

■ Лекция 9.

Работа, мощность силы. Кинетическая энергия. Теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки и системы. Пример решения задач на использование теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки.

Рекомендуемая литература

1. Лекции по теоретической механике [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ю. В. Лоскутов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, ФГБОУ ВПО "Поволж. гос. технол. ун-т". - Йошкар-Ола : ПГТУ, 2015.
2. Соколов Г.М. Теоретическая механика: курс лекций. Ч.2 Динамика, 2011.
3. Лоскутов Ю.В., Журавлев Е.А., Кузовков С.Г. Теоретическая механика: учебное пособие, 2012.

Лекция 9

■ **Работа, мощность силы. Кинетическая и потенциальная энергия** – механическое движение в результате взаимодействия механических систем может переноситься с одной механической системы на другую:

1. - без превращений в другую форму движения, т.е. в качестве того же механического движения,
2. - с превращением в другую форму движения материи (потенциальную энергию, теплоту, электрическую энергию и т.д.)

Каждый из этих случаев имеет свои измерители (меры) механического движения и механического взаимодействия, отсчитываемые в свое время Декартом и Лейбницем (см. таблицу):

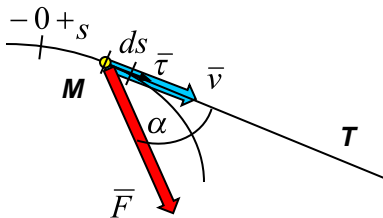
	Мера механического движения	Мера механического взаимодействия
Декарт	Количество движения $\bar{Q} = m\bar{v}$	Импульс силы $\bar{S} = \int \bar{F} dt$
Лейбниц	Кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2}$	Работа силы $A = \int F_{\tau} ds$

В настоящее время принят существование и равноправность обоих (векторных и скалярных) мер движения, каждой из которых соответствуют свои меры механического взаимодействия.

Импульс силы является мерой действия силы при изменении механического движения.

Работа является количественной мерой превращения механического движения в какую-либо другую форму движения материи.

■ **Работа силы, приложенной к материальной точке** – Пусть точка приложения переменной по величине и направлению силы перемещается по некоторой произвольной траектории. На малом (элементарном) перемещении силу можно считать постоянной и **элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения** (касательную к траектории движения), **умноженной на элементарное перемещение** :



$$d'A = F_{\tau} ds = F \cos \alpha \cdot ds$$

Знак элементарной работы определяется величиной угла α и знаком $\cos \alpha$:

$$\begin{matrix} \alpha < \frac{\pi}{2} & d'A > 0; \\ \alpha > \frac{\pi}{2} & d'A < 0. \end{matrix}$$

Поскольку часто более удобно работать с острыми углами, то в этом случае используют острый угол и знак присваивают по следующему простому правилу: **если сила и перемещение совпадают по направлению, то присваивается знак +, если противоположны по направлению, то знак -.**

Элементарная работа может быть записана в виде **скалярного произведения**: $d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ **в проекциях**:

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Работа на конечном перемещении $M M_1$ получается суммированием или интегрированием:

$$A = \sum d'A \quad A = \int_M^{M_1} F_{\tau} ds$$

$$A = \int_M^{M_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$$A = \int_M^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Частные случаи: 1. Сила постоянная по величине ($F = \text{const}$) и направлению ($\alpha = \text{const}$):

$$A = \int_M^{M_1} F \cos \alpha \cdot ds = F \cos \alpha \int_M^{M_1} ds = Fs \cos \alpha.$$

2. Сила постоянная по величине ($F = \text{const}$) и параллельна перемещению ($\alpha = 0$):

$$A = \pm Fs.$$

3. Сила перпендикулярна перемещению:

$$A = 0$$

Лекция 9 (продолжение – 9.2)

Можно доказать следующие теоремы и утверждения:

- Работа равнодействующей на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении:** $A = \sum A_i$

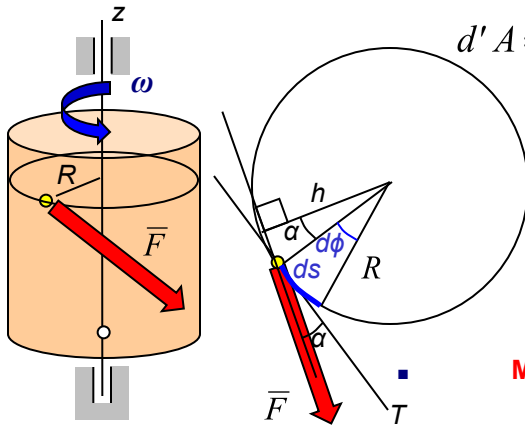
$$A = \int_M^{M_1} \bar{R} \cdot d\bar{r} = \int_M^{M_1} (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots) \cdot d\bar{r} = \int_M^{M_1} \bar{F}_1 \cdot d\bar{r} + \int_M^{M_1} \bar{F}_2 \cdot d\bar{r} + \dots = A_1 + A_1 + \dots = \sum A_i$$
- Работа постоянной сил по величине и направлению на составном перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на каждом из составляющих перемещений:** $A = \sum A_{si}$

$$A = \bar{F} \cdot \bar{s} = \bar{F} \cdot (\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \dots) = \bar{F} \cdot \bar{s}_1 + \bar{F} \cdot \bar{s}_2 + \dots = A_{s1} + A_{s2} + \dots = \sum A_{si}$$
- Работа внутренних сил неизменяемой системы равна нулю:** $A^i = 0$

$$A^i = \int_M^{M_1} (\bar{R} + \bar{R}') \cdot d\bar{r} = \int_M^{M_1} (\bar{R} - \bar{R}) \cdot d\bar{r} = 0; \quad (\bar{R}' = -\bar{R}).$$
- Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению силы тяжести на разность высот:** $A = -G(z_1 - z)$

$$A = \int_M^{M_1} G_x dx + G_y dy + G_z dz = \int_M^{M_1} (-G) dz = -Gz|_z^{z_1} = -G(z_1 - z); \quad (G_x = G_y = 0, G_z = -G)$$
- Работа линейной силы упругости (реакции пружины) при перемещении из состояния равновесия:** $A = -c \frac{\Delta x^2}{2}$

$$A = \int_M^{M_1} R_x dx = \int_M^{M_1} (-cx) dx = -c \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x_1} = -c \frac{x_1^2}{2}; \quad (R_x = -cx)$$
- Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.** Запишем выражение для элементарной работы силы, приложенной к точке, и выразим элементарное перемещение через угол поворота тела:



$$d' A = F_\tau ds = F \cos \alpha \cdot ds = F \cos \alpha \cdot R \cdot d\phi = Fh \cdot d\phi = M_z(\bar{F}) d\phi.$$

- работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, выражается через момент силы относительно оси.

$$A = \int_\phi^{\phi_1} M_z(\bar{F}) d\phi.$$

Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, для конечного угла поворота:

$$A = M_z(\bar{F})(\phi_1 - \phi).$$

В частном случае постоянного значения момента силы относительно оси работа равна произведению момента силы на угол поворота:

Мощность – величина, характеризующаяся количеством работы, произведенной в единицу времени:

Мощность силы, приложенной к точке:

$$N = \frac{d' A}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v_\tau = \bar{F} \cdot \bar{v}.$$

$$N = \frac{d' A}{dt}.$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся твердому телу:

$$N = \frac{d' A}{dt} = \frac{M_z d\phi}{dt} = M_z \omega_z = \bar{M} \cdot \bar{\omega}.$$

Лекция 9 (продолжение – 9.3)

- **Кинетическая энергия** – характеризует способность механического движения превращаться в эквивалентное количество другого движения:

- Кинетическая энергия материальной точки:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

- Кинетическая энергия системы материальных точек:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

- Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2}$$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = \frac{v^2}{2} M = \frac{Mv_C^2}{2}; \quad (v_1 = v_2 = \dots = v = v_C)$$

- Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении:

$$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$$

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega_z h_k)^2}{2} = \frac{\omega_z^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{I_z \omega_z^2}{2}; \quad (I_z = \sum m_k h_k^2)$$

- Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2}$$

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k}{2} = \sum \frac{m_k (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC}) \cdot (\bar{v}_C + \bar{v}_{kC})}{2} = \frac{Mv_C^2}{2} + \bar{v}_C \cdot \sum m_k \bar{v}_{kC} + \sum \frac{m_k v_{kC}^2}{2}$$

$$\bar{v}_C \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_{kC}}{dt} = \bar{v}_C \cdot \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_{kC}) = 0; \quad (\sum m_k \bar{r}_{kC} = 0) \quad \leftarrow \frac{I_{zC} \omega_z^2}{2} \quad \leftarrow$$

- **Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки** – Изменение кинетической энергии точки равно работе сил, действующих на точку на том же перемещении:

Запишем основной закон динамики точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{R}$$

Выразим ускорение через скорость и умножим левую и правую части соотношения скалярно на дифференциал радиуса-вектора:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{R} \cdot d\bar{r} \quad \text{или} \quad m\bar{v} \cdot d\bar{v} = \bar{R} \cdot d\bar{r}$$

$$md \left(\frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} \right) = d \left(\frac{mv^2}{2} \right) \quad dA$$

Проинтегрируем полученное соотношение:

$$\int d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \int_{M_0}^M dA; \quad \left. \frac{mv^2}{2} \right|_{v_0} = A$$

После подстановки пределов получаем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

- **Теорема об изменении кинетической энергии системы** – Изменение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на систему на соответствующих перемещениях точек системы:

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для произвольной точки системы, при этом выделим работу внешних и внутренних сил, приложенных к данной точке:

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{mv_{k0}^2}{2} = A_k^i + A_k^e$$

Просуммируем левые и правые части соотношений:

В левой части получили разность кинетических энергий системы:

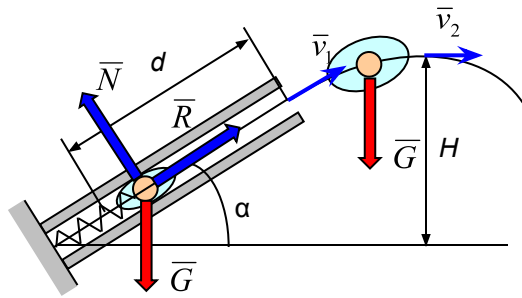
$$T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e$$

Для неизменяемой системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e; \quad \sum A_k^i = 0$$

Лекция 9 (продолжение – 9.4)

- Пример решения задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки** – Снаряд массы m выбрасывается пружинным устройством из канала под углом α к горизонту. Длина нерастянутой пружины жесткостью c равна длине канала l_0 . Перед выстрелом пружина сжимается на величину d . Определить скорость снаряда при вылете из канала, а также максимальную высоту полета.



Определяем максимальную высоту полета (повторяем шаги 1-5):

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A$$

Дано: α, c, d, m, l_0
Найти: v_1, H

1. Выбираем объект - снаряд
2. Отбрасываем связи – ствол, пружину
3. Заменяем связи реакциями – N, R
4. Добавляем активные силы – G
5. Записываем теорему об изменении кинетической энергии для точки:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

Подставляем определенные величины в теорему: $\frac{mv_1^2}{2} - 0 = -mgd \sin \alpha + c \frac{d^2}{2}$,

Отсюда величина скорости вылета снаряда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha}$$

Начальная скорость снаряда равна нулю: $v_0 = 0$.
Работа сил, приложенных к объекту, равна:

$$A = A_N + A_G + A_R$$

Работа нормальной реакции равна нулю (направление реакции перпендикулярно перемещению): $A_N = 0$.

Работа силы тяжести: $A_G = -G\Delta h = -mgd \sin \alpha$.

Работа упругой реакции пружины (направление реакции совпадает с перемещением): $A_R = c \frac{d^2}{2}$.

Вертикальная скорость снаряда в наивысшей точке траектории равна нулю: $v_{2y} = 0$.

Работа силы тяжести: $A_G = -G\Delta h = -mg(H - l_0 \sin \alpha)$.

Подставляем определенные величины в теорему:

$$\frac{m \left(\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \right) \cos^2 \alpha}{2} - \frac{m \left(\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha \right)}{2} = -mg(H - l_0 \sin \alpha)$$

После некоторых сокращений и преобразований:

$$\left(\frac{cd^2}{2m} - gd \sin \alpha \right) \sin^2 \alpha = g(H - l_0 \sin \alpha)$$

Заметим, что предыдущее выражение можно более быстро получить, записывая теорему об изменении кинетической энергии только для вертикальной скорости движения точки, поскольку горизонтальные силы отсутствуют и горизонтальная скорость не изменяется..

Горизонтальная скорость снаряда постоянная (из закона сохранения проекции на ось x количества движения точки) и равна:

$$v_{2x} = v_{1x} = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd \sin \alpha} \cos \alpha$$

Отсюда максимальная высота полета:

$$H = \left(\frac{cd^2}{2mg} - d \sin \alpha \right) \sin^2 \alpha + l_0 \sin \alpha$$