Лекция 9.

Работа, мощность силы. Кинетическая энергия. Теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки и системы. Пример решения задач на использование теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки.

Рекомендуемая литература
1. Лекции по теоретической механике [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю. В. Лоскутов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВПО "Поволж. гос. технол. ун-т". - Йошкар-Ола : ПГТУ, 2015.
2. Соколов Г.М. Теоретическая механика: курс лекций. Ч.2 Динамика, 2011.
3. Лоскутов Ю.В., Журавлев Е.А., Кузовков С.Г. Теоретическая механика: учебное пособие, 2012.

Лекция 9

- **Работа, мощность силы. Кинетическая и потенциальная энергия** – механическое движение в результате взаимодействия механических систем может переноситься с одной механической системы на другую:

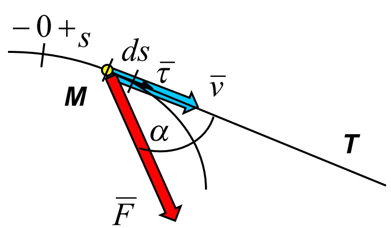
1. - без превращений в другую форму движения, т.е. в качестве того же механического движения,
2. - с превращением в другую форму движения материи (потенциальную энергию, теплоту, электрическую энергию и т.д.)

Каждый из этих случаев имеет свои измерители (меры) механического движения и механического взаимодействия, отстаиваемые в свое время Декартом и Лейбницем (см. таблицу):

	Мера механического движения	Мера механического взаимодействия
Декарт	Количество движения $\bar{Q} = m\bar{v}$	Импульс силы $\bar{S} = \int \bar{F} dt$
Лейбниц	Кинетическая энергия $T = \dfrac{mv^2}{2}$	Работа силы $A = \int F_\tau ds$

В настоящее время принят существование и равноправность обоих (векторных и скалярных) мер движения, каждой из которых соответствуют свои меры механического взаимодействия.
Импульс силы является мерой действия силы при изменении механического движения.
Работа является количественной мерой превращения механического движения в какую-либо другую форму движения материи.

- **Работа силы, приложенной к материальной точке** – Пусть точка приложения переменной по величине и направлению силы перемещается по некоторой произвольной траектории. На малом (элементарном) перемещении силу можно считать постоянной и **элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения** (касательную к траектории движения), **умноженной на элементарное перемещение** :



$$d'A = F_\tau ds = F\cos\alpha \cdot ds$$

Знак элементарной работы определяется величиной угла α и знаком cosα :

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \qquad d'A > 0;$$
$$\alpha > \frac{\pi}{2} \qquad d'A < 0.$$

Поскольку часто более удобно работать с острыми углами, то в этом случае используют острый угол и знак присваивают по следующему простому правилу: **если сила и перемещение совпадают по направлению, то присваивается знак +, если противоположны по направлению, то знак −**.

Элементарная работа может быть записана в виде **скалярного произведения**: $d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ **в проекциях**: $d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$

Работа на конечном перемещении *M M*$_1$ получается суммированием или интегрированием: $A = \sum d'A$

$$\boxed{A = \int_M^{M_1} F_\tau ds} \qquad \boxed{A = \int_M^{M_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}} \qquad \boxed{A = \int_M^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.}$$

Частные случаи: 1. Сила постоянная по величине (*F* = const) и направлению (α =const):

$$\boxed{A = \int_M^{M_1} F\cos\alpha \cdot ds = F\cos\alpha \int_M^{M_1} ds = Fs\cos\alpha.}$$

2. Сила постоянная по величине (*F* = const) и параллельна перемещению (α =0): $\boxed{A = \pm Fs.}$

3. Сила перпендикулярна перемещению: $\boxed{A = 0}$

Лекция 9 (продолжение – 9.2)

Можно доказать следующие теоремы и утверждения:

- **Работа равнодействующей на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении:** $\boxed{A = \sum A_i}$

$$A = \int_M^{M_1} \bar R \cdot d\bar r = \int_M^{M_1} (\bar F_1 + \bar F_2 + \ldots)\cdot d\bar r = \int_M^{M_1} \bar F_1 \cdot d\bar r + \int_M^{M_1} \bar F_2 \cdot d\bar r + \ldots = A_1 + A_1 + \ldots = \sum A_i$$

- **Работа постоянной сил по величине и направлению на составном перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на каждом из составляющих перемещений:** $\boxed{A = \sum A_{si}}$

$$A = \bar F \cdot \bar s = \bar F \cdot (\bar s_1 + \bar s_2 + \ldots) = \bar F \cdot \bar s_1 + \bar F \cdot \bar s_2 + \ldots = A_{s1} + A_{s2} + \ldots = \sum A_{si}$$

- **Работа внутренних сил неизменяемой системы равна нулю:** $\boxed{A^i = 0}$

$$A^i = \int_M^{M_1} (\bar R + \bar R')\cdot d\bar r = \int_M^{M_1} (\bar R - \bar R)\cdot d\bar r = 0; \quad (\bar R' = -\bar R).$$

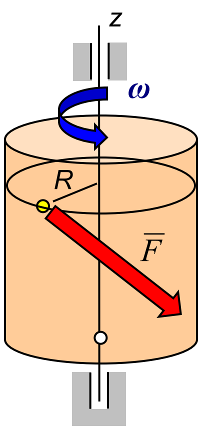
- **Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению силы тяжести на разность высот:** $\boxed{A = -G(z_1 - z)}$

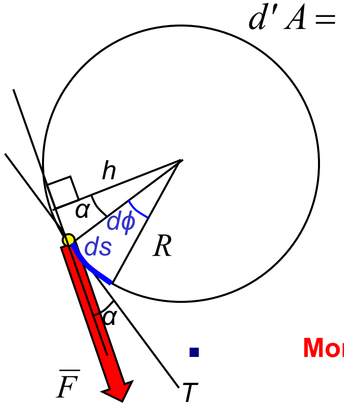
$$A = \int_M^{M_1} G_x dx + G_y dy + G_z dz = \int_M^{M_1} (-G) dz = -Gz\Big|_z^{z_1} = -G(z_1 - z); \quad (G_x = G_y = 0, G_z = -G)$$

- **Работа линейной силы упругости (реакции пружины) при перемещении из состояния равновесия:** $\boxed{A = -c\dfrac{\Delta x^2}{2}.}$

$$A = \int_M^{M_1} R_x dx = \int_M^{M_1} (-cx) dx = -c\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x_1} = -c\frac{x_1^2}{2}; \quad (R_x = -cx)$$

- **Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.** Запишем выражение для элементарной работы силы, приложенной к точке, и выразим элементарное перемещение через угол поворота тела:





$$d'A = F_\tau ds = F\cos\alpha \cdot ds = F\underbrace{\boxed{\cos\alpha \cdot R}}_{h} \cdot d\varphi = Fh \cdot d\varphi = M_z(\bar F)d\varphi.$$

-работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, выражается через момент силы относительно оси.

Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, для конечного угла поворота: $\boxed{A = \int_\varphi^{\varphi_1} M_z(\bar F) d\varphi.}$

В частном случае постоянного значения момента силы относительно оси работа равна произведению момента силы на угол поворота: $\boxed{A = M_z(\bar F)(\varphi_1 - \varphi).}$

- **Мощность** – величина, характеризуемая количеством работы, произведенной в единицу времени: $\boxed{N = \dfrac{d'A}{dt}.}$

Мощность силы, приложенной к точке: $\boxed{N = \dfrac{d'A}{dt} = \dfrac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v_\tau = \bar F \cdot \bar v.}$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся твердому телу: $\boxed{N = \dfrac{d'A}{dt} = \dfrac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega_z = \bar M \cdot \bar\omega.}$

Лекция 9 (продолжение – 9.3)

- **Кинетическая энергия** – характеризует способность механического движения превращаться в эквивалентное количество другого движения:
- **Кинетическая энергия материальной точки:** $\boxed{T = \dfrac{mv^2}{2}}$
- **Кинетическая энергия системы материальных точек:** $\boxed{T = \sum \dfrac{m_k v_k^2}{2}}$
- **Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении:** $\boxed{T = \dfrac{Mv_C^2}{2}}$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum m_k = \frac{v^2}{2}M = \frac{Mv_C^2}{2}; \quad (v_1 = v_2 = \ldots = v = v_C)$$

- **Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении:** $\boxed{T = \dfrac{I_z \omega_z^2}{2}}$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k(\omega_z h_k)^2}{2} = \frac{\omega_z^2}{2}\sum m_k h_k^2 = \frac{I_z \omega_z^2}{2}; \quad (I_z = \sum m_k h_k^2)$$

- **Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении:** $\boxed{T = \dfrac{Mv_C^2}{2} + \dfrac{I_{zC}\omega_z^2}{2}}$

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} = \sum \frac{m_k(\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})\cdot(\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})}{2} = \frac{Mv_C^2}{2} + \boxed{\bar{v}_C \cdot \sum m_k \bar{v}_{kC}} + \boxed{\sum \frac{m_k v_{kC}^2}{2}}.$$

$$\bar{v}_C \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_{kC}}{dt} = \bar{v}_C \cdot \frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{r}_{kC}) = 0; \quad (\sum m_k \bar{r}_{kC} = 0) \qquad \frac{I_{zC}\omega_z^2}{2}$$

- **Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки – Изменение кинетической энергии точки равно работе сил, действующих на точку на том же перемещении:**

Запишем основной закон динамики точки: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{R}$

Выразим ускорение через скорость и умножим левую и правую части соотношения скалярно на дифференциал радиуса-вектора :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot d\bar{r} = \bar{R}\cdot d\bar{r} \quad \text{или} \quad \boxed{m\bar{v}\cdot d\bar{v}} = \boxed{\bar{R}\cdot d\bar{r}}.$$

$$md\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{v}}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \qquad dA$$

Проинтегрируем полученное соотношение:

$$\int d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0}^{M} dA; \quad \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_0}^{v} = A$$

После подстановки пределов получаем:

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A}$$

- **Теорема об изменении кинетической энергии системы – Изменение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на систему на соответствующих перемещениях точек системы:**

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для произвольной точки системы, при этом выделим работу внешних и внутренних сил, приложенных к данной точке:

$$\boxed{\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{mv_{k0}^2}{2} = A_k^i + A_k^e.}$$

Просуммируем левые и правые части соотношений: $\sum \dfrac{m_k v_k^2}{2} - \sum \dfrac{mv_{k0}^2}{2} = \sum A_k^i + \sum A_k^e.$

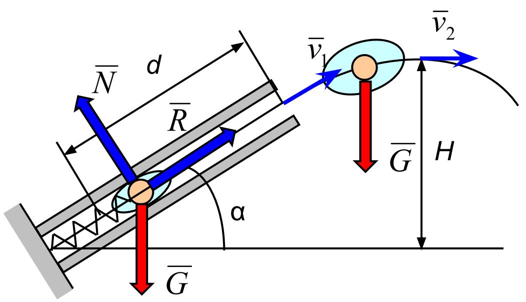
Для неизменяемой системы:

В левой части получили разность кинетических энергий системы: $\boxed{T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e.}$

$$\boxed{T - T_0 = \sum A_k^e; \quad \sum A_k^i = 0}$$

Лекция 9 (продолжение – 9.4)

- **Пример решения задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки** – Снаряд массы *m* выбрасывается пружинным устройством из канала под углом α к горизонту. Длина нерастянутой пружины жесткостью *c* равна длине канала l_0. Перед выстрелом пружина сжимается на величину *d*. Определить скорость снаряда при вылете из канала, а также максимальную высоту полета.



Дано: *α*, *c*, *d*, *m*, l_0
Найти: v_1, *H*

1. Выбираем объект - снаряд
2. Отбрасываем связи – ствол, пружину
3. Заменяем связи реакциями – *N*, *R*
4. Добавляем активные силы – *G*
5. Записываем теорему об изменении кинетической энергии для точки:

$$\boxed{\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A}$$

Начальная скорость снаряда равна нулю: $v_0 = 0.$
Работа сил, приложенных к объекту, равна:

$$A = A_N + A_G + A_R.$$

Работа нормальной реакции равна нулю (направление реакции перпендикулярно перемещению): $A_N = 0.$

Работа силы тяжести: $A_G = -G\Delta h = -mgd\sin\alpha.$

Работа упругой реакции пружины (направление реакции совпадает с перемещением): $A_R = c\dfrac{d^2}{2}.$

Подставляем определенные величины в теорему: $\dfrac{mv_1^2}{2} - 0 = -mgd\sin\alpha + c\dfrac{d^2}{2},$

Отсюда величина скорости вылета снаряда: $\boxed{v_1 = \sqrt{\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha}.}$

Определяем максимальную высоту полета (повторяем шаги 1-5):

$$\boxed{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A}$$

Вертикальная скорость снаряда в наивысшей точке траектории равна нулю : $v_{2y} = 0.$

Горизонтальная скорость снаряда постоянная (из закона сохранения проекции на ось x количества движения точки) и равна:

$$v_{2x} = v_{1x} = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha}\,\cos\alpha.$$

Работа силы тяжести: $A_G = -G\Delta h = -mg(H - l_0\sin\alpha).$

Подставляем определенные величины в теорему:

$$\frac{m\left(\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha\right)\cos^2\alpha}{2} - \frac{m\left(\dfrac{cd^2}{m} - 2gd\sin\alpha\right)}{2} = -mg(H - l_0\sin\alpha).$$

После некоторых сокращений и преобразований:

$$\left(\frac{cd^2}{2m} - gd\sin\alpha\right)\sin^2\alpha = g(H - l_0\sin\alpha).$$

Отсюда максимальная высота полета: $\boxed{H = \left(\dfrac{cd^2}{2mg} - d\sin\alpha\right)\sin^2\alpha + l_0\sin\alpha.}$

Заметим, что предыдущее выражение можно более быстро получить, записывая теорему об изменении кинетической энергии только для вертикальной скорости движения точки, поскольку горизонтальные силы отсутствуют и горизонтальная скорость не изменяется..