Применимость закона сохранения импульса

- ЦМ - воображаемая точка, в ней не обязательно должно находиться какое-то тело. Напр., для 3 одинаковых грузиков, соединенных легкими стержнями, ЦМ находится в точке пересечения медиан треугольника, образованного стержнями. Часто удобно помещать начало координат в ЦМ (система ЦМ).

Из теоремы о движении ЦМ можно сделать вывод о том, когда можно пользоваться ЗСИ:

1) если система замкнутая;

2) если система незамкнутая, но $\sum \overrightarrow{F_k^{ext}} = 0$;

3) $\sum \overrightarrow{F_k^{ext}} \neq 0$, но ее проекции на какие-либо оси = 0 (удачно выбраны оси) $dP_x/dt = 0 \Rightarrow P_x = const$

ЗСИ и другие законы сохранения

- В теор. физике есть мнение, что ЗСИ более общий, чем законы Ньютона. Это верно в том смысле, что он справедлив и за пределами классической механики, но для этого приходится обобщать то понятие импульса, которое дается законами Ньютона.

Из $\overrightarrow{\frac{dp}{dt}} = \vec{F}$ можно получить изменение импульса $\Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt$, но практическое интегрирование может быть затруднено, если $\vec{F}$ меняется в пространстве $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, а $\vec{r}(t)$ должно получиться только после решения уравнения движения. В этом случае требуется другой подход, другие законы сохранения.

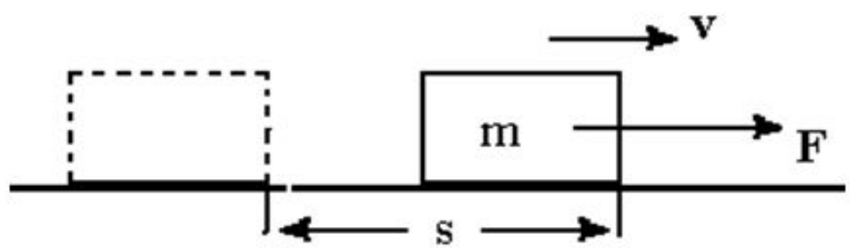
Работа и кинетическая энергия

Импульс силы $F\,\Delta t \Rightarrow \int F dt$ характеризует действие силы пропорционально времени.

Другая мера пропорциональна пути пройденному телом – *работа*.

Если направления $\vec{F}$ и $\vec{v}$ совпадают, то работа:

$$A = F s$$

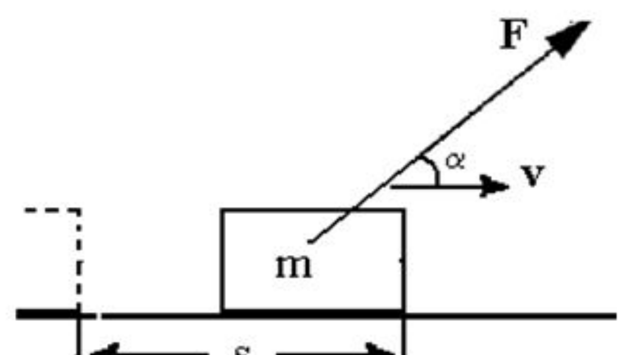


Преобразование:

$$A = mw\langle v\rangle t = mwt\cdot \tfrac{1}{2}(v_0 + v) = \tfrac{1}{2}m(v - v_0)(v_0 + v) =$$
$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = K - K_0$$

$K = E_{кин} = \tfrac{1}{2}mv^2$ - *кинетическая энергия* (КЭ), т.е. работа силы превращается в КЭ тела.

Если направления $\vec{F}$ и $\vec{v}$ не совпадают, то: $A = F s \cos\alpha = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2$

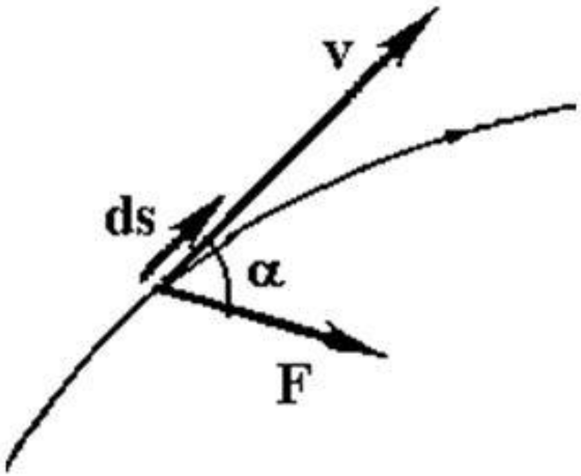


Работа может быть положительной (↑КЭ) и отрицательной (↓ КЭ).

Ед. измерения работы и КЭ - *джоуль*:

$$[A] = [K] = Н\cdot м = кг\ м^2/с^2 = Дж$$

Работа и КЭ при криволинейном движении



Для криволинейного движения и под действием переменной силы вводят элемент (дифференциал) работы:

$$dA = F\,ds\,cos\alpha = (\vec{F}, \overrightarrow{ds})$$

Здесь $\overrightarrow{ds} = \vec{v}\,dt$ – элементарный вектор перемещения, а работа определяется как скалярное произведение силы на перемещение.

$$dA = (\vec{F}, \overrightarrow{ds}) = (\vec{F}, \vec{v}dt) = (\vec{F}, \vec{v})dt =$$

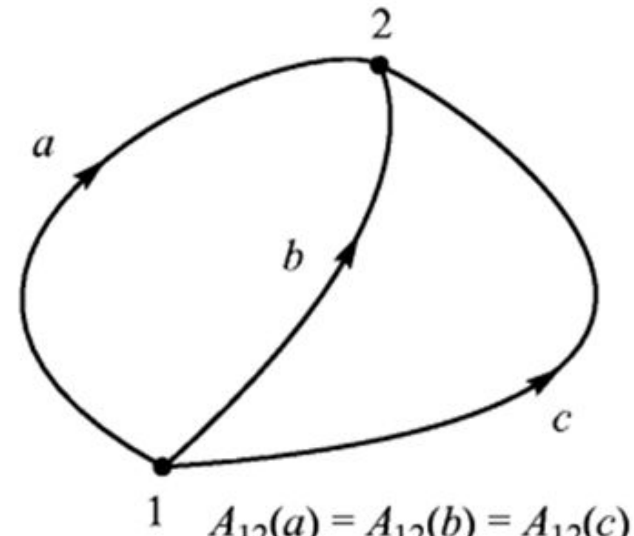
$$d\left(\frac{p^2}{2m}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$$ – дифференциал КЭ

$$A = \int dA = \int_a^b (\vec{F}, \overrightarrow{ds}) = \int_{t1}^{t2} (\vec{F}, \vec{v})dt$$

Консервативные силы

Особо выделяют т.н. *консервативные* силы – для которых работа по перемещению тела из одной точки в другую не зависит от траектории, а зависит только от положения этих точек.

$$A_{12} = \int (\vec{F}, \overrightarrow{ds})_a = \int (\vec{F}, \overrightarrow{ds})_b = \int (\vec{F}, \overrightarrow{ds})_c$$



$A_{12}(a) = A_{12}(b) = A_{12}(c)$

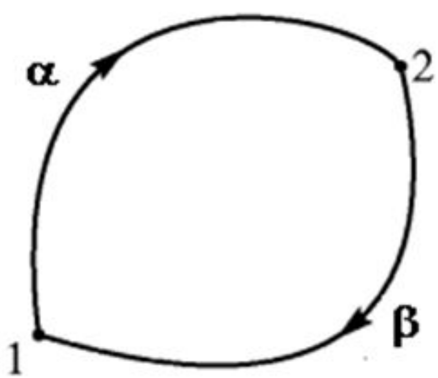
Если это условие выполняется, то работа при перемещении по замкнутой траектории равна 0:

$A = A_{1\alpha 2} + A_{2\beta 1} = A_{1\alpha 2} + (-A_{1\beta 2}) = 0$

т.к. при изменении направления движения на участке β меняются знаки косинусов.

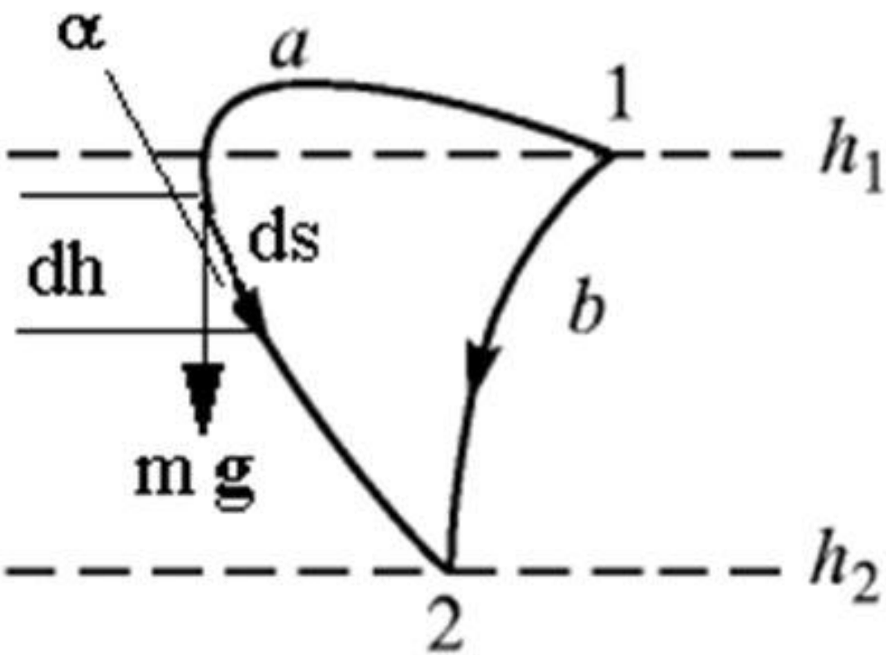
Эти 2 свойства консервативных сил находятся во взаимно однозначном соответствии

Те силы, для которых это не справедливо, относятся к *неконсервативным*.



Примеры консервативных сил (1)

Сила тяжести (а также ∀ однородное поле, силы которого имеют постоянные модули и направления).



$$A_{12} = \int (\vec{F}, \boldsymbol{d}\vec{s}) =$$

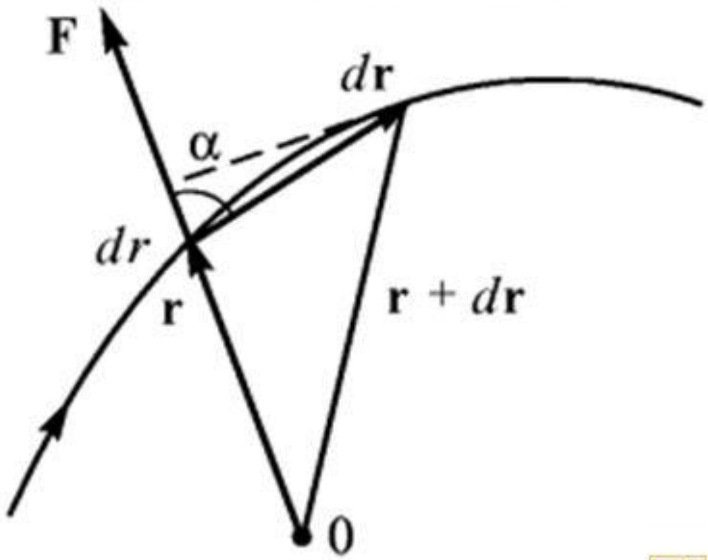
$$m\, g \int cos\alpha\, ds =$$

$$-m\, g \int dh =$$

$$m\, g(h_1 - h_2)$$

Примеры консервативных сил (2) любые центральные силы

Центральными наз. силы, направленные по радиус-вектору, соединяющему МТ с особой точкой (центром силы), и зависят только от расстояния до центра силы:



$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{r}})} = F(r) \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r}}$$

$$A_{12} = \int(\vec{F}, d\vec{s}) = \int F(r)\, cos\alpha\, ds =$$

$$= \quad \{cos\alpha\, ds = dr\} =$$

$$= \int F(r)\, dr = G(r_2) - G(r_1),$$

где G(r) первообразная для F(r).

Примеры центральных сил:

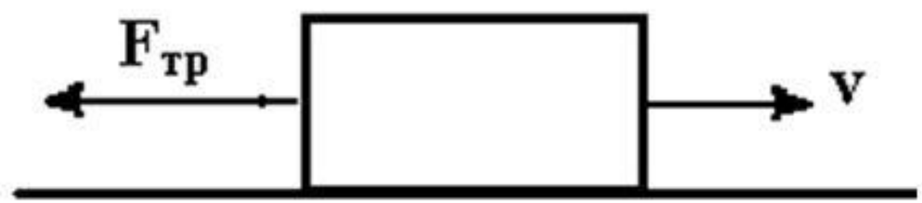
гравитационная сила

$$\overrightarrow{F_{\text{гр}}} = -\boldsymbol{\gamma}\, \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r}}$$

или *кулоновская* сила $\overrightarrow{F_{\text{кул}}} = -k\, \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r}}$

Неконсервативные, диссипативные, гироскопические

Сила трения - всегда направлена против скорости тела.



Значит:

$$(\vec{F}, \overrightarrow{ds}) = (\vec{F}, \vec{v})dt < 0 \quad \Rightarrow$$

$$A_{12} = \int (\vec{F}, \overrightarrow{ds}) < 0 \quad \Rightarrow K_2 < K_1,$$

т.е. под действием силы трения КЭ всегда уменьшается. Силы, которые обладают таким свойством, наз. *диссипативными*.

Еще одна разновидность сил – *гироскопические*, кот. направлены перпендикулярно скорости. Работа этих сил равна нулю, т.к. $\cos\alpha \equiv 0$. К ним относятся сила Лоренца и нормальная реакция опоры при движении тела по плоскости.

Потенциальная энергия

1. консервативная сила $\vec{F}$;
2. одно из возможных положений тела - «нулевое»;
3. работы силы $\vec{F}$ при перемещении тела из пол-ния 1 в пол-ние 0, из 2 в 0, а также из 1 в 2.

$$A_{10} = \int_{10}(\vec{\boldsymbol{F}}, \overrightarrow{\boldsymbol{ds}}) = U_1$$

Нижний индекс у интеграла означает траекторию 10, ее крайние точки.

Значение интеграла зависит только от положения точки 1 (точка 0 фиксирована), поэтому это значение функции, обозначенной U, в точке 1 – U_1.

Эта величина имеет смысл работы-энергии, и ее наз. *потенциальной энергией* (ПЭ) в поле силы $\vec{F}$.

Свойства потенциальной энергии

То же для точки 2: $A_{20} = \int_{20} \left(\vec{\boldsymbol{F}}, \overrightarrow{\boldsymbol{ds}}\right) = U_2$

U_2 – ПЭ тела в точке 2.

Из условия $A_{12} + A_{20} + A_{01} = 0$: $A_{12} = U_1 - U_2$

– работа консервативных сил при перемещении тела из точки 1 в точку 2 равна разности ПЭ в этих точках.

Свойства ПЭ:

1) ПЭ зависит только от координат, поэтому наз. энергией положения в отличие от КЭ, кот. называют энергией движения;

2) ПЭ определяется с точностью до аддитивной константы, т.к. «нулевое» положение выбирается произвольно:

если U(x,y,z) – ПЭ, то U(x,y,z) + C тоже ПЭ того же тела;

3) физический смысл имеет только разность ПЭ.

ЗСПМЭ для материальной точки

Работа ∀ силы ⇨ изменение КЭ:

$$A_{12} = K_2 - K_1$$

Для консервативных сил:

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

и
$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

Обозначение: $E = U + K$ - *полная механическая энергия* (ПМЭ), равная сумме ПЭ и КЭ.

$$E = \text{const} -$$

<u>ПМЭ сохраняется при движении МТ в поле консервативных сил</u>.
Это закон сохранения ПМЭ МТ (ЗСПМЭ, кратко ЗСЭ).

ЗСПМЭ для системы материальных точек

- КЭ системы МТ: $K = \sum K_i$

Если, кроме того, все силы консервативные:

$$U = \sum U_i^{ext} + \frac{1}{2}\sum\sum U_{ij}$$

U_i^{ext} – ПЭ i-того тела в поле внешних сил;

U_{ij} - ПЭ взаимодействия i-того тела с j-тым;

Коэффициент ½ - чтобы не учитывать энергию U_{ij} дважды (как U_{ij} и как U_{ji})

В этом случае: E = U + K = const,

т.е. выполняется ЗСПМЭ уже системы МТ.

Закон сохранения и изменения полной механической энергии

Если не все силы, действующие на систему МТ или внутри нее, консервативные, то ПМЭ системы меняется на величину работы неконсервативных сил $A^{нк}$:

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = A^{нк},$$

или $$E_2 - E_1 = U_2 - U_1 + K_2 - K_1 = A_{12}{}^{нк}$$

Это соотношение выражает *закон сохранения и изменения ПМЭ* системы.

Для чего вводилось понятие о ПЭ?

Во-1, с его помощью формулируется закон сохранения и изменения ПМЭ ⇨ упрощает решение динамических уравнений движения.

Во-2, знание ПЭ ↓ объем сведений, нужных для составления этих уравнений движения.

ПЭ и сила

- Основное уравнение динамики:

$$d\vec{p}/dt = \vec{F} \text{ или } \vec{w} = \vec{F}/m$$

Нужно знать 3 функции F_x , F_y и F_z , а если тел N штук, то функций должно быть 3 N штук.

Если силы консервативные, то приращение ПЭ:

$$\Delta \mathrm{U} = \mathrm{U}(\vec{\mathbf{r}} + \overrightarrow{\Delta\mathbf{r}}) - \mathrm{U}(\vec{\mathbf{r}}) = -(\vec{\boldsymbol{F}}, \overrightarrow{\Delta\boldsymbol{r}}) = - (F_{\boldsymbol{x}}\Delta x + F_{\boldsymbol{y}}\Delta y + F_{\boldsymbol{z}}\Delta z)$$

Если Δx, Δy, Δz → 0, то

$$F_x = -\partial U/\partial x, \quad F_y = -\partial U/\partial y, \quad F_z = -\partial U/\partial z.$$

Т. обр., нужно знать в 3 раза меньше функций, но при этом уметь дифференцировать функцию ПЭ.

Частная производная

- $F_x = -\partial U/\partial x$ - ?

Если f(x) – функция 1 переменной x, то:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$ - производная функции f по x (де-эф по де-икс)

Если f(x,y,z) – функция многих (здесь трех) переменных, то при фиксированных y и z:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ - <u>частная</u> производная функции f по x (де-эф по де-икс)

Оператор градиента

- $$\vec{F} = -\vec{i}\,\partial U/\partial x - \vec{j}\,\partial U/\partial y - \vec{k}\,\partial U/\partial z$$

Короче записывается: $\vec{F} = -\,grad\,U$

(читается: сила равна минус градиенту ПЭ).

Градиент – это дифференциальная операция, с помощью кот. из ∀ скалярной функции *a* можно получить вектор $\vec{B}$ по правилу:

$$\vec{B} = grad\,a = \vec{\boldsymbol{i}}\,\partial a/\partial x + \vec{\boldsymbol{j}}\,\partial a/\partial y + \vec{\boldsymbol{k}}\,\partial a/\partial z$$

Вектор, кот. получается в результате этой операции, также наз. градиентом.

Градиент удобно записывать с пом. *символического вектора* «*набла*»:

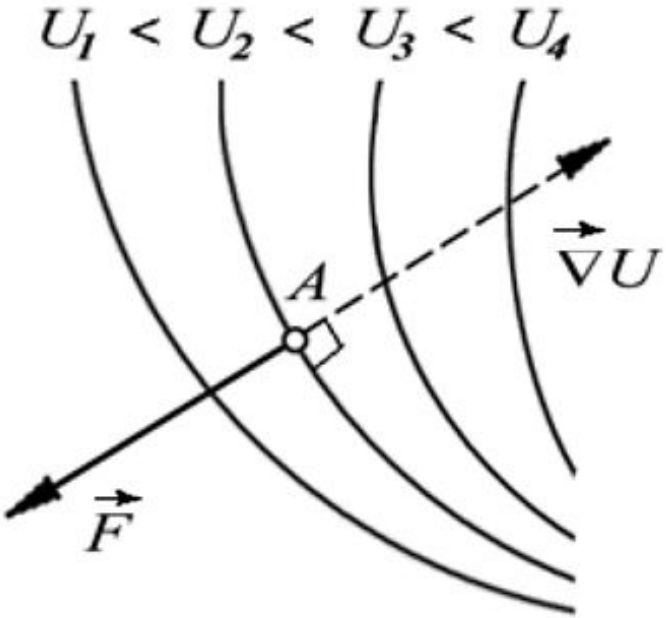
$$\vec{\nabla} = \vec{\boldsymbol{i}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\boldsymbol{j}}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\boldsymbol{k}}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$grada = \vec{\boldsymbol{\nabla}}a$$

$$\vec{F} = -grad\,U = -\vec{\nabla}U$$

Свойства градиента

(не оператора, а результата его действия)



1) направлен по нормали к поверхности равной ПЭ в сторону ее увеличения (сила в противоположную сторону, на рис. ПЭ возрастает слева направо);

2) модуль градиента равен производной в направлении наибольшей скорости роста ПЭ (совпадает с нормалью к поверхности равной ПЭ)

Пример связи ПЭ и силы (1)

а) сила тяжести

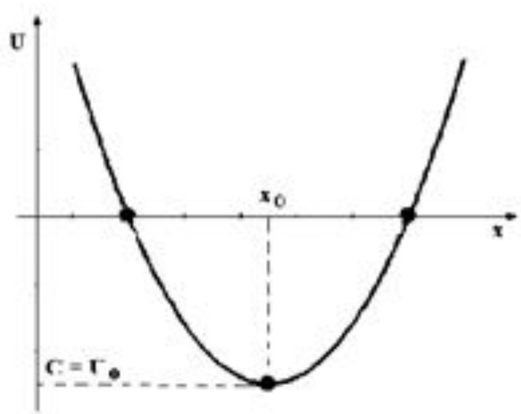
$$U = mgz + C$$

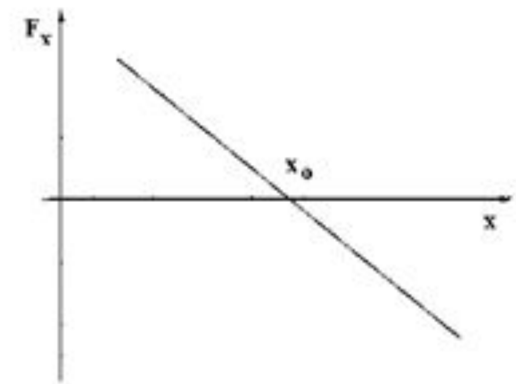
$$\vec{F} = -mg\frac{dz}{dz}\vec{k} = -mg\vec{k}$$

б) сила упругости

$$U = ½\,k\,(x - x_0)^2 + C$$

$$\vec{F} = -k\,(x - x_o)\,\vec{i}$$





Пример связи ПЭ и силы (2)

в) сила всемирного тяготения

$$U = -\gamma\, m_1 m_2 / r$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{гр}} = -\gamma\, \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$