Математический аппарат анализа и синтеза цифровых САУ

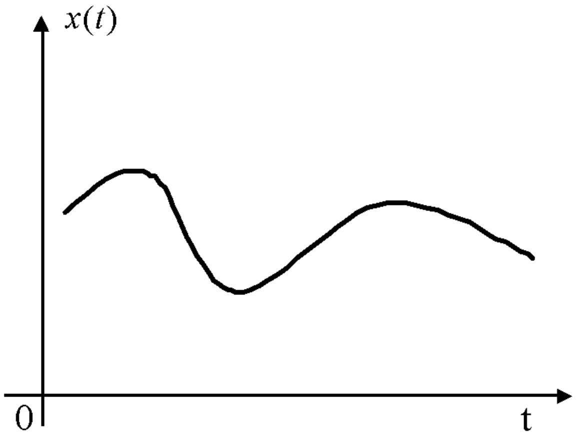
Понятие о решетчатой функции и её разности

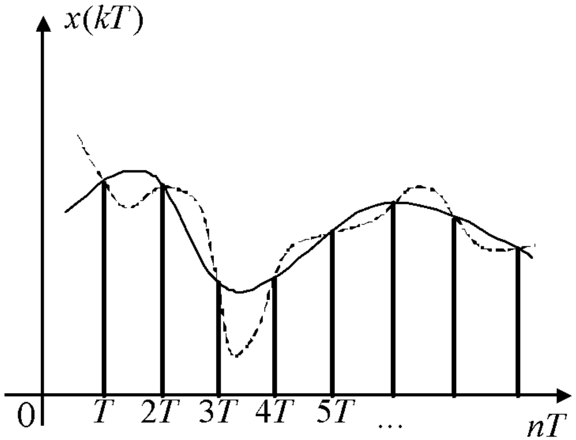
Решетчатой называется функция *x(kT),* которая получена ординатами непрерывной функции *x(t)* в дискретные моменты времени $t_k=kT$, $n=1,2,\ldots$.

Итак, решетчатая функция существует только в дискретные моменты времени, а между ними она равняется нулю, так что можно записать:

$$x(kT) = x(t)\big|_{t=kT} \qquad (1)$$

Решетчатые функции получается при квантовании по времени непрерывных сигналов:





Дискретная функция отображает свойства непрерывной в фиксированные (дискретные) моменты времени

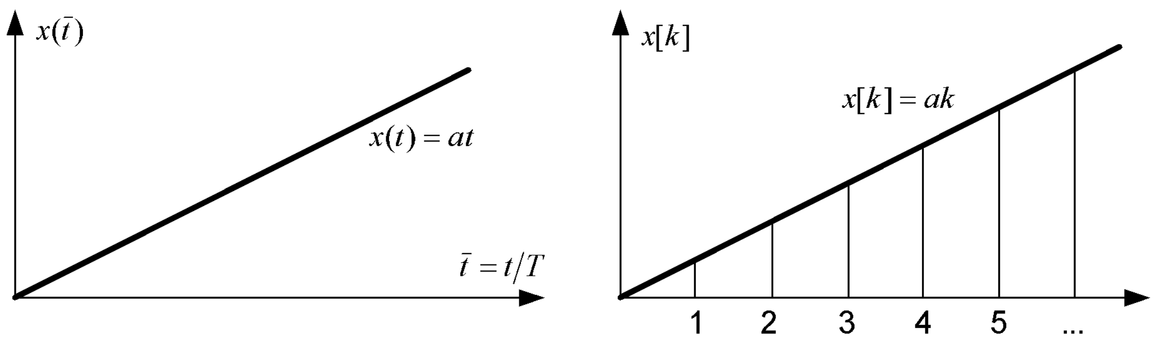
Отображение непрерывной функции в решетчатую является однозначным, в то же время, отображение решетчатой функции в непрерывную не является таковым.

Например, для непрерывной функции $x(t)=e^{\beta t}$ соответствующей решетчатой функцией есть $x(kT)=e^{\beta kT}$, где T – период дискретности (такт квантования), а k – произвольное целое число.

Понятие о решетчатой функции и её разности

Для удобства исследования дискретных систем часто вводят для рассмотрения новую переменную – так называемое относительное время: $\bar{t} = t/T$.

Тогда непрерывной функции $x(\bar{t})$ с аргументом $\bar{t}$ будет соответствовать решетчатая $x[k]$ с аргументом $kT/T=k$. Так, для непрерывной функции $x(t)=at$ соответствующей будет решетчатая функция $x[k]=ak$



Решетчатая функция с аргументом *k*

По отношению к решетчатым функциям существует понятие ***конечной разности***, которая является аналогом производной для непрерывной функции. Так, первая конечная разность решетчатой функции характеризует скорость её изменения:

$$\Delta x(kT) = \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T} \quad (2)$$

или

$$\Delta x[k] = x[k+1] - x[k] \quad (3)$$

при применении относительного времени $\bar{t}$

По аналогии, вторая разность, или разность второго порядка, равняется

$$\Delta^2 x[k] = \Delta x[k+1] - \Delta x[k] \quad (4)$$

или

$$\Delta^2 x[k] = x[k+2] - x[k+1] - (x[k+1] - x[k]) = \\ = x[k+2] - 2x[k+1] + x[k] \quad (5)$$

Понятие о решетчатой функции и её разности

Обобщая, разность порядка k определяется выражением:

$$\Delta^n x[k] = \Delta^{n-1} x[k+1] - \Delta^{n-1} x[k] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i x[k+i] \qquad (6)$$

где $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ (7) - число сочетаний из n элементов по i.

Для определения коэффициентов С удобно использовать так называемый «треугольник Паскаля», который составляется по итерационной формуле

$$C_{n+1}^i = C_n^{i-1} + C_n^i \qquad i = 2, \ldots, n \qquad (8)$$

и имеет вид:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

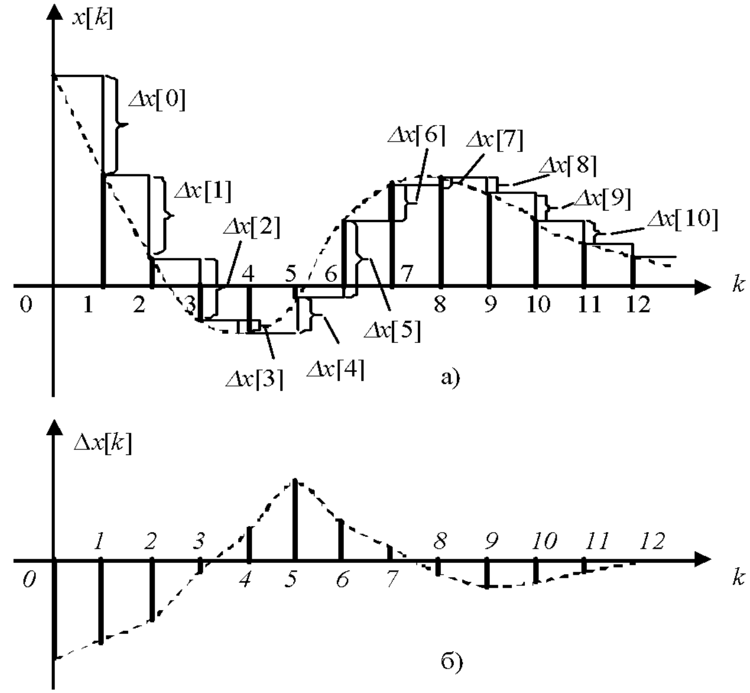
1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8

1



К определению первой разности решетчатой функции

Например, воспользовавшись 4-м рядом «треугольника», можно сразу записать формулу для конечной разности 4-го порядка:

$$\Delta^4 x[n] = x[n+4] - 4x[n+3] + 6x[n+2] - 4x[n+1] + x[n]$$

Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

Для исследования дискретных САР используются так называемые ***разностные уравнения***, которые определяют взаимосвязь между решетчатой функцией и её разностями:

$$
\begin{aligned}
&a_n\Delta^n y[k]+a_{n-1}\Delta^{n-1}y[k]+\dots+a_1\Delta y[k]+a_0 y[k]=\\
&=b_m\Delta^m u[k]+b_{m-1}\Delta^{m-1}u[k]+\dots+b_1\Delta u[k]+b_0 u[k].
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Оператор Δ для дискретной функции является своеобразным аналогом оператора дифференцирования $D=d/dt$ для непрерывной функции:

$$
\frac{d^i y(t)}{dt^i}=\lim_{T\to 0}\frac{\Delta^i y(kT)}{T^i}\approx\frac{\Delta^i y[k]}{T^i}
\qquad (10)
$$

Это выражение можно использовать для нахождения аналога линейного ДУ в виде разностного.

Если в уравнение (9) подставить выражение для конечных разностей (6), то получим ***неоднородное линейное разностное уравнение***, которое определяет зависимость между значениями решетчатой функции в разные дискретные моменты времени

$$
\begin{aligned}
&a_n^* y[k+n]+a_{n-1}^* y[k+n-1]+\dots+a_1^* y[k+1]+a_0^* y[k]=\\
&=b_m^* u[k+m]+b_{m-1}^* u[k+m-1]+\dots+b_1^* u[k+1]+b_0^* u[k].
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

(13)

Учитывая, что дискретный оператор z связан с непрерывным оператором Лапласа p выражением: $z=e^{Tp}$ то для перехода от разностного уравнения в области времени в виде (11) к соответствующему уравнению в области оператора z изображения сигналов, которые опережают сигнал в текущий момент времени $x[k]$ на i тактов, умножаются на z^i, а изображения сигналов, которые запаздывают относительно этого сигнала на i тактов – умножаются на z^{-i}, то есть

$$
\begin{aligned}
&x(kT)=x[k]\to x(z),\\
&x(kT+iT)=x[k+i]\to z^i x(z),\\
&x(kT-iT)=x[k-i]\to z^{-i}x(z).
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

По таким правилам уравнение (11) преобразуется к виду

$$(a_n^* z^n + a_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + a_1^* z + a_0^*) y(z) = \quad = (b_m^* z^m + b_{m-1}^* z^{m-1} + \dots + b_1^* z + b_0^*) u(z) \qquad (15)$$

откуда легко определяется ***дискретная передаточная функция (ДПФ) импульсной системы в полиномиальной форме*** как отношение изображений выходного сигнала к входному при нулевых начальных условиях

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_m^* z^m + b_{m-1}^* z^{m-1} + \dots + b_1^* z + b_0^*}{a_n^* z^n + a_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + a_1^* z + a_0^*} \qquad (16)$$

условием физической реализации передаточной функции ДПФ является $m \le n$, т.е., степень полинома числителя не должна превышать степень полинома знаменателя. Если это условие не выполняется, это означает, что выходной сигнал опережает входной, что невозможно с диалектической точки зрения.

Полином $G_n(z)$ в знаменателе ДПФ называется ***характеристическим полиномом (Denominator)***, ур-ние

$G_n(z) = 0$ – ***характеристическим уравнением***, а его корни $\mathbf{P}_d = [p_{d1}, p_{d2}, \dots, p_{dk}]$

– ***дискретными полюсами (Poles), или собственными числами (Eigen Value)*** системы.

Полином $H_m(z)$ в числителе ДПФ называют ***полиномом воздействия (Numerator)***. Корни уравнения

$H_m(z) = 0$ называются ***дискретными нулями (Zeros)***: $\mathbf{Z}_d = [z_{d1}, z_{d2}, \dots, z_{dm}]$

Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

Свободное движение системы будет устойчивым при условии $|p_{di}| < 1$

поскольку только при таких условиях его решение будет сходится

$$\lim_{n\to\infty} y[k] = \sum_{i=1}^{n} \lim p_{di}^{k} = 0 \qquad (18)$$

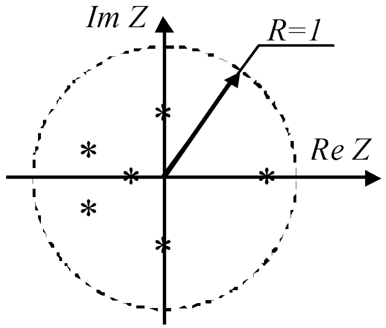
Условие устойчивости дискретной системы может быть сформулировано так: ***дискретная САР будет устойчивой, если корни её характеристического уравнения, изображенные на комплексной z-плоскости, лежат внутри окружности единичного радиуса***, или по модулю меньше единицы.

Пример

Получить разностное уравнение и дискретную передаточную функцию из дифференциального уравнения непрерывного объекта:

$$5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

сравнить переходные функции непрерывного и соответствующего дискретного объектов при разных периодах дискретизации, проанализировать устойчивость дискретной системы.



Карта полюсов устойчивой дискретной САР

Решение.

$$5\frac{\Delta^2 y[n]}{T^2} + 3\frac{\Delta y[n]}{T} + 2y[n] = u[n]$$

После подстановки в последнее равенство выражений для конечных разностей (3)-(5), получаем:

$$5\big(y[n+2] - 2y[n+1] + y[n]\big) + 3\big(y[n+1] - y[n]\big)T + 2y[n]T^2 = u[n]T^2$$

или, после упрощения:

$$5y[n+2] - (10 - 3T)y[n+1] + (5 - 3T + 2T^2)y[n] = T^2 u[n]$$

Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

Записываем последнее разностное уравнение в операторной форме

$$[5z^2-(10-3T)z+(5-3T+2T^2)]y(z)=T^2u(z)$$

и получаем ДПФ $$W(z)=\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{T^2}{5z^2-(10-3T)z+(5-3T+2T^2)}$$

Составляем характеристическое уравнение полученной дискретной системы

$$5z^2-(10-3T)z+(5-3T+4T^2)=0$$

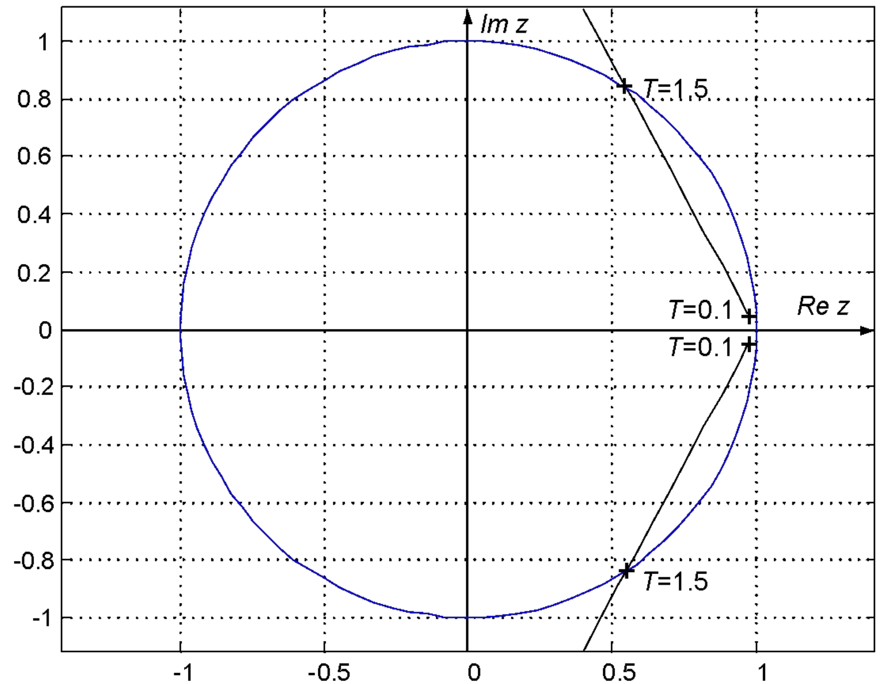
и находим дискретные полюсы:

$$z_{1,2}=\frac{10-3T\pm\sqrt{(10-3T)^2-20\left(5-3T+2T^2\right)}}{10}=$$

$$=\frac{10-3T\pm\sqrt{-31T^2}}{10}=1-0.3T\pm0.557Ti.$$

Определяем границу устойчивости дискретной системы, для чего записываем выражение для квадрата амплитуд комплексно-сопряженных полюсов и находим ограничения на величину период дискретности из условия устойчивости:

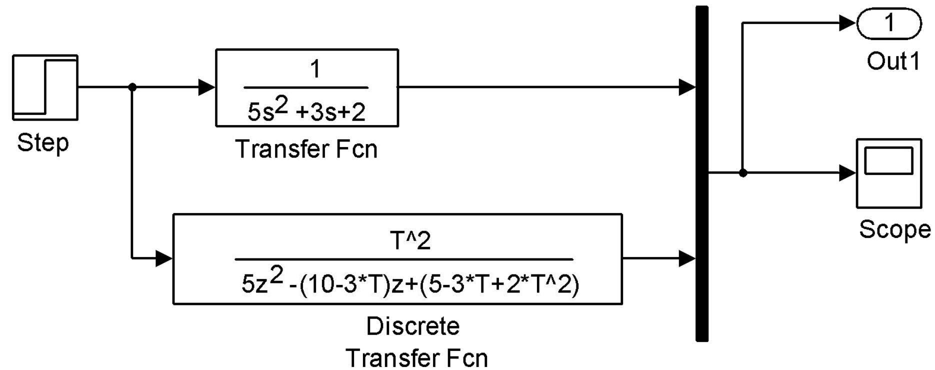
$$\left|z_{1,2}\right|^2=(1-0.3T)^2+0.31T^2=1-0.6T+0.4T^2\le1 \qquad T\le1.5$$



Годографы полюсов полученного дискретного динамического объекта при вариации периода дискретности

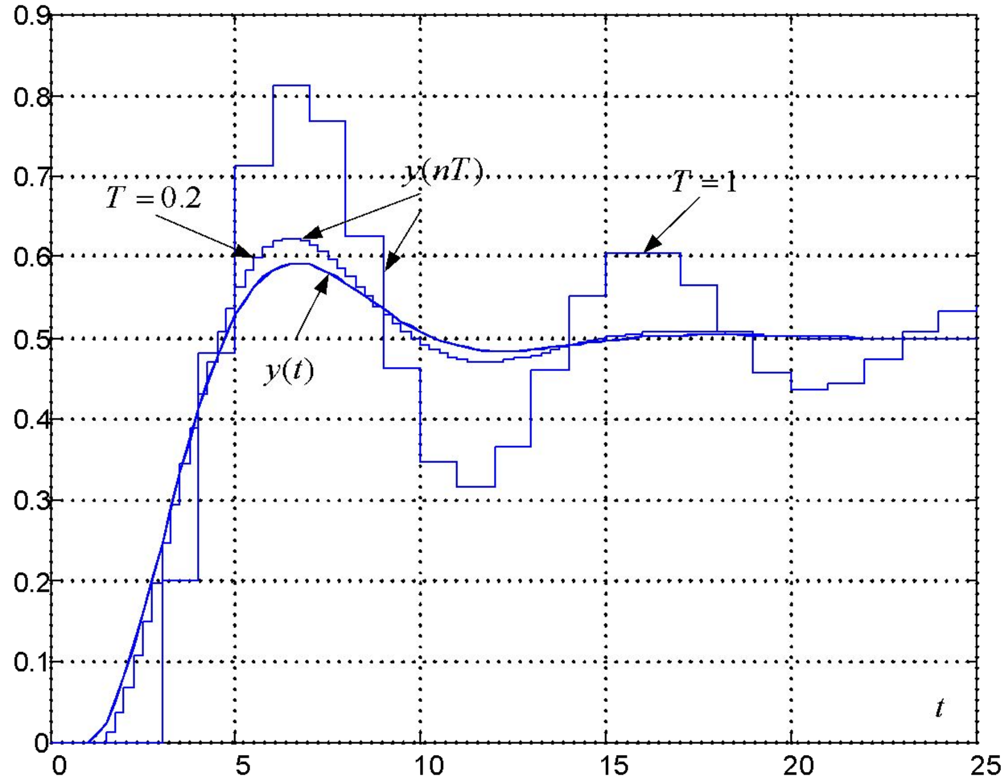
Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

Чтобы сравнить переходные характеристики выходной непрерывной системы и её дискретной аппроксимации воспользуемся Simulink-моделью



Без использования *Simulink:*

```
sa=tf(1,[5 3 2])
step(sa), grid on, hold on
for T=[0.25 1]
    sd=tf(T^2,[5 -10+3*T
5-3*T+2*T^2],T)
    step(sd)
end
```



Дискретное преобразование Лапласа

Как известно, непрерывная функция времени *x(t)* при одностороннем преобразовании Лапласа отображается в функцию комплексной переменной *x(p)*:

$$L\{x(t)\} = x(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt \qquad (19)$$

где $p = \alpha + j\beta$ – комплексная переменная

Для решетчатых функций таким же способом вводится понятие дискретного преобразования Лапласа:

$$D\{x(kT)\} = x^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(kT)e^{-pkT} \qquad (20)$$

где *D* – символ дискретного преобразования,
x(p)* – функция, которая получена в результате дискретного преобразования решетчатой функции *x(kT)*.

Если ввести к рассмотрению относительное время, имеем:

$$D\{x[k]\} = x^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x[k]e^{-pk} \qquad (21)$$

или, при использовании новой безразмерной переменной $q=pT$:

$$D\{x[k]\} = x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[k]e^{-qk} \qquad (22)$$

Пример *Найти дискретное преобразование Лапласа для единичной решетчатой функции x[k]=1[k].*

Решение. *В соответствии с выражением (20) находим:*

$$D\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k)e^{-qk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk} = 1 + e^{-q} + e^{-2q} + e^{-3q} + \dots$$

Используя известную формулу для суммы элементов геометрической прогрессии, окончательно имеем

$$D\{1(k)\} = \frac{1}{1-e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1}$$

Дискретное преобразование Лапласа

Основные свойства дискретного преобразования Лапласа:

1) поскольку дискретное преобразование Лапласа определяет связь между функцией и её изображением только в моменты $t=nT$, то разным выходным функциям $x(t)$, которые совпадают в эти моменты времени, будет соответствовать одна и та же функция $x^*(p)$. Итак, невозможно однозначно восстановить функцию $x(t)$ из $x^*(p)$ для произвольного момента времени t.

2) легко доказать, что функция $x^*(p)$ является периодической вдоль мнимой оси $j\omega$ комплексной плоскости, а её период составляет $\omega_s=2\pi/T$. Если принять, что i – произвольное целое число, то математически это свойство дискретного преобразования Лапласа можно записать так:

$$x^*(p) = x^*(p + i\omega_s)$$

3) функция $x^*(p)$ является иррациональной относительно p, поскольку содержит множители типа e^{-pT}. Это существенно отличает её от большинства непрерывных функций.

Z- преобразование и его свойства

Для исследования свойств цифровых систем широко используется и так называемое *Z*- преобразование, которое следует из дискретного преобразования Лапласа при

$$z = e^{pT} = e^{q} \qquad (23)$$

Итак, по аналогии с дискретным преобразованием, можем записать:

$$Z\{x[k]\} = x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} \qquad (24)$$

Так, для задачи из примера *Z*- преобразование заданной единичной решетчатой функции будет

$$Z\{1(k)\} = \left.\frac{e^{q}}{e^{q}-1}\right|_{z=e^{q}} = \frac{z}{z-1}$$

Обозначим некоторые свойства *Z*- преобразования:

1) условием существования функции *x(z)* есть определенность функции *x(t)* для всех моментов времени *t=kT*;
2) функция *x(z)* является рациональной относительно комплексной переменной *z*;
3) для какой-нибудь функции времени *x(t)*, которая имеет дискретное преобразование Лапласа, существует и *Z*- преобразование;
4) одной функции *x(z)* соответствует множество функций времени *x(t)*, которые совпадают только в моменты времени *t=kT*;
5) преобразование $z=e^{pT}$ отображает всю левую полуплоскость комплексной плоскости *p* в круг единичного радиуса на комплексной плоскости *z* с центром в начале координат;

6) свойство суперпозиции: $Z\{x_1[k]+x_2[k]\} = Z\{x_1[k]\} + Z\{x_2[k]\} = x_1(z) + x_2(z)$

7) свойство линейности: $Z\{ax[k]\} = Z\{x_1[k]\} + aZ\{x[k]\} = ax(z)$

Z- преобразование и его свойства

8) свойство сдвига во времени (запаздывание и опережение):

$$Z\{x[k-1]\} = z^{-1} \cdot Z\{x[k]\} = z^{-1}x(z)$$

$$Z\{x[k-n]\} = z^{-n} \cdot Z\{x[k]\} = z^{-n}x(z)$$

$$Z\{x[k+1]\} = z(x(z) - x[0])$$

$$Z\{x[k+n]\} = z^{n}x(z) - z^{n}x[0] - \ldots - zx[n-1]$$

9) свертке оригиналов соответствует произведение изображений:

$$Z\left\{\sum_{i=0}^{k} x[i] \cdot y[k-i]\right\} = Z\{x[k]\} \cdot Z\{y[k]\} = x(z) \cdot y(z)$$

10) теорема о граничном значении:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} x(z) \qquad x[1] = \lim_{z\to\infty} z\{x(z) - x[0]\} \qquad x[2] = \lim_{z\to\infty} z^{2}\{x(z) - x[0] - x[1]z^{-1}\}$$

$$\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1}(z-1)x(z)$$

11) дифференцирование изображения: $Z\{k \cdot x[k]\} = -\dfrac{dx(z)}{dz}$

12) *Z*- преобразование функции не зависит от величины *T*. Действительно, поскольку время не входит в выражение (24), то выражение для *x(z)* не зависит от величины *T*.

Z- преобразование и его свойства

При вычислении *Z*- преобразования функций удобно исходить не с функции времени *x(t)*, а из его преобразования Лапласа, т.е. *x(p)*. Рассмотрим пример такого вычисления *Z*- преобразования функции.

Пример 3. *Найти Z- преобразование функции* $x(t) = e^{-\alpha t}$

Решение. *Как известно, преобразованием Лапласа заданной функции есть функция комплексной переменной*

$$x(p) = \frac{1}{p+\alpha}$$

Одновременно, согласно (20),

$$x^*(p) = D\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} e^{-pkT} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\alpha+p)kT}$$

Находим сумму этой геометрической прогрессии:

$$x^*(p) = \frac{1}{1-e^{-(\alpha+p)T}} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}$$

Поскольку $e^{pT} = e^{q} = z$ *, окончательно получим:*

$$x(z) = \left.\frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}\right|_{e^{pT}=z} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$

Таким же способом можно получить дискретное преобразование Лапласа и *Z*- преобразование для других функций.

Преобразование Лапласа и z- преобразование для некоторых функций времени

Выходная функция $x(t)$	Решетчатая функция $x(kT)$	Преобразование Лапласа $x(p)$	Z- преобразование $x(z)$
$1(t)$	$1(kT)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
t	kT	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha kT}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$1-e^{-\alpha t}$	$1-e^{-\alpha kT}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}, d=e^{-\alpha T}$

При исследованиях цифровых систем иногда также необходимо по заданной функции *x(z)* найти соответствующую последовательность *x(nT)*. В таких случаях оперируют так называемым обратным *Z*- преобразованием, которое обозначают таким образом:

$$x(kT) = Z^{-1}\{x(z)\}$$

Как вычислять z-преобразование

Matlab

```
syms k
x = 1 + 2^(k+1);
X = ztrans ( x );
X = combine ( X )
```

$$x[k] = 1 + 2^{k+1}$$

z-преобразование

упрощение

```
X =
   (3*z^2-4*z)/(z^2-3*z+2)
```

$$X(z) = \frac{3z^2 - 4z}{z^2 - 3z + 2}$$

Обратное z-преобразование (численно)

Matlab

$$X(z)=\frac{3z^2-4z}{z^2-3z+2}$$

```
n = [3 -4 0];
d = [1 -3 2];
T = 1;
X = tf( n, d, T);
x = impulse(X, 4)
```

конечное время

```
x = 3
    5
    9
   17
   33
```

Обратное z-преобразование (формула!)

$$X(z) = \frac{3z^2 - 4z}{z^2 - 3z + 2}$$

Matlab

```
syms z
n = 3*z^2 - 4*z;
d = z^2 - 3*z + 2;
x = iztrans(n/d)
```

```
x =
  2*2^n+1
```