

# ТЕМА 8: **Определенный интеграл.**

**Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.**

***Свойства определенного интеграла***

***Формула Ньютона-Лейбница***

***Площадь криволинейной трапеции***

***Замена переменной в определенном интеграле***

***Интегрирование по частям для определенного интеграла***

## Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на замкнутом интервале  $[a, b]$ . Разобьем данный отрезок на  $n$  частичных интервалов. В каждом интервале выберем произвольную точку  $\xi_i$  и составим *интегральную сумму*

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i$  – длина  $i$ -го интервала. *Определенный интеграл* от функции  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$

вводится как предел суммы бесконечно большого числа слагаемых, каждое из которых стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ .

### Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что  $f(x)$  и  $g(x)$  - непрерывные функции на замкнутом интервале  $[a, b]$ .

$$1. \int_a^b 1 dx = b - a$$

$$2. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k - \text{константа};$$

$$3. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ где } a < c < b;$$

$$5. \text{ Если } 0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in [a, b], \text{ то } 0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$6. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$7. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

### Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на замкнутом интервале  $[a, b]$ . Если  $F(x)$  - первообразная функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

### Площадь криволинейной трапеции

Площадь фигуры, ограниченной осью  $Ox$ , двумя вертикальными прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и графиком функции  $f(x)$  (рисунок 1), определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

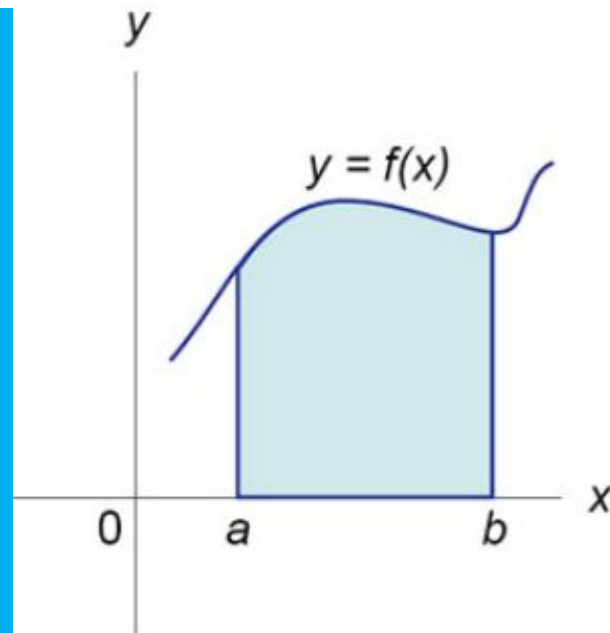


Рис.1

Пусть  $F(x)$  и  $G(x)$  - первообразные функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , соответственно. Если  $f(x) \geq g(x)$  на замкнутом интервале  $[a, b]$ , то площадь области, ограниченной двумя кривыми  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  и вертикальными линиями  $x = a$ ,  $x = b$  (рисунок 2), определяется формулой

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a).$$

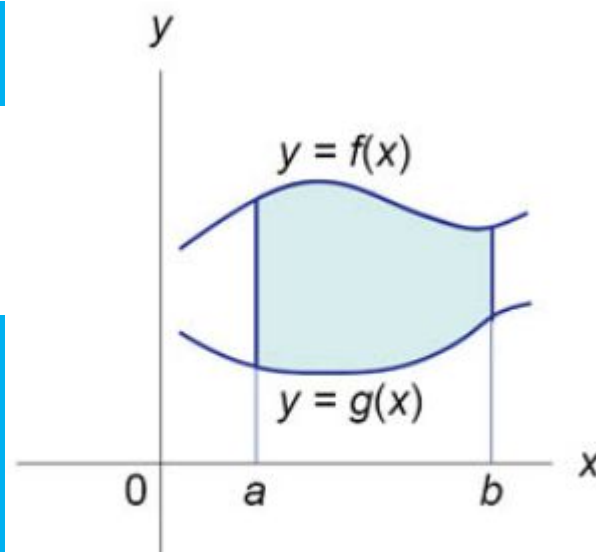


Рис.2

**Интегрирование по частям для определенного интеграла**

В этом случае формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du,$$

где  $uv|_a^b$  означает разность значений произведения функций  $uv$  при  $x = b$  и  $x = a$ .

### Пример 1

Вычислить интеграл  $\int_0^2 (x^3 - x^2) dx$ .

*Решение.*

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_0^2 (x^3 - x^2) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left( \frac{16}{4} - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

### Пример 2

Вычислить интеграл  $\int_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}) dt$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}) dt &= \int_0^1 \left( t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \left( \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

# Неопределённый интеграл

## Неопределённый интеграл, его свойства.

### Таблица производных основных элементарных функций

**Определение первообразной и неопределенного интеграла**

Функция  $F(x)$  называется *первообразной* функции  $f(x)$ , если

$$F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных некоторой функции  $f(x)$  называется *неопределенным интегралом* функции  $f(x)$  и обозначается как

$$\int f(x) dx.$$

Таким образом, если  $F$  - некоторая частная первообразная, то справедливо выражение

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

## Свойства неопределенного интеграла

В приведенных ниже формулах  $f$  и  $g$  - функции переменной  $x$ ,  $F$  - первообразная функции  $f$  и  $a, k, C$  - постоянные величины.

- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$
- $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$



# Таблица интегралов

В формулах ниже предполагается, что  $a, p$  ( $p \neq 1$ ),  $C$  - действительные постоянные,  $b$  - основание показательной функции ( $b \neq 1, b > 0$ ).

$$1. \int 0 \cdot dx = c.$$

$$2. \int 1 \cdot dx = x + c.$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1).$$

$$4. \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c.$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c.$$

$$6. \int e^x dx = e^x + c.$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right).$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c \quad (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c \quad (|x| < 1).$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c \quad (|x| < |a|, a \neq 0).$$

$$14. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0).$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \quad (a \neq 0, |x| \neq |a|).$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c \quad (a \neq 0, \text{ в случае знака «минус» должно быть } |x| > |a|).$$

### Пример 1

Вычислить  $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$ .

Решение.

$$\begin{aligned}\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx &= \int \sqrt{x} dx + \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C \\ &= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C.\end{aligned}$$

## Пример 2

Вычислить интеграл  $\int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$ .

*Решение.*

Преобразуя выражение и применяя формулу для интеграла степенной функции, получаем

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int \frac{3dx}{\sqrt[3]{x}} + \int \frac{2dx}{\sqrt{x}} = 3 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{9x^{\frac{2}{3}}}{2} + 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + 4\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

# ДОМАШНЕЕ

Вычислить неопределенный  
интеграл

1

$$\int (x^4 - 3x^2 + 5x) dx.$$

2

$$\int 2^x dx.$$

Вычислить определенный  
интеграл

ВСЕ  
ПРИМЕРЫ

1006

①	$\int_{-3}^2 (2x - 3) dx;$	②	$\int_{-2}^{-1} (5 - 4x) dx;$	③	$\int_{-1}^0 (1 - 3x^2) dx;$
④	$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx;$	⑤	$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx.$		