ТЕМА 8:

Определенный интеграл.

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Свойства определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница

Площадь криволинейной трапеции

Замена переменной в определенном интеграле

Интегрирование по частям для определенного интеграла

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Разобьем данный отрезок на n частичных интервалов. В каждом интервале выберем произвольную точку ξ_i и составим *интегральную сумму* $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, где Δx_i – длина i-го интервала. *Определенный интеграл* от функции $f(x)$ в пределах от a до b вводится как предел суммы бесконечно большого числа слагаемых, каждое из которых стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные функции на замкнутом интервале $[a, b]$.

1. $\int\limits_a^b 1dx = b - a$

2. $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx,$ где k - константа;

3. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$

4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$ где $a < c < b;$

5. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то $0 \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

6. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$

7. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Если $F(x)$ - *первообразная* функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Площадь криволинейной трапеции

Площадь фигуры, ограниченной осью Ox, двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $f(x)$ (рисунок 1), определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

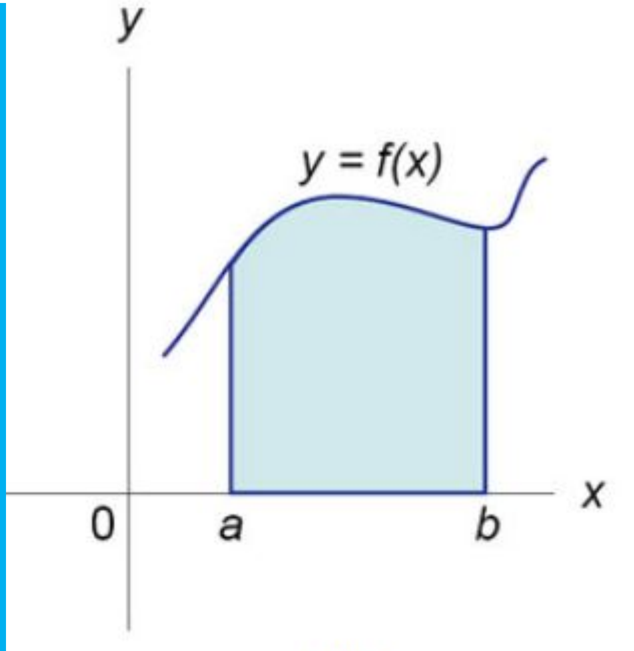

Рис.1

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ - первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. Если $f(x) \geq g(x)$ на замкнутом интервале $[a,b]$, то площадь области, ограниченной двумя кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и вертикальными линиями $x = a$, $x = b$ (рисунок 2), определяется формулой

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a).$$

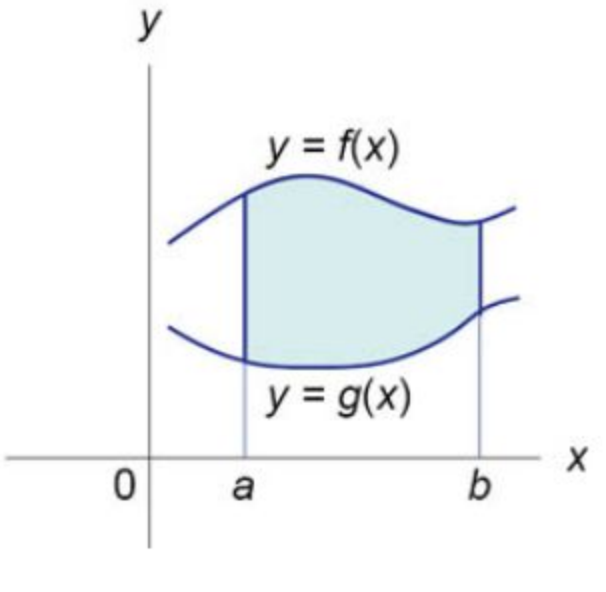

Рис.2

Интегрирование по частям для определенного интеграла

В этом случае формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

где $uv\big|_a^b$ означает разность значений произведения функций uv при $x = b$ и $x = a$.

Пример 1

Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 (x^3 - x^2)\,dx$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int\limits_0^2 (x^3 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t})\,dt$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 (\sqrt[3]{t} - \sqrt{t})\,dt = \int\limits_0^1 \left(t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \left(\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{12}.$$

Неопределённый интеграл
Неопределённый интеграл, его свойства.
Таблица производных основных элементарных функций

Определение первообразной и неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных некоторой функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается как

$$\int f(x)\,dx.$$

Таким образом, если F - некоторая частная первообразная, то справедливо выражение

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла

В приведенных ниже формулах f и g - функции переменной x, F - первообразная функции f и a, k, C – постоянные величины.

- $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$
- $\int f(ax)\, dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$
- $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Таблица интегралов

В формулах ниже предполагается, что a, $p\,(p \neq 1)$, C – - действительные постоянные, b – основание показательной функции $(b \neq 1, b > 0)$.

1. $\int 0 \cdot dx = c$.
2. $\int 1 \cdot dx = x + c$.
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$.
4. $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$.
5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$.
6. $\int e^{x} dx = e^{x} + c$.
7. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.
8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$.

9. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$.

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \right)$.

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c \quad (x \neq \pi n,\ n \in Z)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c \quad (|x| < 1)$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c \quad (|x| < |a|, \quad a \neq 0)$.

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + c = -arcctg\, x + c$.

15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0)$.

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \quad (a \neq 0,\ |x| \neq |a|)$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$ ($a \neq 0$, в случае знака «минус» должно быть $|x| > |a|$).

Пример 1

Вычислить $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

Решение.

3

$$\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\int\sqrt{x}dx+\int\sqrt[3]{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C$$

$$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+C.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx.$

Решение.

Преобразуя выражение и применяя формулу для интеграла степенной функции, получаем

3 3

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \frac{3dx}{\sqrt[3]{x}} + \int \frac{2dx}{\sqrt{x}} = 3 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{9x^{\frac{2}{3}}}{2} + 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + 4\sqrt{x} + C.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Вычислить неопределенный интеграл

1. $\int (x^4 - 3x^2 + 5x)\,dx.$

2. $\int 2^x\,dx.$

Вычислить определенный интеграл

ВСЕ ПРИМЕРЫ

1006 1) $\int_{-3}^{2}(2x-3)\,dx;$ 2) $\int_{-2}^{-1}(5-4x)\,dx;$ 3) $\int_{-1}^{2}(1-3x^2)\,dx;$

4) $\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx;$ 5) $\int_{0}^{2}(3x^2-4x+5)\,dx.$