

***«ЗАДАНИЯ № 6 и 11 В ЕГЭ 2022
ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ, ПРОТОТИПЫ И
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО
РЕШЕНИЮ»***

*Зимовец Татьяна Ивановна,
учитель математики ГБОУ СОШ № 1 «ОЦ» с Кинель-Черкассы*



Использование свойств производной для исследования функций

Задание 6

- использование свойств производной при анализе функций,
- геометрический смысл производной
- физический смысл производной
- первообразная функции



Физический смысл производной

Задача 1

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Решение. Найдем закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = 12t - 48$.

При $t = 9$ с имеем: $v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$ м/с.

Ответ: 60.

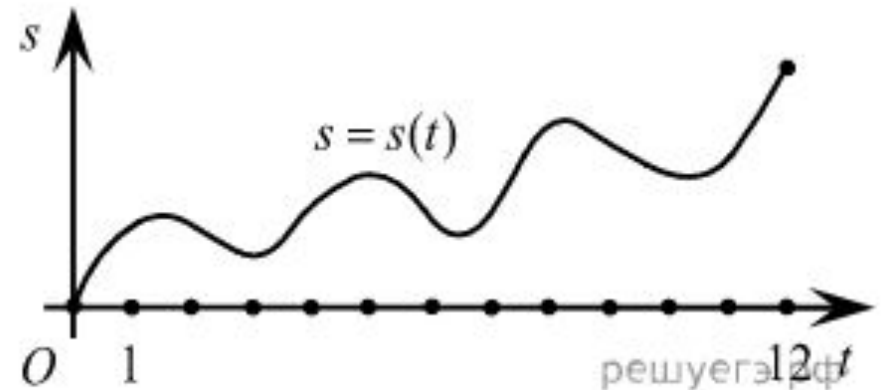


Задача 2

Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s .

Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени. Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $s(t)$. Точек экстремума на графике 6.



Ответ: 6.



Геометрический смысл производной

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

- Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания
- Точки экстремума функции
- Понятие о производной функции, геометрический смысл производной
- Применение производной к исследованию функций и построению графиков



Вспомнить связь функции и её производной поможет рисунок

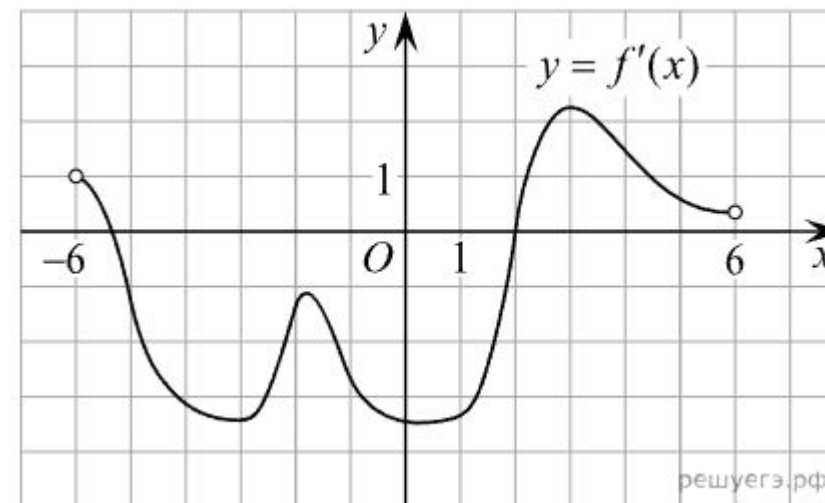


- Точки экстремума (максимума и минимума) следует искать среди критических точек (производная равна нулю или не существует).
- Если производная меняет свой знак с плюса на минус при переходе через точку x_0 , то x_0 – точка максимума.
- Если производная меняет свой знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0 , то x_0 – точка минимума.
- Если функция на отрезке возрастает, то своё наименьшее значение она принимает на левом конце отрезка, а наибольшее - на правом.
- Если функция на отрезке убывает, то своё наименьшее значение она принимает на правом конце отрезка, а наибольшее - на левом .

Задача 1

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение: Промежутки возрастания данной функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам $(-6; -5,2]$ и $[2; 6)$. Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.



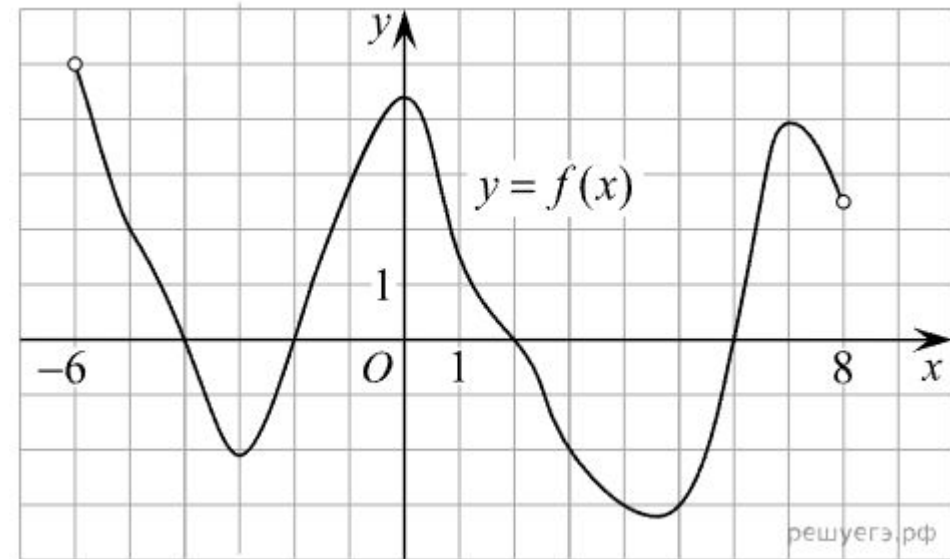
Ответ: 14



Задача 2

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение. Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т.е. на интервалах $(-3; 0)$ и $(4,2; 7)$. В них содержатся целые точки $-2, -1, 5$ и 6 , всего их 4.

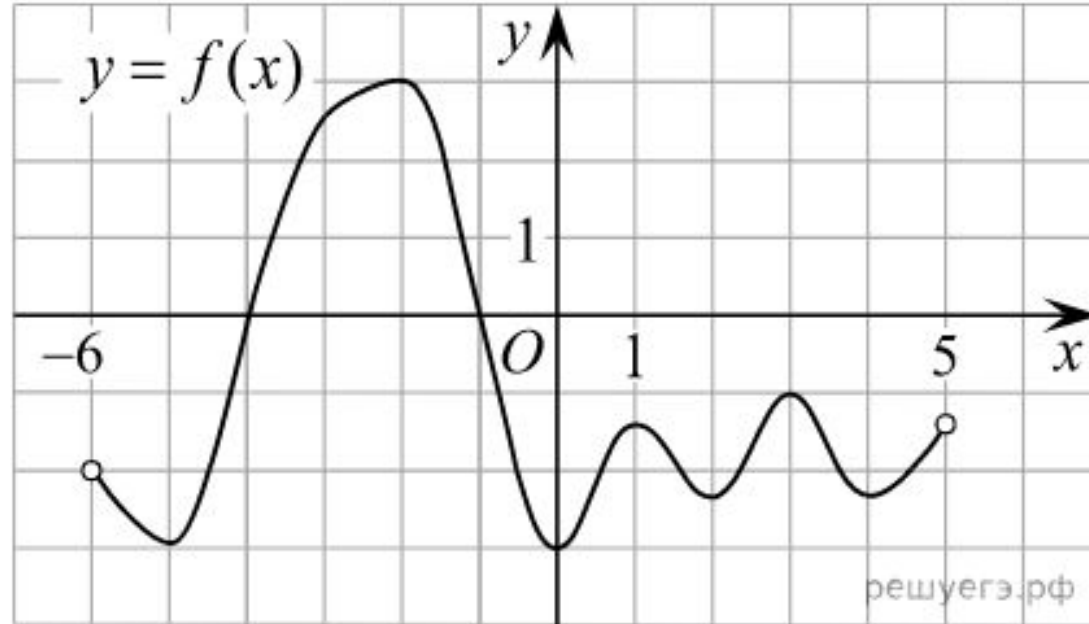


Ответ: 4



Задачи 3

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.



Решение. Касательная параллельна горизонтальной прямой в точках экстремумов, таких точек на графике 7.

Ответ: 7.

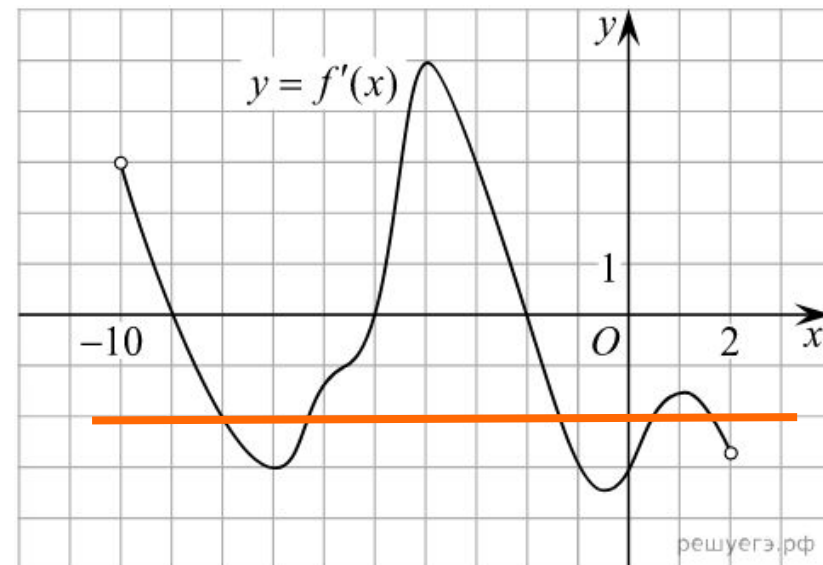


Задача 4

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны -2 . Найдем количество точек, в которых это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = -2$. На данном интервале таких точек 5.



Ответ: 5.



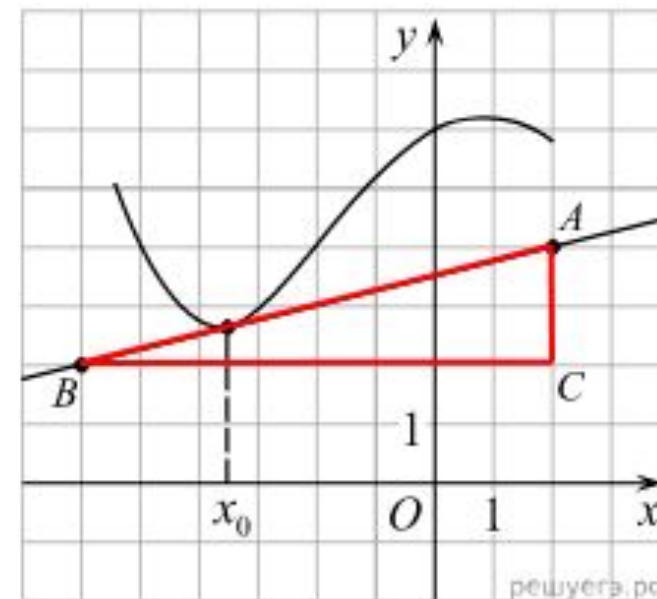
Задача 5

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; 4)$, $B(-6; 2)$, $C(2; 2)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ABC . Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$



Ответ: 0,25.



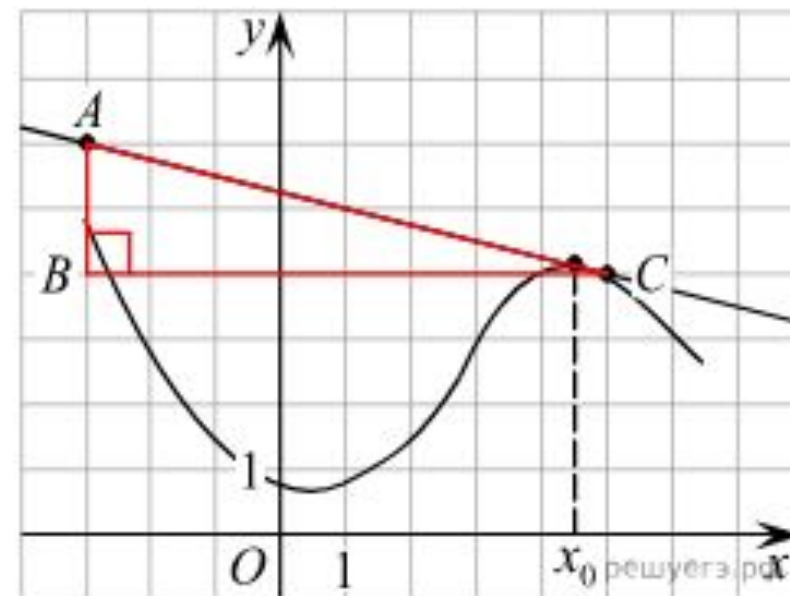
Задача 6

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-3; 6)$, $B(-3; 4)$, $C(5; 4)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg} \angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

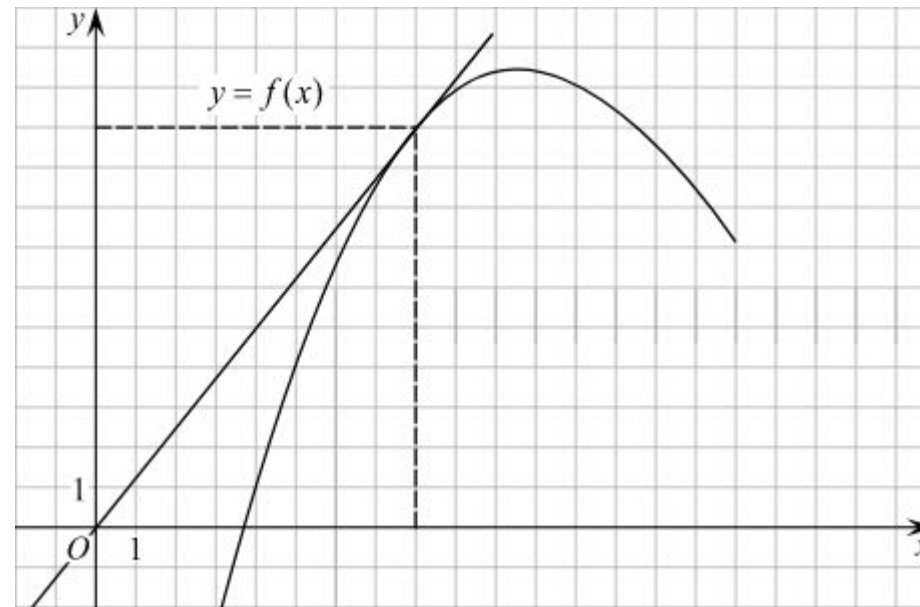


Ответ: $-0,25$.

Задача 7

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$

Решение: Поскольку касательная проходит через начало координат, её уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку $(8; 10)$, поэтому $10 = 8 \cdot k$, откуда $k = 1,25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: **$f'(8) = 1,25$**



Ответ: 1,25



Задача 8

Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = 7$:

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Ответ: 0,5.



Задача 10

Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$.

Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся

системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{3}, \\ x = -1, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания -1 .

Ответ: -1 .



Задача 11

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7.



Задача 12

На рисунке изображены график функции и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Найдите значение производной функции $g(x) = 6f(x) - 3x$ в точке x_0 .

Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:

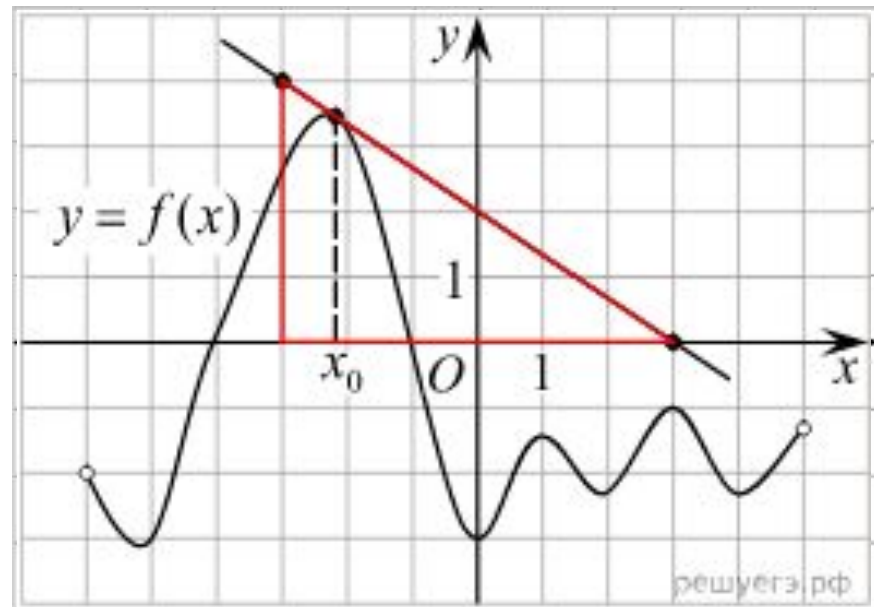
$$g'(x) = 6 \cdot f'(x) - 3.$$

По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.

$$f'(x_0) = -\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$g'(x_0) = 6 \cdot f'(x_0) - 3 = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 3 = -7.$$



Ответ: -7.

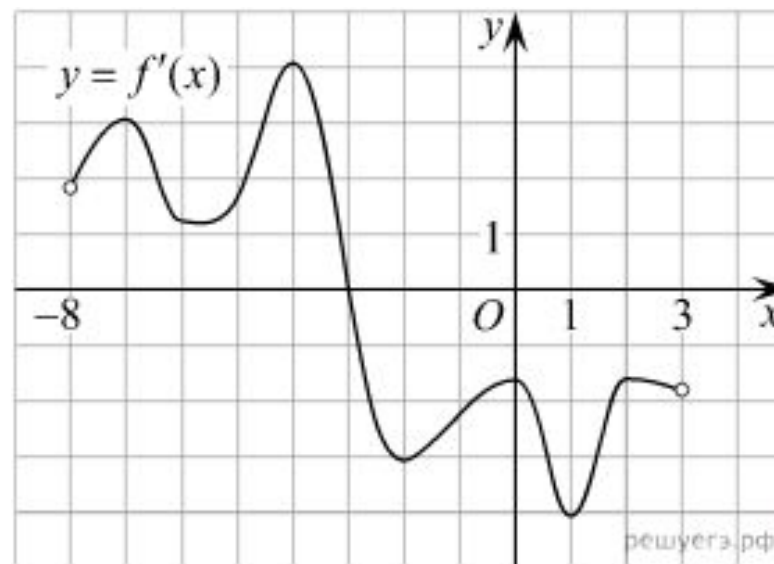
Применение производной к исследованию функций

$f(x)$	\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Задача 1

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $y=f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение. На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке -3 .

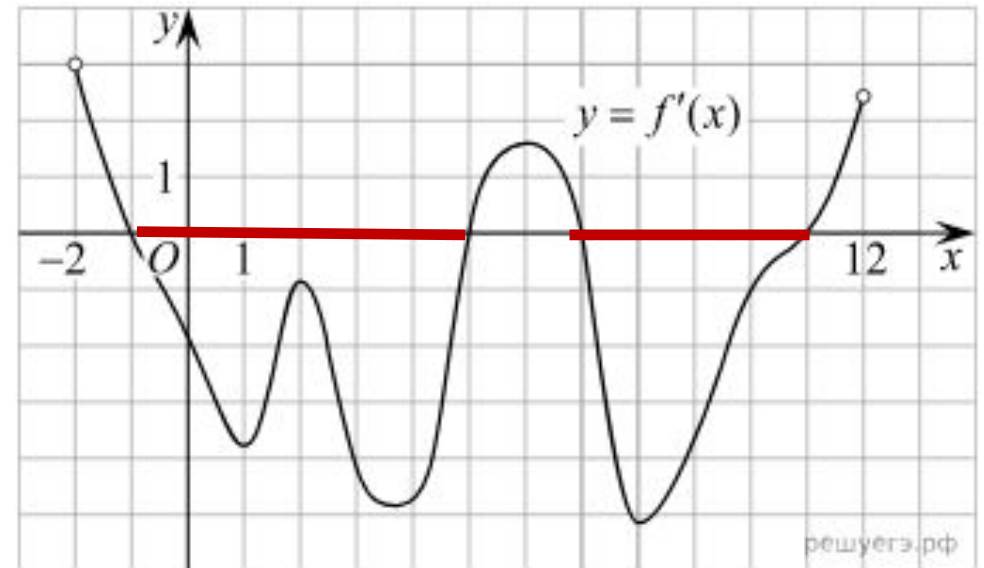


Ответ: -3 .

Задача 2

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, а её производная положительна (отрицательна) на интервале $(a; b)$, то функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.
Производная функции отрицательна, на интервалах $(-1; 5)$ и $(7; 11)$. Значит, функция убывает на отрезках $[-1; 5]$ длиной 6 и $[7; 11]$ длиной 4. Длина наибольшего из них 6.



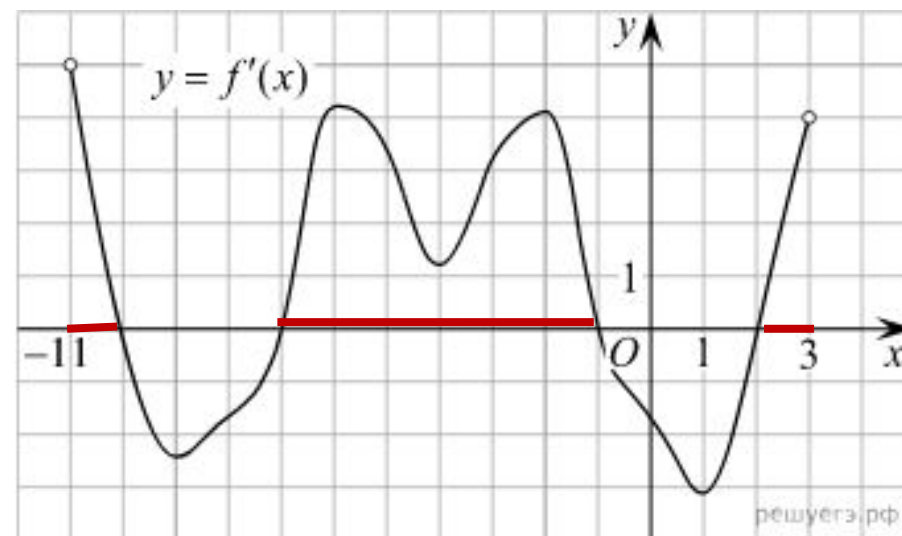
Ответ: 6.



Задача 3

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение. Промежутки возрастания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции неотрицательна, то есть промежуткам $(-11; -10]$, $[-7; -1]$, $[2; 3)$. Наибольший из них — отрезок $[-7; -1]$, длина которого 6.



Ответ: 6.



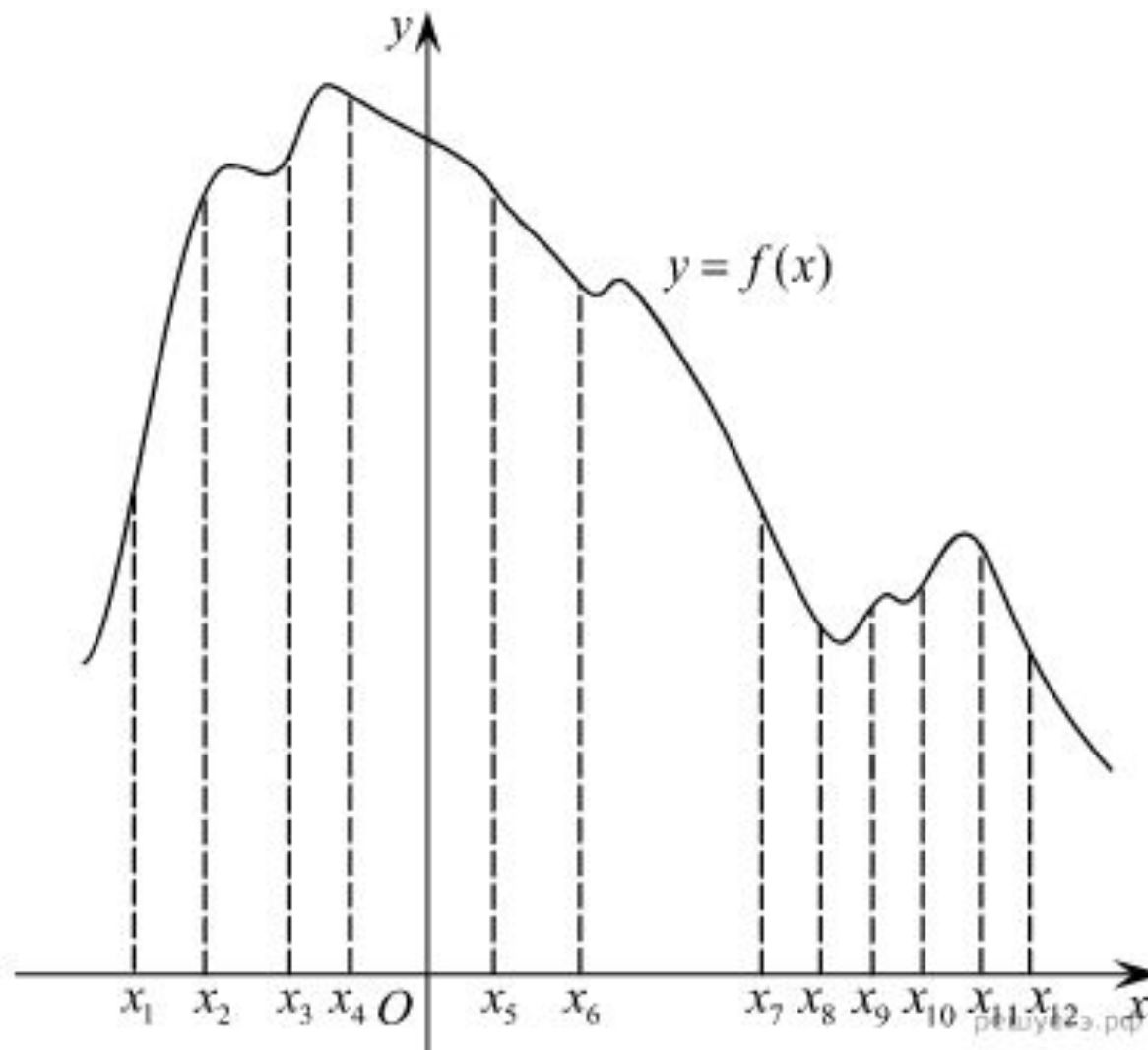
Задача 4

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс. В скольких из этих точек производная функции отрицательна?

Решение.

Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция убывает. В этих интервалах лежат 7 точек.

Ответ: 7.



Первообразная

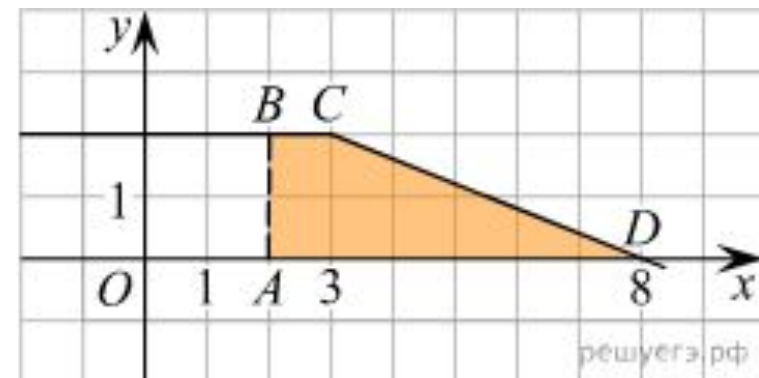
Задача 1

На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Решение. Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции. Поэтому

$$F(b) - F(a) = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7.$$

Ответ: 7.



Задача 2

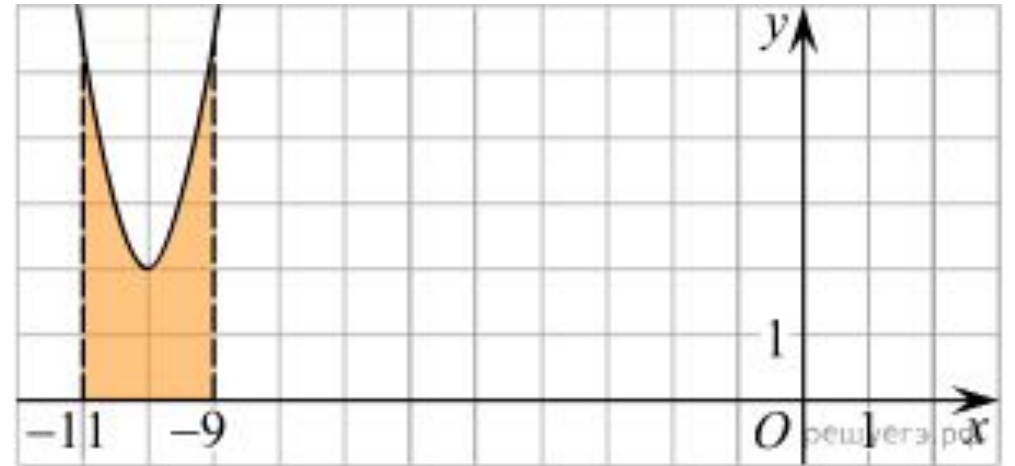
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция

$$F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}.$$

— одна из первообразных функции $y = f(x)$.

Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках и

Имеем:

$$F(-9) = -1018\frac{7}{8}.$$

$$F(-11) = -1024\frac{7}{8}.$$

$$F(-9) - F(-11) = -1018\frac{7}{8} + 1024\frac{7}{8} = 6.$$

Ответ: 6.



Задание 11

- **нахождение точек максимума и минимума функции**
- **нахождение наибольшего и наименьшего значения функции**



Исследование степенных и иррациональных функций

Задача 1

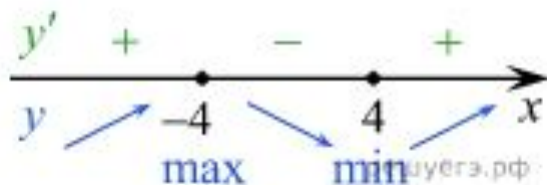
Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x - 4)(x + 4)$$

Найдем нули производной: $3(x - 4)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 4. \end{cases}$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Ответ: -4.



Задача 2

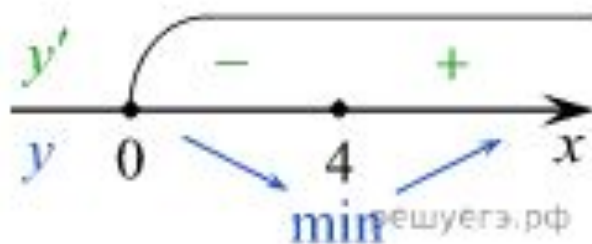
Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$.

Решение. Запишем функцию в виде $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$

и найдем ее производную $y' = \sqrt{x} - 2$.

Найдем нули производной: $\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$.

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=4$

Ответ: 4.



Исследование частных

Задача 1

Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{36}{x}$ на отрезке $[1; 9]$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y' = 1 - \frac{36}{x^2}$.

Найдем нули производной: $1 - \frac{36}{x^2} = 0$, $x = 6$, $x = -6$,

На отрезке $[1; 9]$ только точка $x = 6$,

Вычисляем значение функции в точках 1, 6, 9 и выбираем наименьший результат

$$y(1) = 37 \quad y(6) = 12 \quad y(9) = 13$$

Ответ: 12.



Исследование произведений

Задача 1 Найдите наибольшее значение функции $y = (8 - x)e^{x-7}$ на отрезке $[3; 10]$.

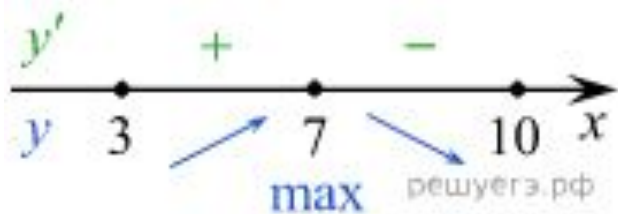
Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((8 - x)e^{x-7})' = (8 - x)'e^{x-7} + (8 - x)(e^{x-7})' = (8 - x)e^{x-7} - e^{x-7} = (7 - x)e^{x-7}.$$

Найдем нули производной:
$$\begin{cases} (7 - x)e^{x-7} = 0 \\ 3 \leq x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=7$ заданная функция имеет максимум. Найдем наибольшее значение:
 $y(7) = 1$

Ответ: 1.



Исследование показательных и логарифмических функций

Задача 1

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 5) - 2x + 9$.

Решение.

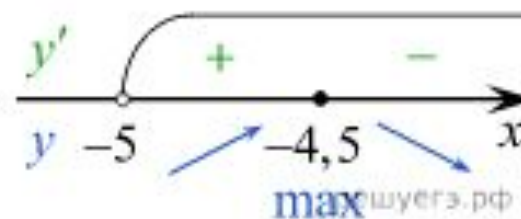
Функция определена и дифференцируема на $(-5; +\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{1}{x+5} - 2.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x+5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -4,5.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4,5$.

Ответ: $-4,5$.

Исследование тригонометрических функций

Задача 1

Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3 \sin x + 5$:

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

Решение. Найдем производную заданной функции: $y' = 15 - 3 \cos x$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0) = 15 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.



Исследование функций без помощи производной

Задача 1

Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{4 - 4x - x^2}$.

Решение. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max} = -\frac{b}{2a}$,

В нашем случае — в точке -2 . Поскольку функция $y = \sqrt{x}$

возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума подкоренное выражение.

Ответ: -2 .



Задача 2

Найдите наименьшее значение функции $y = 7x^2 + 2x + 3$.

Решение. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$

с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$

$$x_{min} = -1$$

Находим $y(-1) = 7^2 = 49$

Ответ: 49

