

ТЕМА 8: **Определенный интеграл.**

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Свойства определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница

Площадь криволинейной трапеции

Замена переменной в определенном интеграле

Интегрирование по частям для определенного интеграла

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Разобьем данный отрезок на n частичных интервалов. В каждом интервале выберем произвольную точку ξ_i и составим *интегральную сумму*

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, где Δx_i – длина i -го интервала. *Определенный интеграл* от функции $f(x)$ в пределах от a до b

вводится как предел суммы бесконечно большого числа слагаемых, каждое из которых стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные функции на замкнутом интервале $[a, b]$.

$$1. \int_a^b 1 dx = b - a$$

$$2. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k - \text{константа};$$

$$3. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ где } a < c < b;$$

$$5. \text{ Если } 0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in [a, b], \text{ то } 0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$6. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$7. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Площадь криволинейной трапеции

Площадь фигуры, ограниченной осью Ox , двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $f(x)$ (рисунок 1), определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

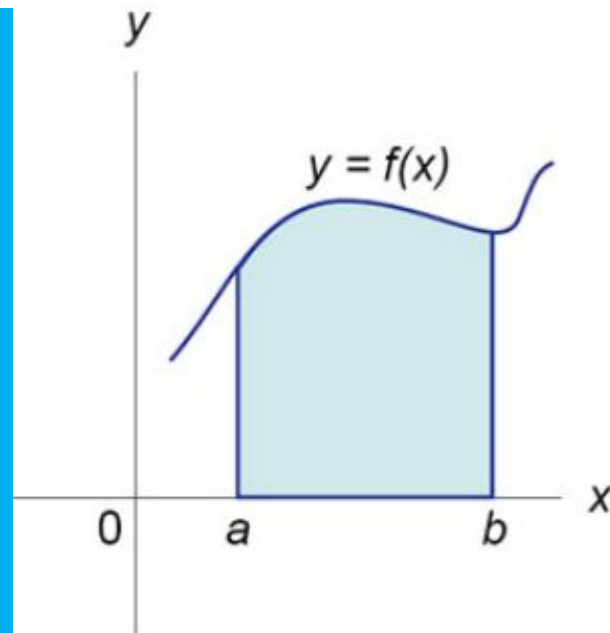


Рис.1

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ - первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. Если $f(x) \geq g(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$, то площадь области, ограниченной двумя кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и вертикальными линиями $x = a$, $x = b$ (рисунок 2), определяется формулой

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a).$$

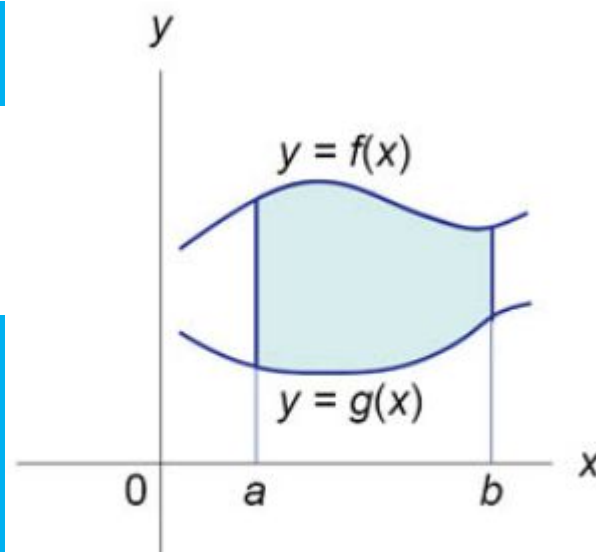


Рис.2

Интегрирование по частям для определенного интеграла

В этом случае формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du,$$

где $uv|_a^b$ означает разность значений произведения функций uv при $x = b$ и $x = a$.

Пример 1

Вычислить интеграл $\int_0^2 (x^3 - x^2) dx$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_0^2 (x^3 - x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}) dt$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}) dt &= \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \left(\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Неопределённый интеграл

Неопределённый интеграл, его свойства.

Таблица производных основных элементарных функций

Определение первообразной и неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных некоторой функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается как

$$\int f(x) dx.$$

Таким образом, если F - некоторая частная первообразная, то справедливо выражение

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла

В приведенных ниже формулах f и g - функции переменной x , F - первообразная функции f и a, k, C - постоянные величины.

- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$
- $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

Таблица интегралов

В формулах ниже предполагается, что a, p ($p \neq 1$), C - действительные постоянные, b - основание показательной функции ($b \neq 1, b > 0$).

$$1. \int 0 \cdot dx = c.$$

$$2. \int 1 \cdot dx = x + c.$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1).$$

$$4. \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c.$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c.$$

$$6. \int e^x dx = e^x + c.$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right).$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c \quad (x \neq \pi n, n \in Z).$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c \quad (|x| < 1).$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c \quad (|x| < |a|, a \neq 0).$$

$$14. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0).$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \quad (a \neq 0, |x| \neq |a|).$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c \quad (a \neq 0, \text{ в случае знака «минус» должно быть } |x| > |a|).$$

Пример 1

Вычислить $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx &= \int \sqrt{x} dx + \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C \\ &= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C.\end{aligned}$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$.

Решение.

Преобразуя выражение и применяя формулу для интеграла степенной функции, получаем

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int \frac{3dx}{\sqrt[3]{x}} + \int \frac{2dx}{\sqrt{x}} = 3 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{9x^{\frac{2}{3}}}{2} + 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + 4\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

ДОМАШНЕЕ

Вычислить неопределенный
интеграл

1

$$\int (x^4 - 3x^2 + 5x) dx.$$

2

$$\int 2^x dx.$$

Вычислить определенный
интеграл

ВСЕ
ПРИМЕРЫ

1006

①	$\int_{-3}^2 (2x - 3) dx;$	②	$\int_{-2}^{-1} (5 - 4x) dx;$	③	$\int_{-1}^0 (1 - 3x^2) dx;$
④	$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx;$	⑤	$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx.$		