

Применимость закона сохранения импульса

ЦМ - воображаемая точка, в ней не обязательно должно находиться какое-то тело. Напр., для 3 одинаковых грузиков, соединенных легкими стержнями, ЦМ находится в точке пересечения медиан треугольника, образованного стержнями. Часто удобно помещать начало координат в ЦМ (система ЦМ).

Из теоремы о движении ЦМ можно сделать вывод о том, когда можно пользоваться ЗСИ:

1) если система замкнутая;

2) если система незамкнутая, но $\sum \overrightarrow{F}_k^{ext} = 0$;

3) $\sum \overrightarrow{F}_k^{ext} \neq 0$, но ее проекции на какие-либо оси = 0 (удачно выбраны оси) $dP_x/dt = 0 \Rightarrow P_x = \text{const}$

ЗСИ и другие законы сохранения

В теор. физике есть мнение, что ЗСИ более общий, чем законы Ньютона. Это верно в том смысле, что он справедлив и за пределами классической механики, но для этого приходится обобщать то понятие импульса, которое дается законами Ньютона.

Из $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ можно получить изменение импульса $\Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt$, но практическое интегрирование может быть затруднено, если \vec{F} меняется в пространстве $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, а $\vec{r}(t)$ должно получиться только после решения уравнения движения. В этом случае требуется другой подход, другие законы сохранения.

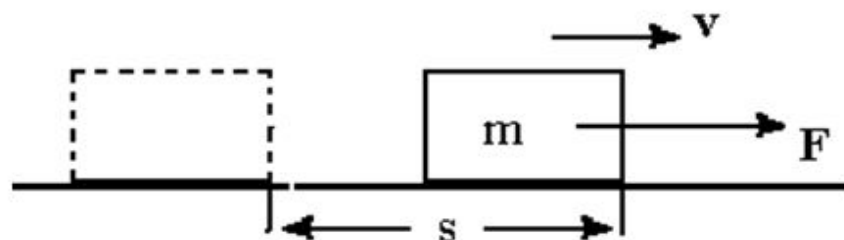
Работа и кинетическая энергия

Импульс силы $F \Delta t \Rightarrow \int F dt$ характеризует действие силы пропорционально времени.

Другая мера пропорциональна пути пройденному телом – работа.

Если направления \vec{F} и \vec{v} совпадают, то работа:

$$A = F s$$



Преобразование:

$$A = m w \langle v \rangle t = m w t \cdot \frac{1}{2}(v_0 + v) = \frac{1}{2} m (v - v_0)(v_0 + v) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = K - K_0$$

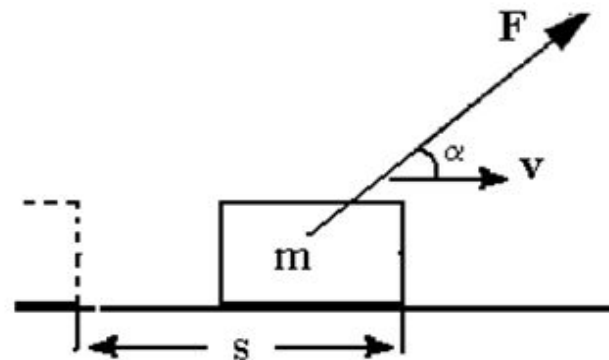
$K = E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m v^2$ – кинетическая энергия (КЭ), т.е. работа силы превращается в КЭ тела.

Если направления \vec{F} и \vec{v} не совпадают, то: $A = F s \cos \alpha = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$

Работа может быть положительной (\uparrow КЭ) и отрицательной (\downarrow КЭ).

Ед. измерения работы и КЭ – джоуль:

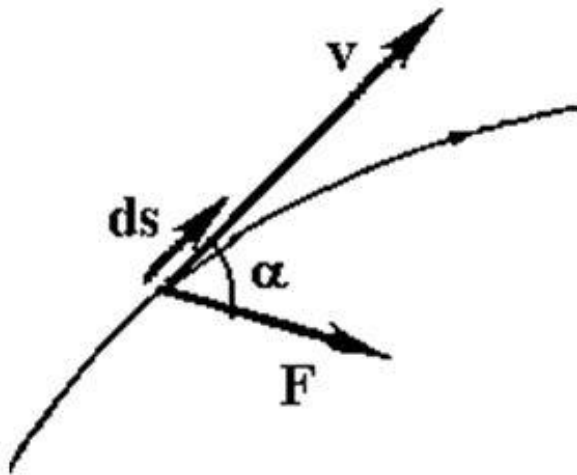
$$[A] = [K] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}$$



Работа и КЭ при криволинейном

ДВИЖЕНИИ

Для криволинейного движения и под действием переменной силы вводят элемент (дифференциал) работы:



$$dA = F ds \cos \alpha = (\vec{F}, \vec{ds})$$

Здесь $\vec{ds} = \vec{v} dt$ - элементарный вектор перемещения, а работа определяется как скалярное

произведение силы на перемещение.

$$dA = (\vec{F}, \vec{ds}) = (\vec{F}, \vec{v} dt) = (\vec{F}, \vec{v}) dt =$$
$$d\left(\frac{p^2}{2m}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK - \text{дифференциал КЭ}$$

$$A = \int dA = \int_a^b (\vec{F}, \vec{ds}) = \int_{t1}^{t2} (\vec{F}, \vec{v}) dt$$

Консервативные силы

Особо выделяют т.н. *консервативные* силы – для которых работа по перемещению тела из одной точки в другую не зависит от траектории, а зависит только от положения этих точек.

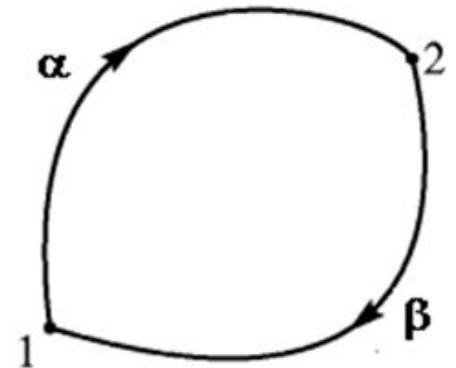
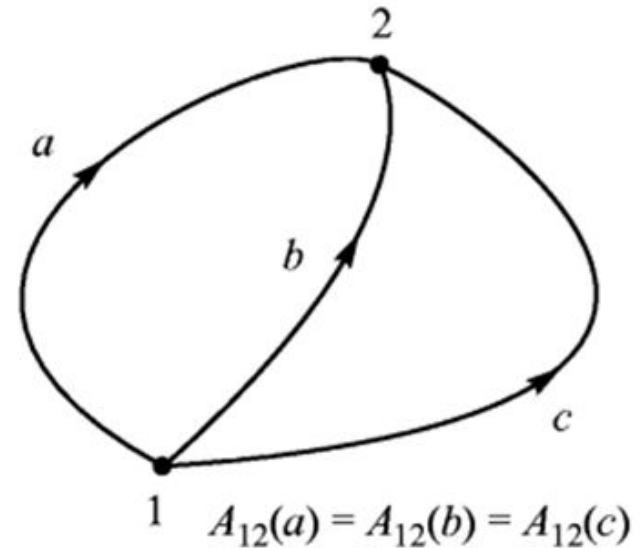
$$A_{12} = \int (\vec{F}, \vec{ds})_a = \int (\vec{F}, \vec{ds})_b = \int (\vec{F}, \vec{ds})_c$$

Если это условие выполняется, то работа при перемещении по замкнутой траектории равна 0:

$A = A_{1\alpha 2} + A_{2\beta 1} = A_{1\alpha 2} + (-A_{1\beta 2}) = 0$
т.к. при изменении направления движения на участке β меняются знаки косинусов.

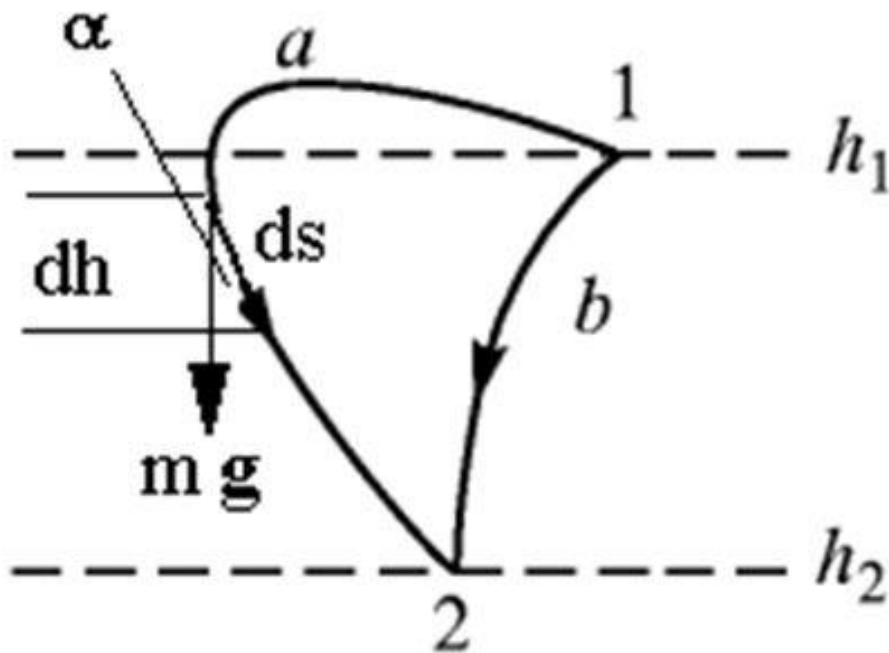
Эти 2 свойства консервативных сил находятся во взаимно однозначном соответствии

Те силы, для которых это не справедливо, относятся к *неконсервативным*.



Примеры консервативных сил (1)

Сила тяжести (а также \forall однородное поле, силы которого имеют постоянные модули и направления).

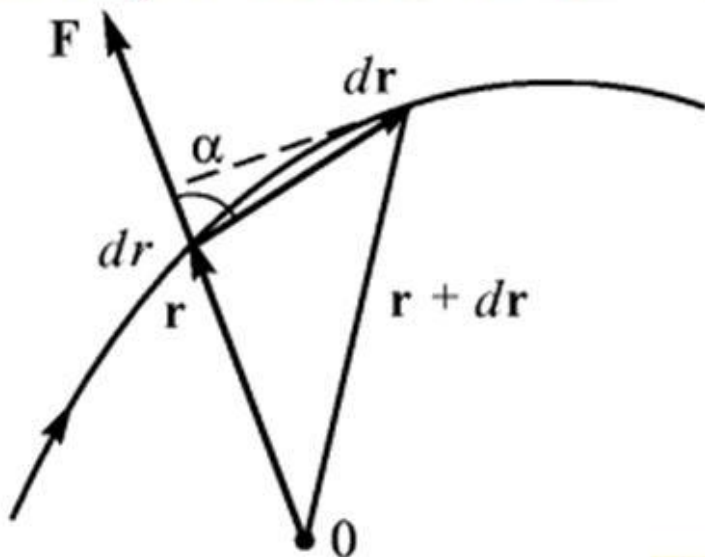


$$\begin{aligned} A_{12} &= \int (\vec{F}, d\vec{s}) = \\ &= m g \int \cos \alpha ds = \\ &= -m g \int dh = \\ &= m g (h_1 - h_2) \end{aligned}$$

Примеры консервативных сил (2)

любые центральные силы

Центральными наз. силы, направленные по радиус-вектору, соединяющему МТ с особой точкой (центром силы), и зависят только от расстояния до центра силы:



$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int (\vec{F}, d\vec{s}) = \int F(r) \cos\alpha ds = \\ &= \{ \cos\alpha ds = dr \} = \\ &= \int F(r) dr = G(r_2) - G(r_1), \end{aligned}$$

где $G(r)$ первообразная для $F(r)$.

Примеры центральных сил:



гравитационная сила

$$\vec{F}_{\text{Гр}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

или кулоновская сила
$$\vec{F}_{\text{Кул}} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Неконсервативные, диссипативные, гироскопические

Сила трения - всегда
направлена против
скорости тела.

Значит:

$$(\vec{F}, \vec{ds}) = (\vec{F}, \vec{v}) dt < 0 \Rightarrow$$

$$A_{12} = \int (\vec{F}, \vec{ds}) < 0 \Rightarrow K_2 < K_1,$$

т.е. под действием силы трения КЭ всегда уменьшается. Силы, которые обладают таким свойством, наз. *диссипативными*.

Еще одна разновидность сил – *гироскопические*, кот. направлены перпендикулярно скорости. Работа этих сил равна нулю, т.к. $\cos\alpha \equiv 0$. К ним относятся сила Лоренца и нормальная реакция опоры при движении тела по плоскости.



Потенциальная энергия

1. консервативная сила \vec{F} ;
2. одно из возможных положений тела - «нулевое»;
3. работы силы \vec{F} при перемещении тела из положения 1 в положение 0, из 2 в 0, а также из 1 в 2.



$$A_{10} = \int_{10} (\vec{F}, \vec{ds}) = U_1$$

Нижний индекс у интеграла означает траекторию 10, ее крайние точки.

Значение интеграла зависит только от положения точки 1 (точка 0 фиксирована), поэтому это значение

функции, обозначенной U , в точке 1 – U_1 .

Эта величина имеет смысл работы-энергии, и ее наз. *потенциальной энергией* (ПЭ) в поле силы \vec{F} .

Свойства потенциальной энергии

То же для точки 2: $A_{20} = \int_{20} (\vec{F}, \vec{ds}) = U_2$

U_2 – ПЭ тела в точке 2.

Из условия $A_{12} + A_{20} + A_{01} = 0$: $A_{12} = U_1 - U_2$

– работа консервативных сил при перемещении тела из точки 1 в точку 2 равна разности ПЭ в этих точках.

Свойства ПЭ:

1) ПЭ зависит только от координат, поэтому наз. энергией положения в отличие от КЭ, кот. называют энергией движения;

2) ПЭ определяется с точностью до аддитивной константы, т.к. «нулевое» положение выбирается произвольно:

если $U(x,y,z)$ – ПЭ, то $U(x,y,z) + C$ тоже ПЭ того же тела;

3) физический смысл имеет только разность ПЭ.

ЗСПМЭ для материальной точки

Работа \forall силы \Rightarrow изменение КЭ:

$$A_{12} = K_2 - K_1$$

Для консервативных сил:

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

и

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

Обозначение: $E = U + K$ - *полная механическая энергия* (ПМЭ), равная сумме ПЭ и КЭ.

$$E = \text{const} -$$

ПМЭ сохраняется при движении МТ в поле консервативных сил.

Это закон сохранения ПМЭ МТ (ЗСПМЭ, кратко ЗСЭ).

ЗСПМЭ для системы материальных точек

КЭ системы МТ: $K = \sum K_i$

Если, кроме того, все силы консервативные:

$$U = \sum U_i^{ext} + \frac{1}{2} \sum \sum U_{ij}$$

U_i^{ext} – ПЭ i -того тела в поле внешних сил;

U_{ij} - ПЭ взаимодействия i -того тела с j -тым;

Коэффициент $\frac{1}{2}$ - чтобы не учитывать энергию U_{ij} дважды (как U_{ij} и как U_{ji})

В этом случае: $E = U + K = \text{const}$,

т.е. выполняется ЗСПМЭ уже системы МТ.

Закон сохранения и изменения полной механической энергии

Если не все силы, действующие на систему МТ или внутри нее, консервативные, то ПМЭ системы меняется на величину работы неконсервативных сил A^{HK} :

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = A^{HK},$$

или
$$E_2 - E_1 = U_2 - U_1 + K_2 - K_1 = A_{12}^{HK}$$

Это соотношение выражает *закон сохранения и изменения* ПМЭ системы.

Для чего вводилось понятие о ПЭ?

Во-1, с его помощью формулируется закон сохранения и изменения ПМЭ \Rightarrow упрощает решение динамических уравнений движения.

Во-2, знание ПЭ \downarrow объем сведений, нужных для составления этих уравнений движения.

ПЭ и сила

Основное уравнение динамики:

$$d\vec{p}/dt = \vec{F} \text{ или } \vec{w} = \vec{F}/m$$

Нужно знать 3 функции F_x , F_y и F_z , а если тел N штук, то функций должно быть $3N$ штук.

Если силы консервативные, то приращение ПЭ:

$$\Delta U = U(\vec{r} + \vec{\Delta r}) - U(\vec{r}) = -(\vec{F}, \vec{\Delta r}) = \\ - (F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z)$$

Если $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, то

$$F_x = -\partial U/\partial x, \quad F_y = -\partial U/\partial y, \quad F_z = -\partial U/\partial z.$$

Т. обр., нужно знать в 3 раза меньше функций, но при этом уметь дифференцировать функцию ПЭ.

Частная производная

- $F_x = -\partial U / \partial x$ - ?

Если $f(x)$ – функция 1 переменной x , то:

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$ - производная функции f по x (де-эф по де-икс)

Если $f(x, y, z)$ – функция многих (здесь трех) переменных, то при фиксированных y и z :

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ - частная производная функции f по x (де-эф по де-икс)

Оператор градиента

- $$\vec{F} = -\vec{i} \partial U / \partial x - \vec{j} \partial U / \partial y - \vec{k} \partial U / \partial z$$

Короче записывается:
$$\vec{F} = -grad U$$

(читается: сила равна минус градиенту ПЭ).

Градиент – это дифференциальная операция, с помощью кот. из \forall скалярной функции a можно получить вектор \vec{B} по правилу:

$$\vec{B} = grad a = \vec{i} \partial a / \partial x + \vec{j} \partial a / \partial y + \vec{k} \partial a / \partial z$$

Вектор, кот. получается в результате этой операции, также наз. градиентом.

Градиент удобно записывать с пом. символического вектора «набла»:

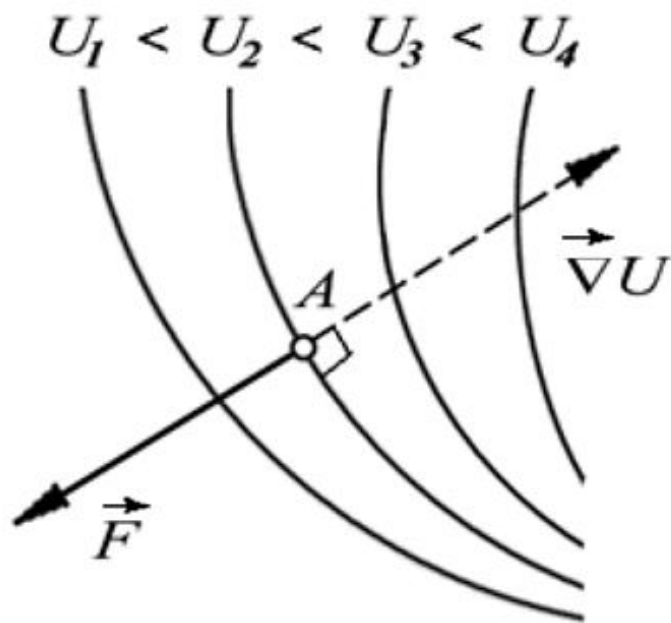
$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$grad a = \vec{\nabla} a$$

$$\vec{F} = -grad U = -\vec{\nabla} U$$

Свойства градиента

(не оператора, а результата его действия)



1) направлен по нормали к поверхности равной ПЭ в сторону ее увеличения (сила в противоположную сторону, на рис. ПЭ возрастает слева направо);

2) модуль градиента равен производной в направлении наибольшей скорости роста ПЭ

(совпадает с нормалью к поверхности равной ПЭ)

Пример связи ПЭ и силы (1)

а) сила тяжести

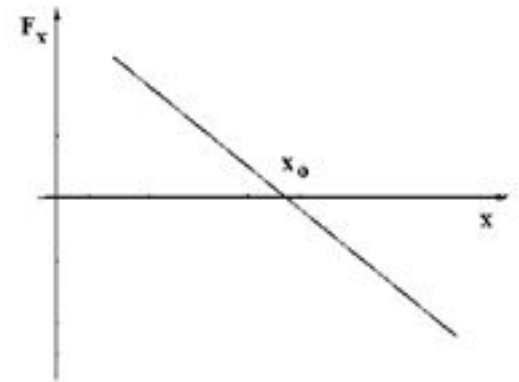
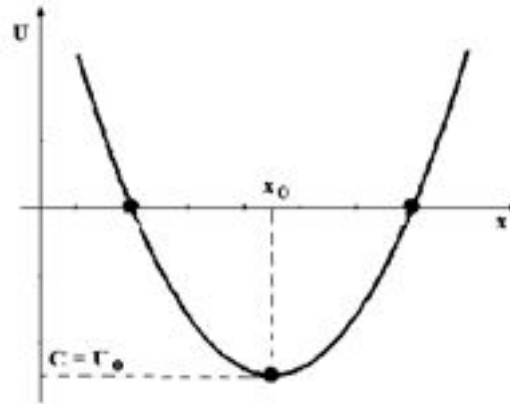
$$U = mgz + C$$

$$\vec{F} = -mg \frac{dz}{dz} \vec{k} = -mg \vec{k}$$

б) сила упругости

$$U = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 + C$$

$$\vec{F} = -k (x - x_0) \vec{i}$$



Пример связи ПЭ и силы (2)

в) сила всемирного тяготения

$$U = -\gamma m_1 m_2 / r$$

$$\vec{F}_{\text{гр}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

