

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x)=f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод введения нового аргумента

Метод разложения

**Метод замены переменной (метод
подстановки)**

Метод интегрирования по частям

Метод введения нового аргумента:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Метод разложения:

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

то $\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Метод замены переменной:

Если $f(x)$ – непрерывна,

То, полагая $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Метод интегрирования по частям:

Если u и v — некоторые дифференцируемые функции от x , то $\int u dv = uv - \int v du$

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятие определённого интеграла возникает в связи с задачей о нахождении площади криволинейной трапеции, нахождении пути по известной скорости при неравномерном движении и т. п.

Если существует предел суммы при стремлении длин всех отрезков к нулю, то такой предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределом интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, отрезок $[a; b]$ – областью (отрезком) интегрирования. Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл, называется интегрируемой на этом отрезке.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА- ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление площадей плоских фигур: Пусть функция $y=f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S под кривой $y=f(x)$ на $[a, b]$ численно равна определенному интегралу, т.е.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Вычисление объемов тел вращения. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси O_x (или оси O_y) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ ($f(x) \geq 0$) и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x y dx, a \geq 0$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси O_y криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x=\varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) и прямыми $x=0$, $y=c$, $y=d$, то объем тела вращения равен:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Прирост численности популяции. Прирост популяции равен определенному интегралу от скорости по интервалу времени ее размножения:

$$N(t) = \int_{t_0}^T v(t) dt$$

где $v(t)$ -скорость роста некоторой популяции,
 $N(t)$ -прирост численности за промежуток времени до T .