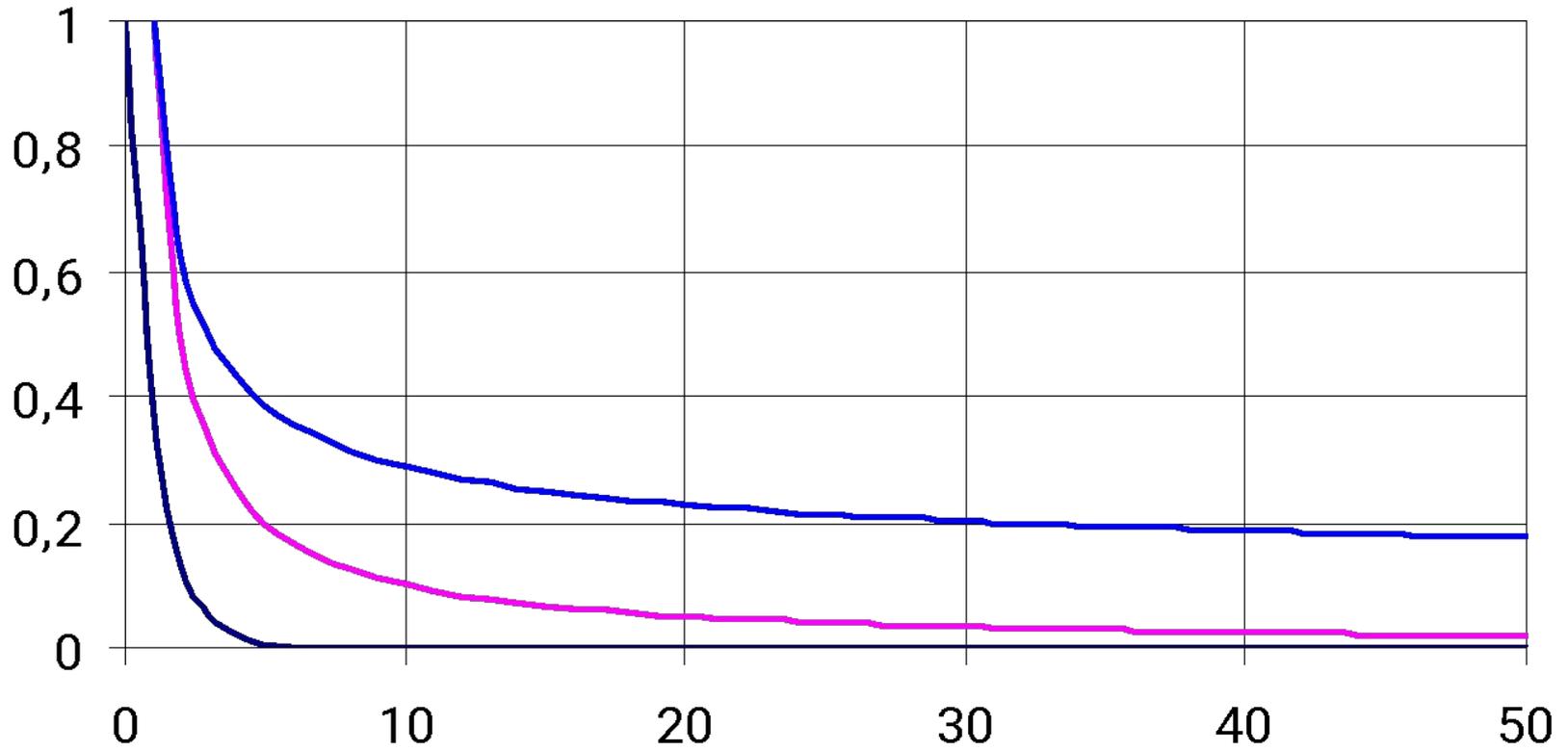
2) (10)

$$G(t-\tau) = 1/(t-\tau)$$

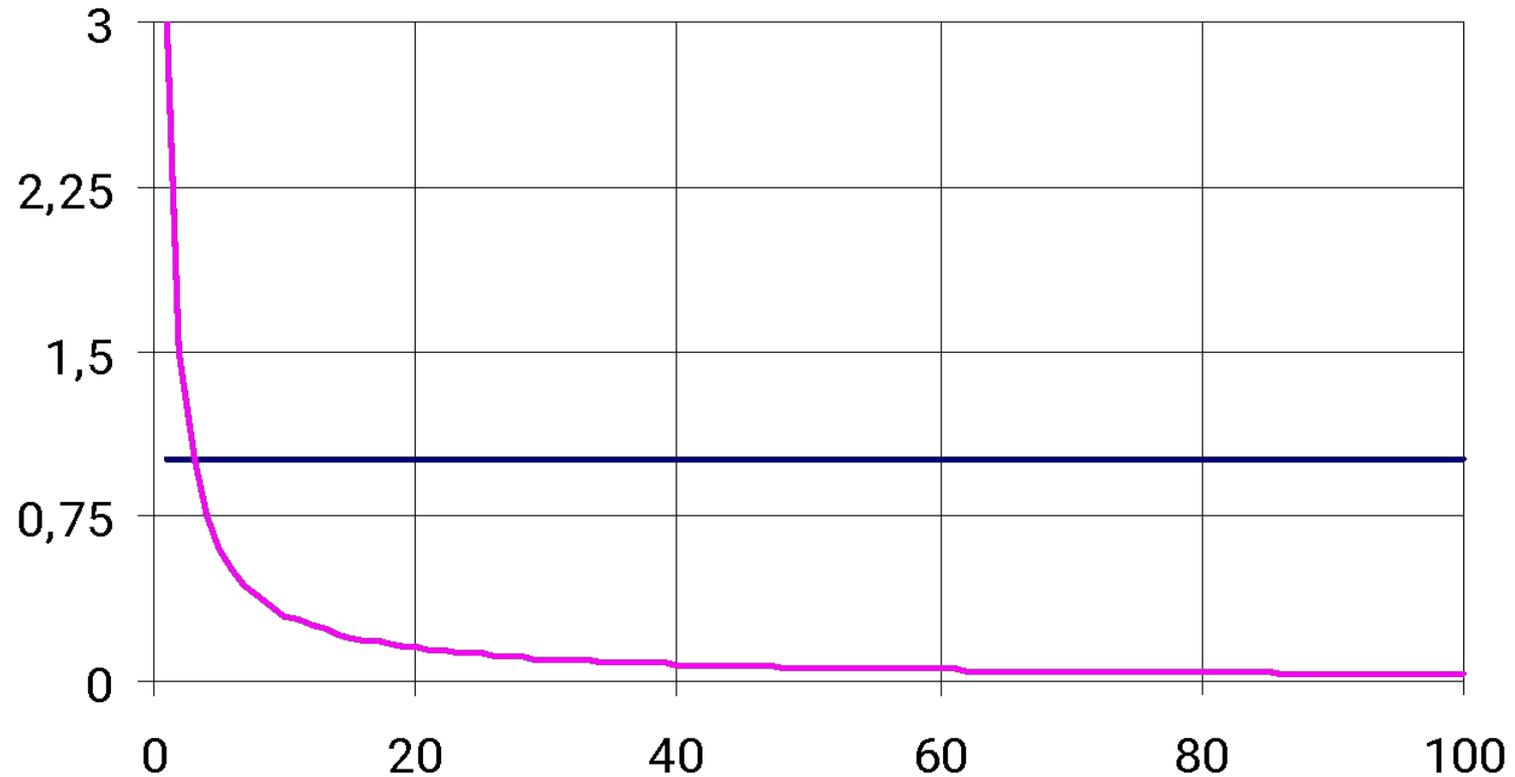
3) (11)

$$G(t-\tau) = 1 - \ln(1 + (t-\tau))$$

ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ ЗАБЫВАНИЯ



СОПОСТАВЛЕНИЕ БЕЛОГО И ФЛИККЕР ШУМОВ

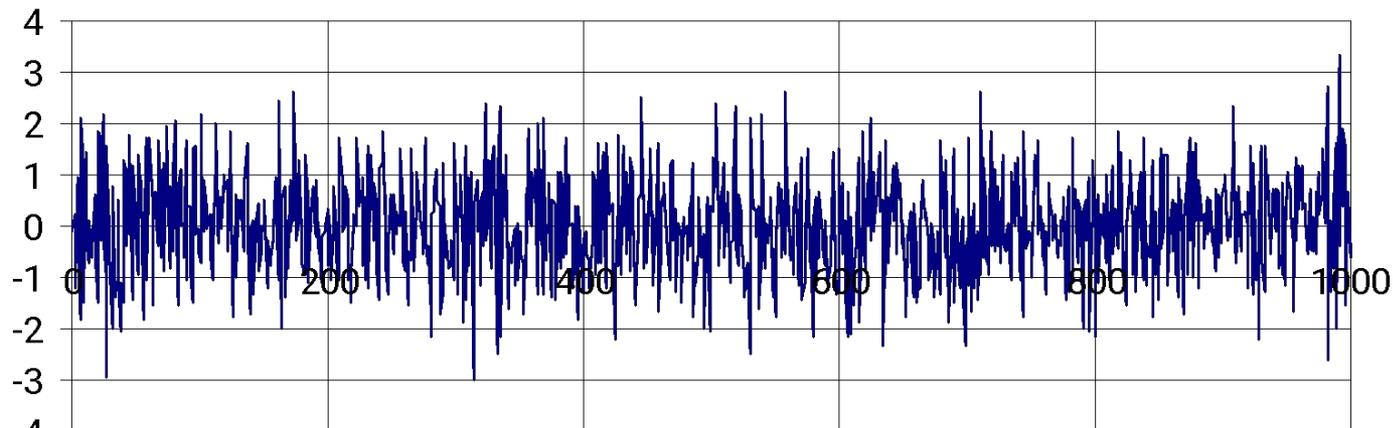


Белый шум $G(\omega) = C$ (12)

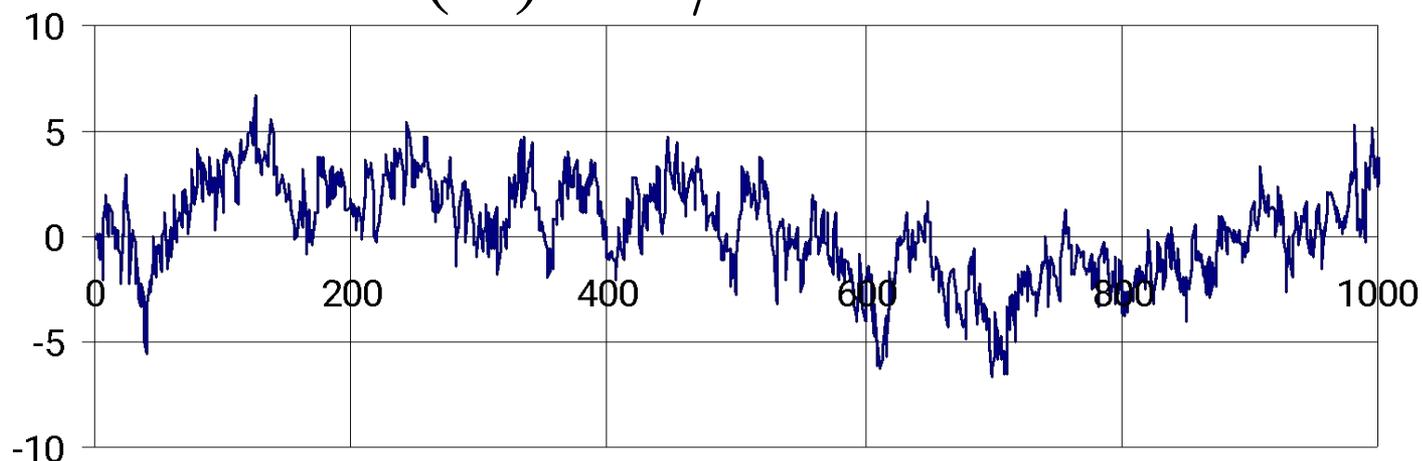
Фликкер шум $G(\omega) = A/\omega$ (13)

СОПОСТАВЛЕНИЕ БЕЛОГО И ФЛИККЕР ШУМОВ

Белый шум $G(\omega) = C$



Фликкер шум $G(\omega) = A/\omega$



БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Уравнение движения частицы в вязкой среде

$$M \frac{dV}{dt} = F(t) + F_c(t) + \xi_V(t) \quad (14)$$

где

$$(15) \quad F_c(t) = -\gamma V(t).$$

Спектральная плотность шума $\xi_V(t)$

$$(16) \quad G_M = 2\gamma MkT.$$

Спектральная плотность флуктуаций скорости $V(t)$

$$(17) \quad G_V(\omega) = \frac{\beta}{\omega^2 + \alpha^2},$$

где $\beta = 2\gamma kT/M$, $\alpha = \gamma/M$.

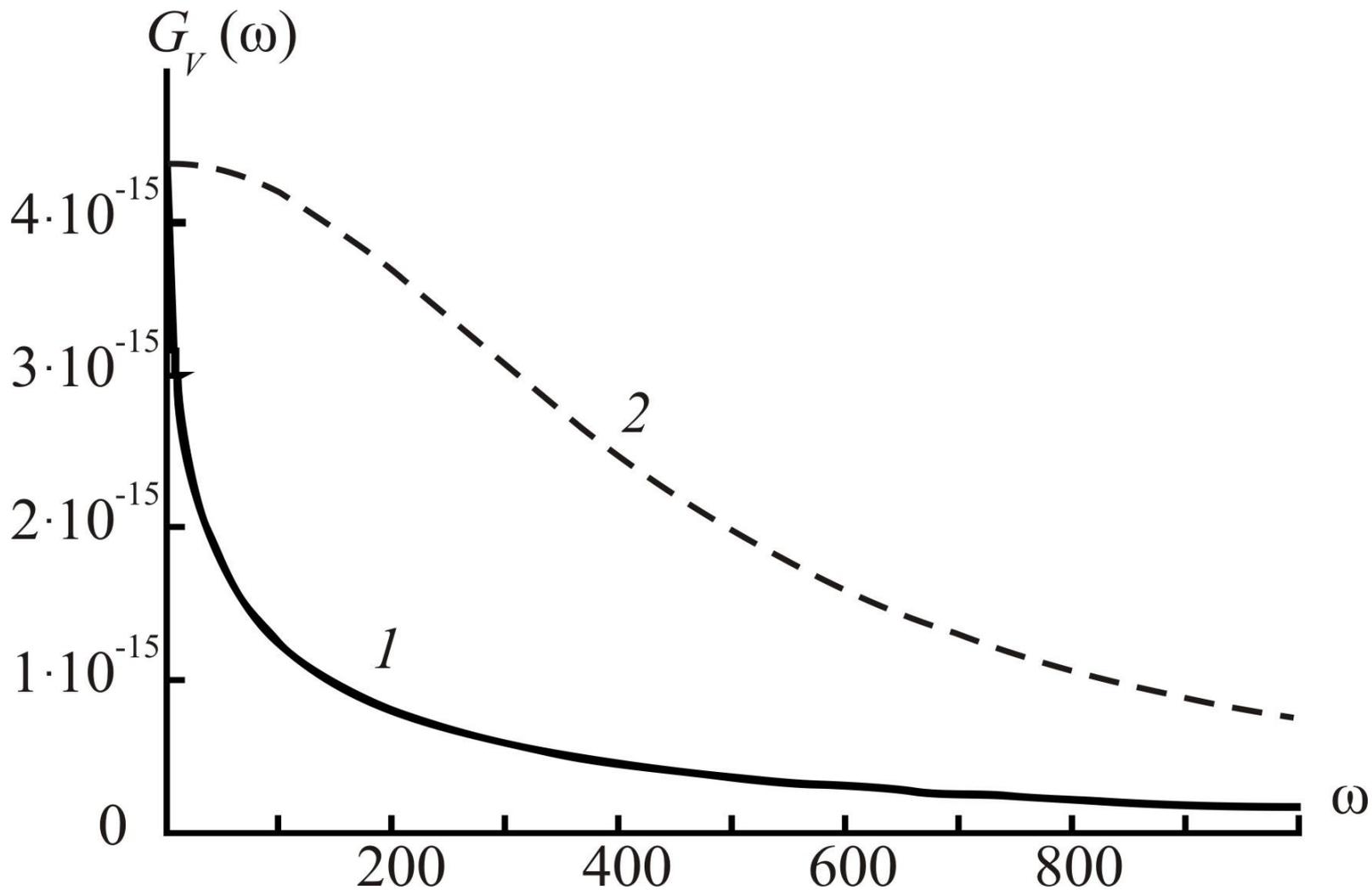
БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ШАРООБРАЗНОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Сила вязкого трения

$$F_c(t) = -2\pi\rho R^3 \left[\frac{1}{3} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} V(t) + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (18)$$

Спектральная плотность флуктуаций скорости

$$G_V(\omega) = \frac{G_\xi}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2 B^2 \pi\omega + A^2 B\sqrt{2\pi\omega} + A^2}. \quad (19)$$



Графики спектральных плотностей,
задаваемые формулами (17) (кривая 2) и
(19) (кривая 1)

НЕМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Примеры немарковских процессов, наблюдаемых в природе и технике:

- фликкер-шум, наблюдаемый в процессах, имеющих различную физическую природу;
- флуктуации кинетических коэффициентов (например, флуктуации коэффициентов диффузии, вязкости и теплопроводности);
- результат интегрирования марковского случайного процесса, в частности, координата броуновской частицы, вычисляемая как интеграл от её скорости;

- отклик динамической системы при воздействии на неё марковского случайного процесса;
- результат измерений с помощью динамической измерительной системы;
- радиотехнические сигналы при их амплитудной и фазовой модуляции совокупностью детерминированных и случайных процессов;
- результат нахождения скользящего среднего от процесса с независимыми значениями;
- результат фильтрации (как временной, так и частотной) марковского случайного процесса.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение Ито

$$dZ = -\alpha Z dt + dW(t) \quad (20')$$

где $W(t)$ – процесс с независимыми приращениями.
Интегральное представление

$$Z(t) = \int_0^t \exp(-\alpha(t - \tau)) dW(\tau). \quad (21)$$

Уравнение для характеристической функции

$$\frac{\partial g_L}{\partial t} = -\alpha \lambda \frac{\partial g_L}{\partial \lambda_L} + \chi(\lambda_L; t_L) g_L \quad (22)$$

Решение уравнения

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \chi \left(\sum_{k=l}^L \lambda_k \exp(-\alpha(t_k - \tau)); \tau \right) d\tau \right] \quad (23)$$

Для винеровского процесса $W(t)$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{\nu}{2\alpha} \sum_{l,k=1}^L \left(\lambda_l \lambda_k \left(\exp(-\alpha|t_l - t_k|) - \exp(-\alpha(t_l + t_k)) \right) \right) \right] \quad (24)$$

Для пуассоновского процесса $W(t)$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\nu \sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \left(g \left(\sum_{k=l}^L \lambda_k \exp(-\alpha(t_k - \tau)) \right) - 1 \right) d\tau \right] \quad (25)$$

НЕМАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС, ЗАДАВАЕМЫЙ ЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Связь плотности термодинамических потоков J_i и термодинамических сил X_k

$$J_i(t) = \int_0^t G_{ik}(t, \tau) X_k(\tau) d\tau \quad (26)$$

При

(27)

$$G_{ik}(t, \tau) = 2L_{ik} \delta(t - \tau)$$

выражение (26) приобретает вид алгебраического равенства

(28)

$$J_i = \sum_{k=1}^N L_{ik} X_k$$

Интегральное преобразование

$$Z(t) = \int_0^t G(t, \tau) dW(\tau). \quad (29)$$

Характеристическая функция

Случай винеровского и пуассоновского процессов

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\int_0^{t_L} \chi \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right) d\tau \right]. \quad (30)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} \nu \sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{\min(t_l, t_k)} G(t_l, \tau) G(t_k, \tau) d\tau \right]. \quad (31)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\nu \int_0^t \left(g \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right) - 1 \right) d\tau \right]$$

ФЛИККЕР-ШУМ

Если ядро интегрального преобразования

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{t - \tau}}, \quad (33)$$

то

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} \nu \left(\sum_{l=1}^L \left(\lambda_l^2 \ln \frac{t}{\delta t} \right) + 4 \sum_{\substack{l, k=1 \\ l > k}}^L \left(\lambda_l \lambda_k \ln \frac{\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l - t_k} + \delta t + \sqrt{\delta t}} \right) \right) \right]. \quad (34)$$

Спектр шума

$$G(\omega) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{2\pi\nu}{\omega}. \quad (35)$$

НЕОБРАТИМЫЕ НЕМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В рамках теории немарковских процессов описаны:

- броуновское движение;
- диффузия;
- теплопроводность;
- тепловое излучение;
- люминесценция;
- реология;
- флуктуации кинетических коэффициентов.

НЕМАРКОВСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Уравнение для осциллятора

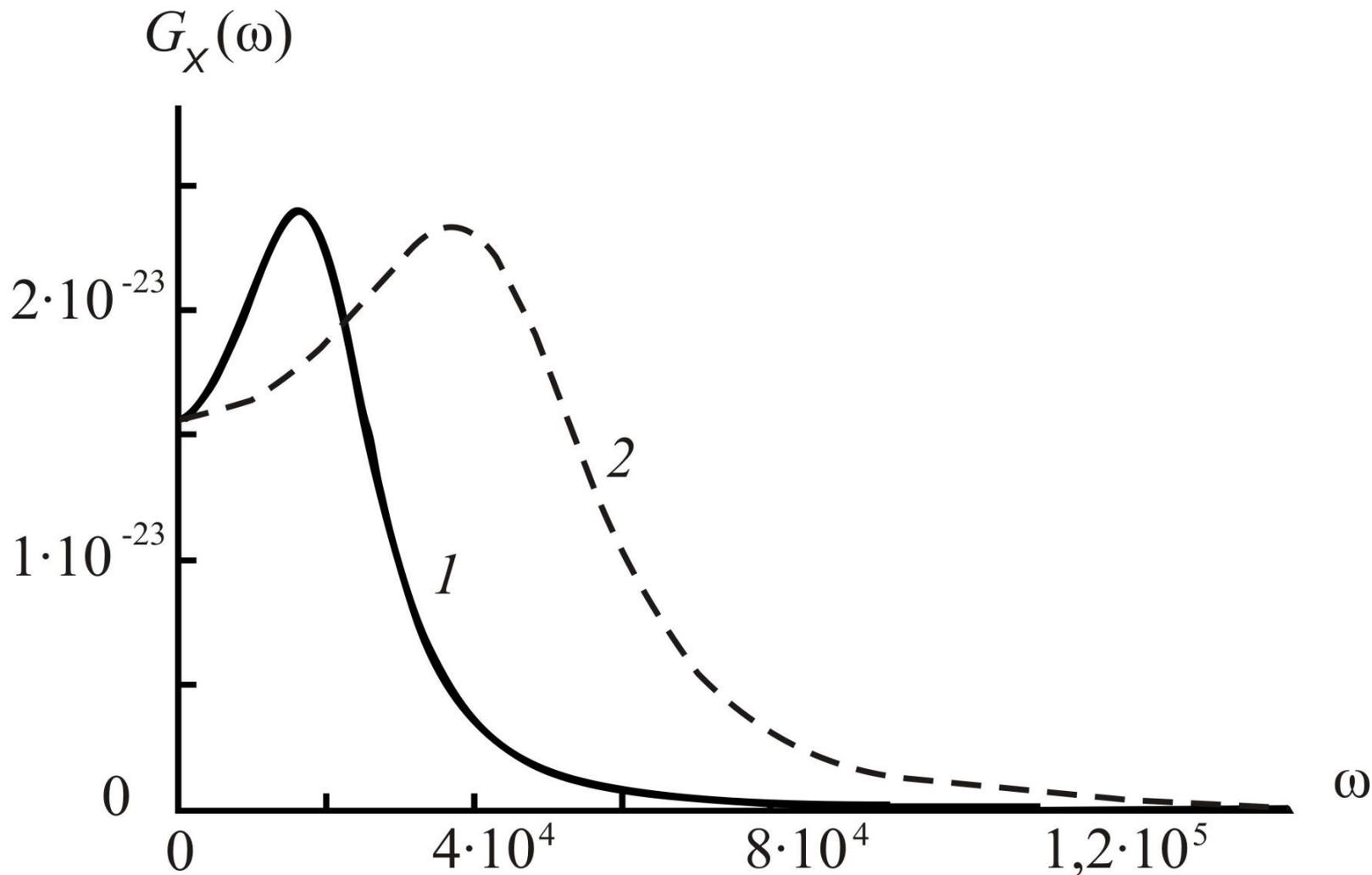
$$Z(t) + A \int_0^t \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}} \right) Z(\tau) d\tau = -\tilde{k}X(t) + \tilde{\xi}(t). \quad (36)$$

Спектральная плотность флуктуаций координаты

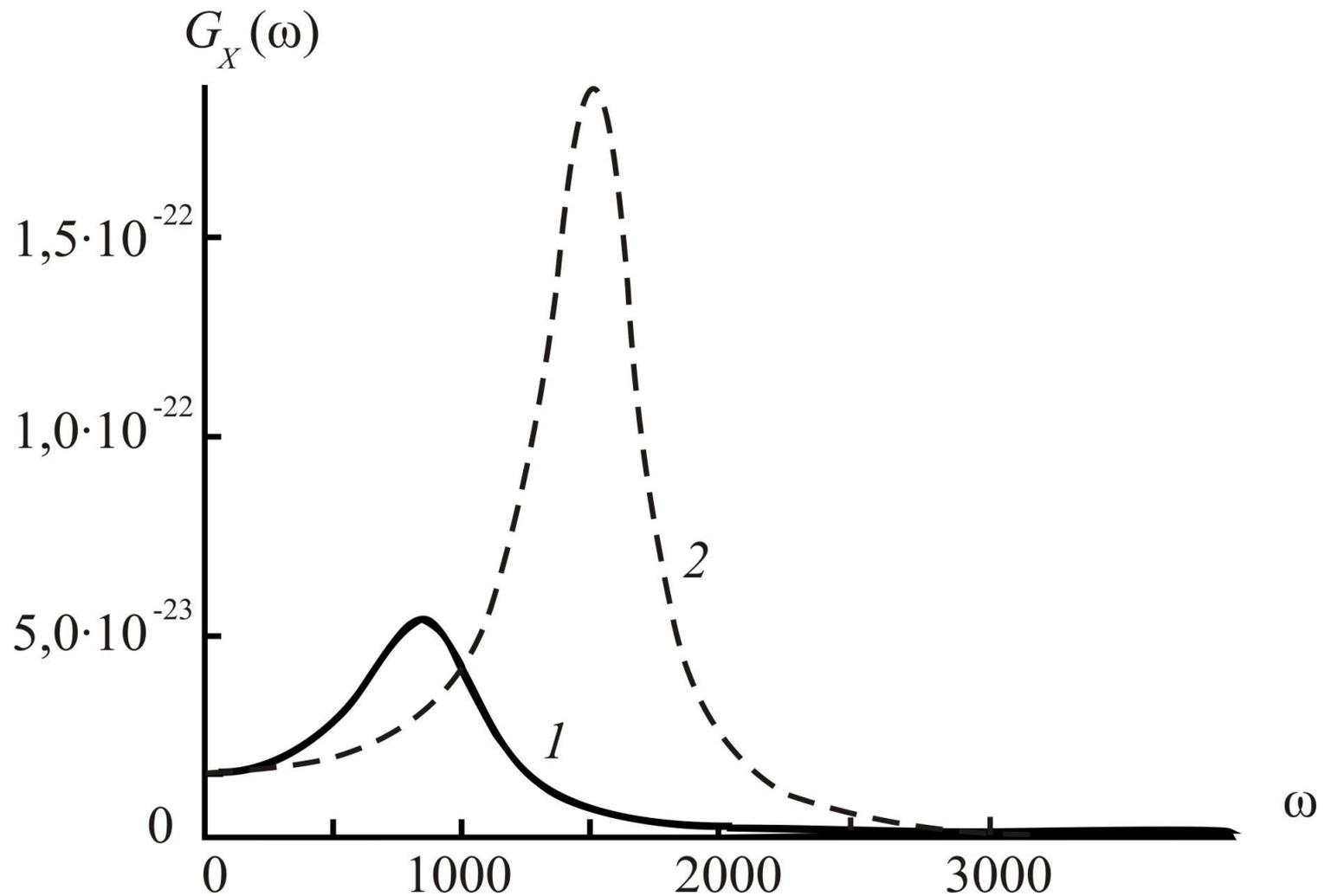
$$G_X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\tilde{\xi}}. \quad (37)$$

Спектральная плотность для классического осциллятора

$$G_X^{\text{клас}}(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + (A'^2 - 2k')\omega^2 + k'^2} G'_{\tilde{\xi}}. \quad (38)$$



Графики спектральных плотностей,
 задаваемые выражениями (37) (кривая 1) и
 (38) (кривая 2) при $R = 10$ мкм



Графики спектральных плотностей,
 задаваемые выражениями (37) (кривая 1) и
 (38) (кривая 2) при $R = 100$ мкм

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕРАВНОВЕСНОСТИ СОСТОЯНИЯ

Формула Найквиста

$$\sigma_U^2 = 4RkT\Delta f \quad (39)$$

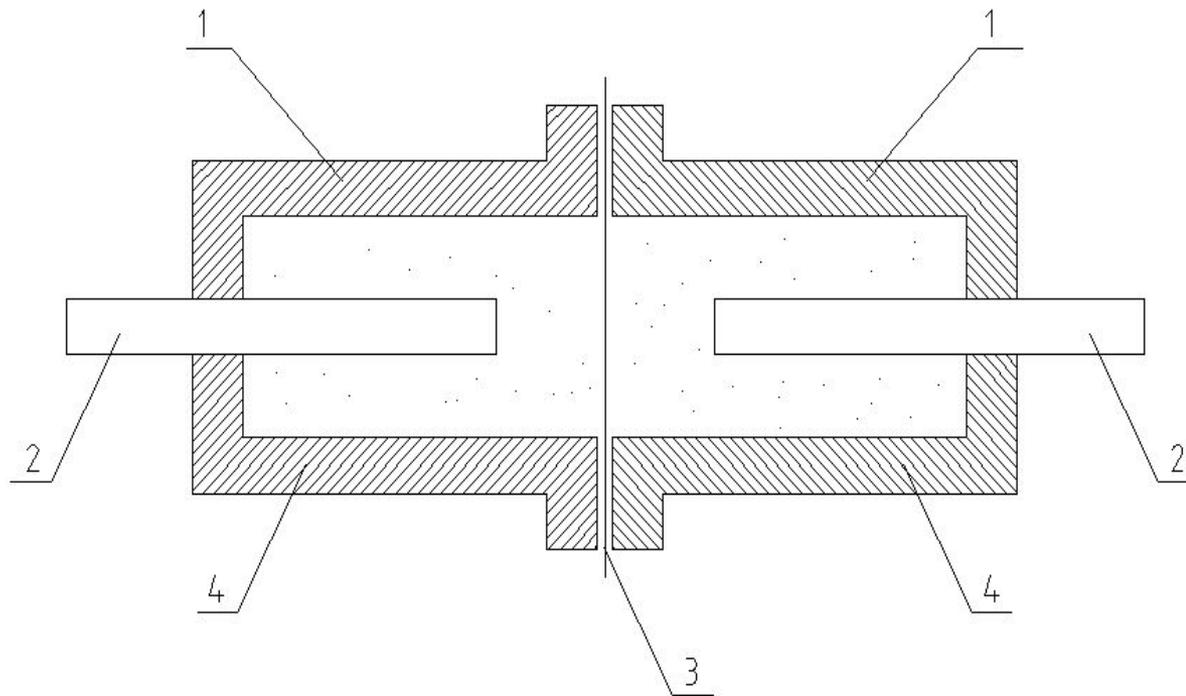
Мера Кульбака

$$H_U = \int_{-\infty}^{\infty} f(U) \ln \left[\frac{f(U)}{f_0(U)} \right] dU$$

где

$$f_0(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_U^2}} \exp \left[-\frac{U^2}{2\sigma_U^2} \right] \quad (41)$$

ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ЯЧЕЙКА



1 – сосуды с электролитом, 2 – электроды,
3 – тонкая лавсановая пленка с отверстиями,
4 - электролит

ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ ЯЧЕЕК с 19 мая по 1 сентября 2009 года

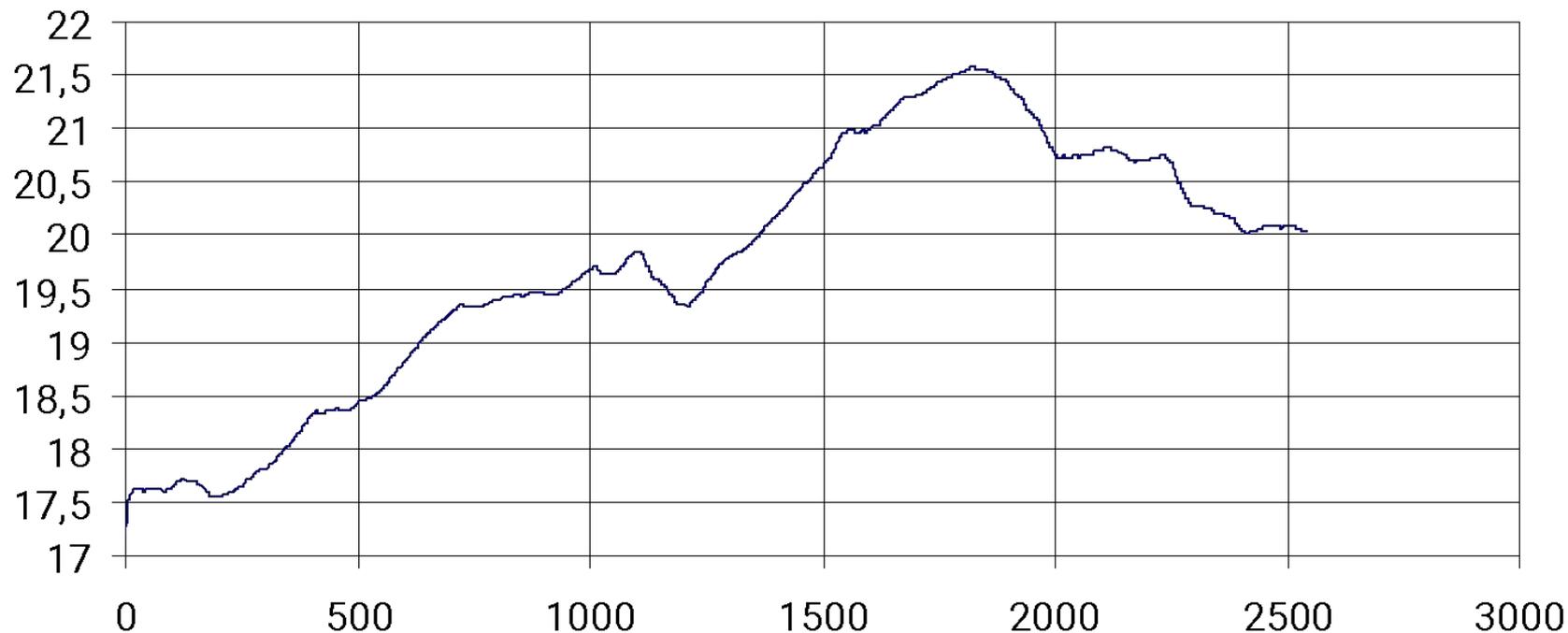
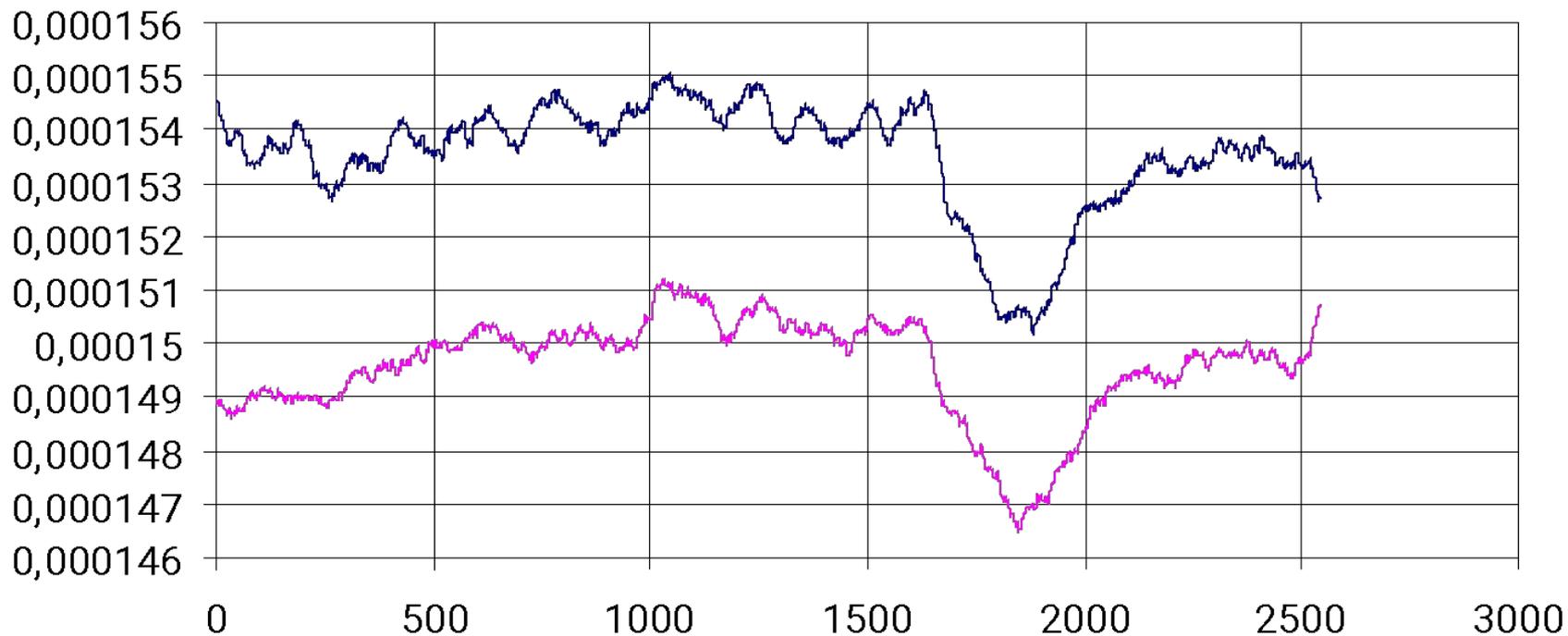


График зависимости температуры

ИЗМЕНЕНИЕ МЕРЫ КУЛЬБАКА ФЛУКТУАЦИЙ НАПРЯЖЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ ЯЧЕЙКАХ с 19 мая по 1 сентября 2009 года



Графики зависимостей меры Кульбака для двух установок

РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Показано, что описание физических процессов с помощью дифференциальных уравнений имеет существенные ограничения.
2. Разработан метод описания необратимых процессов как немарковских.
3. Проведено описание ряда необратимых процессов с использованием интегральных преобразований.
4. Выполнены долговременные измерения меры Кульбака флуктуаций напряжения на электролитической ячейке.