НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F(x)=f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Совокупность всех первообразных функции f(x) называется неопределенным интегралом на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод введения нового аргумента

Метод разложения

Метод замены переменной (метод подстановки)

Метод интегрирования по частям

Метод введения нового аргумента:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u=\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Метод разложения:

Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,

то $\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Метод замены переменной:

Если *f(x)* – непрерывна,

То, полагая $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим
$$\int f(x)dx = \int g\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

Метод интегрирования по частям:

Если u и v — некоторые дифференцируемые функции от x, то $\int udv = uv - \int vdu$

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятие определённого интеграла возникает в связи с задачей о нахождении площади криволинейной трапеции, нахождении пути по известной скорости при неравномерном движении и т. п.

Если существует предел суммы при стремлении длин всех отрезков к нулю, то такой предел называется определённым интегралом от функции *f(x)* по отрезку *[a; b]* и обозначается $\int_a^b f(x)dx$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределом интегрирования, f(x) – подынтегральной функцией, f(x)dx – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, отрезок [a; b] –областью (отрезком) интегрирования. Функция y = f(x), для которой на отрезке [a; b] существует определенный интеграл , называется интегрируемой на этом отрезке.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление площадей плоских фигур: Пусть функция *y=f(x)* неотрицательна и непрерывна на отрезке *[a, b]*. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S под кривой *y=f(x)* на *[a, b]* численно равна определенному интегралу, т.е.

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Вычисление объемов тел вращения. Пусть на отрезке *[a, b]* задана непрерывная функция *y=f(x)*. Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси O_x(или оси O_y) криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x) (f(x)≥ 0)* и прямыми *y=0, x=a, x=b,* вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy dx, a \geq 0$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси O_y криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x=\varphi(y)$ $(\varphi(y) \geq 0)$ и прямыми $x=0$, $y=c$, $y=d$, то объем тела вращения равен:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Прирост численности популяции. Прирост популяции равен определенному интегралу от скорости по интервалу времени ее размножения:

$$N(t)=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt$$

где v(t)-скорость роста некоторой популяции, N(t)-прирост численности за промежуток времени до T.