«ЗАДАНИЯ № 6 и 11 В ЕГЭ 2022 ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ, ПРОТОТИПЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ»

Зимовец Татьяна Ивановна,
учитель математики ГБОУ СОШ № 1 «ОЦ» с Кинель-Черкассы

Использование свойств производной для исследования функций

Задание 6

- использование свойств производной при анализе функций,
- геометрический смысл производной
- физический смысл производной
- первообразная функции

Физический смысл производной

Задача 1

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$

(где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени *t* = 9 с.

Решение. Найдем закон изменения скорости: $\upsilon(t) = x'(t) = 12t - 48.$

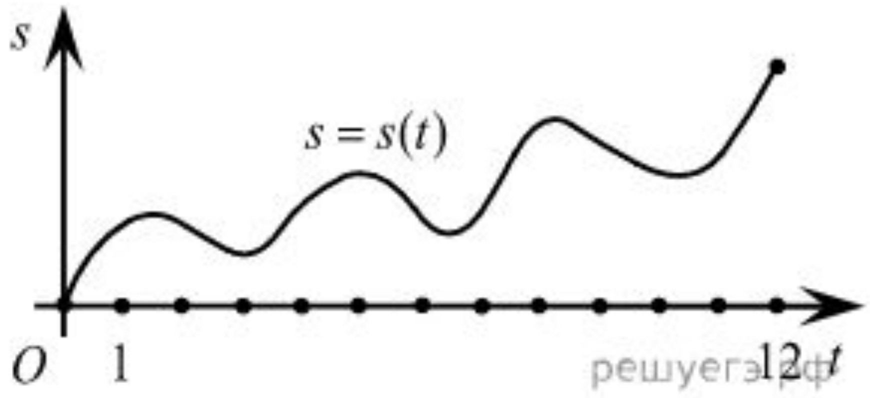
При $t = 9$ с имеем: $\upsilon(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$ м/с.

Ответ: 60.

Задача 2

Материальная точка *M* начинает движение из точки *A* и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки *A* до точки *M* со временем. На оси абсцисс откладывается время *t* в секундах, на оси ординат — расстояние *s*.
Определите, сколько раз за время движения скорость точки *M* обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени. Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $s(t)$. Точек экстремума на графике 6.



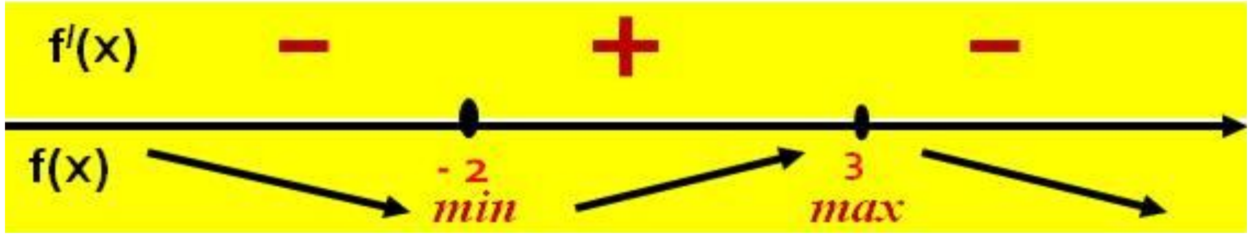
Ответ: 6.

Геометрический смысл производной

$$\boxed{k = tg\alpha = f'(x_0)}$$

- Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания
- Точки экстремума функции
- Понятие о производной функции, геометрический смысл производной
- Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Вспомнить связь функции и её производной поможет рисунок

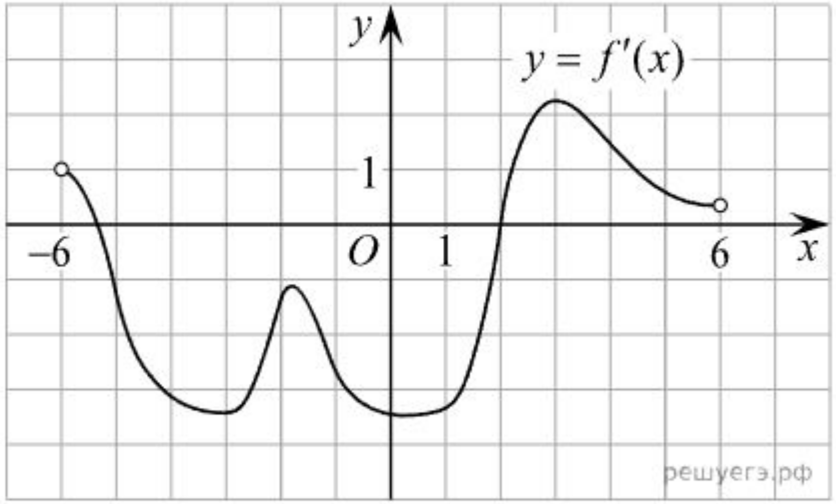


- **Точки экстремума(максимума и минимума) следует искать среди критических точек (производная равна нулю или не существует).**
- **Если производная меняет свой знак с плюса на минус при переходе через точку** Хо, **то Хо – точка максимума.**
- **Если производная меняет свой знак с минуса на плюс при переходе через точку** Хо, **то Хо – точка минимума.**
- **Если функция на отрезке возрастает, то своё наименьшее значение она принимает на левом конце отрезка, а наибольшее - на правом.**
- **Если функция на отрезке убывает, то своё наименьшее значение она принимает на правом конце отрезка, а наибольшее - на левом .**

Задача 1

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

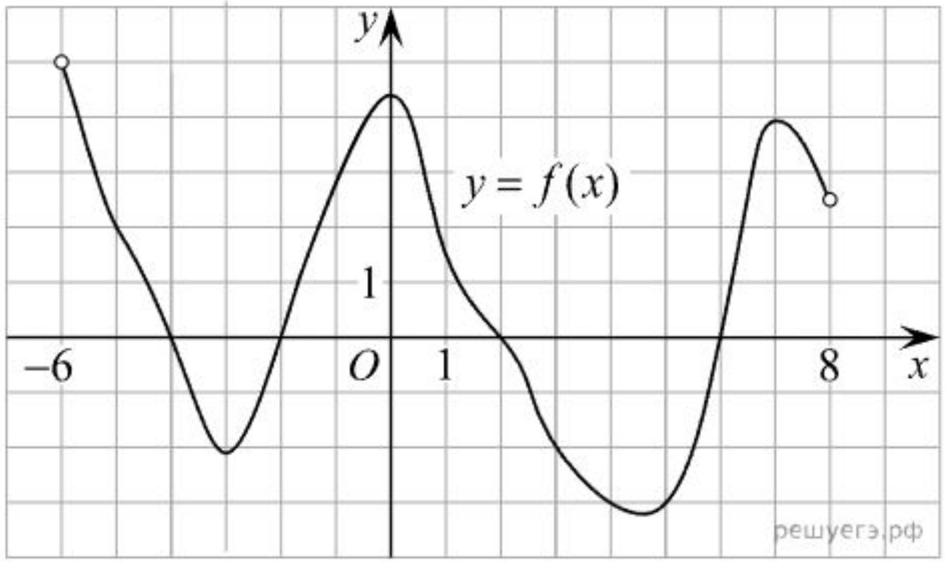
Решение: Промежутки возрастания данной функции f(x) соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам $(-6; -5{,}2]$ и $[2; 6)$. Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.



Ответ: 14

Задача 2

На рисунке изображен график функции y=f(x), определенной на интервале (−6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

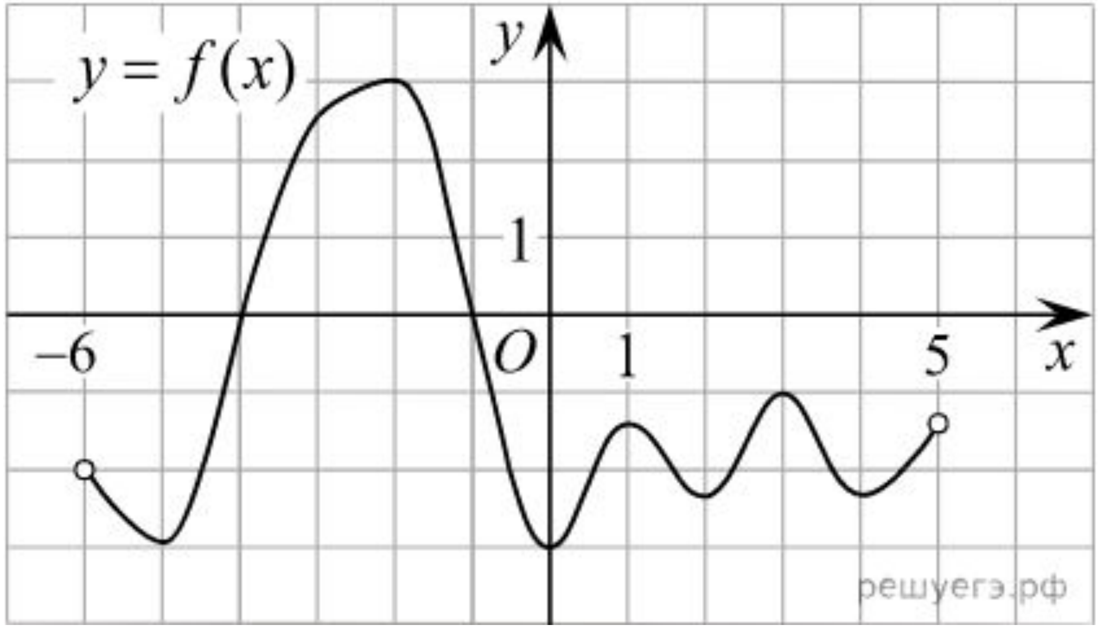


Решение. Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах (−3; 0) и (4,2; 7).
В них содержатся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.

Ответ: 4

Задачи 3

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

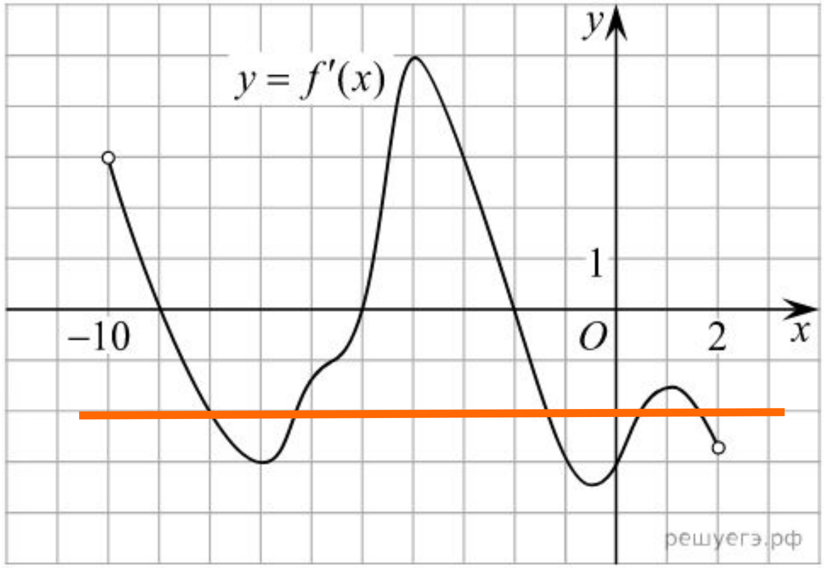


Решение. Касательная параллельна горизонтальной прямой в точках экстремумов, таких точек на графике 7.

Ответ: 7.

Задача 4

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



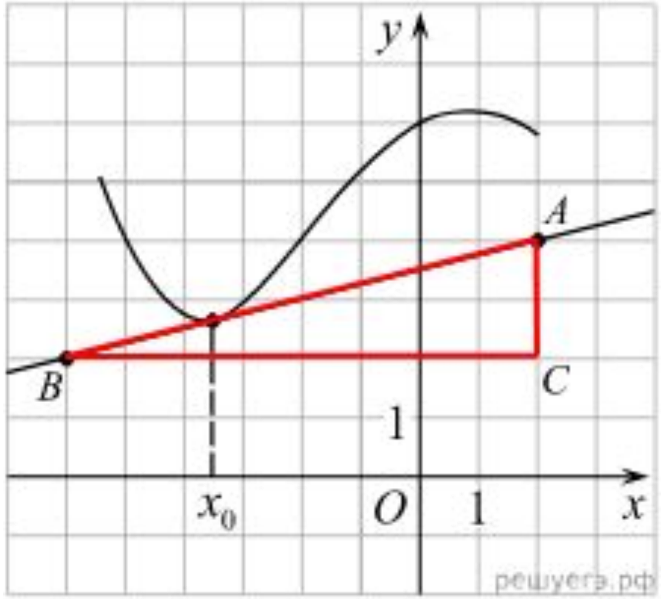
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны –2. Найдем количество точек, в которых это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = -2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.

Задача 5

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.

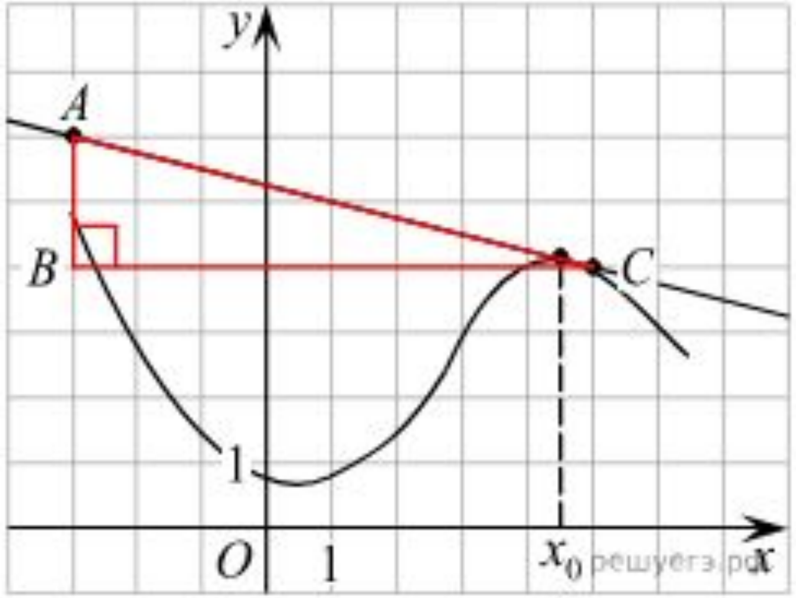
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках *A* (2; 4), *B* (−6; 2), *C* (2; 2). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу *ABC*. Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Задача 6

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.

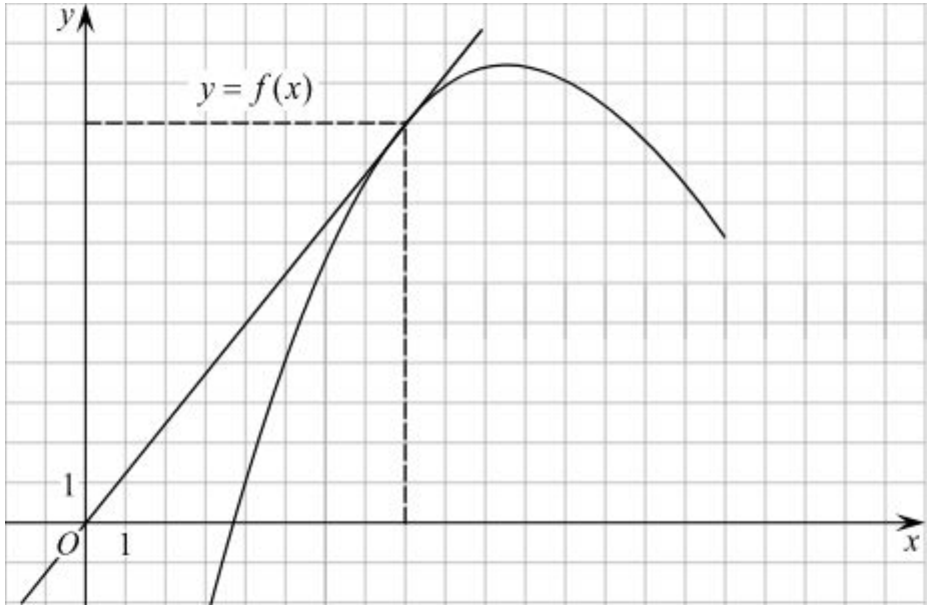
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-3; 6)$, $B(-3; 4)$, $C(5; 4)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0{,}25.$$

Ответ: −0,25.

Задача 7

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите f'(8)



Решение: Поскольку касательная проходит через начало координат, её уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку $(8; 10)$, поэтому $10 = 8 \cdot k$, откуда $k = 1{,}25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: **f'(8) = 1,25**

Ответ: 1,25

Задача 8

Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = 7$:

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Задача 10

Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$.

Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся

системой требований: $\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{11}{3}, \\ x = -1, \end{array} \right. \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \ (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

Ответ: −1.

Задача 11

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

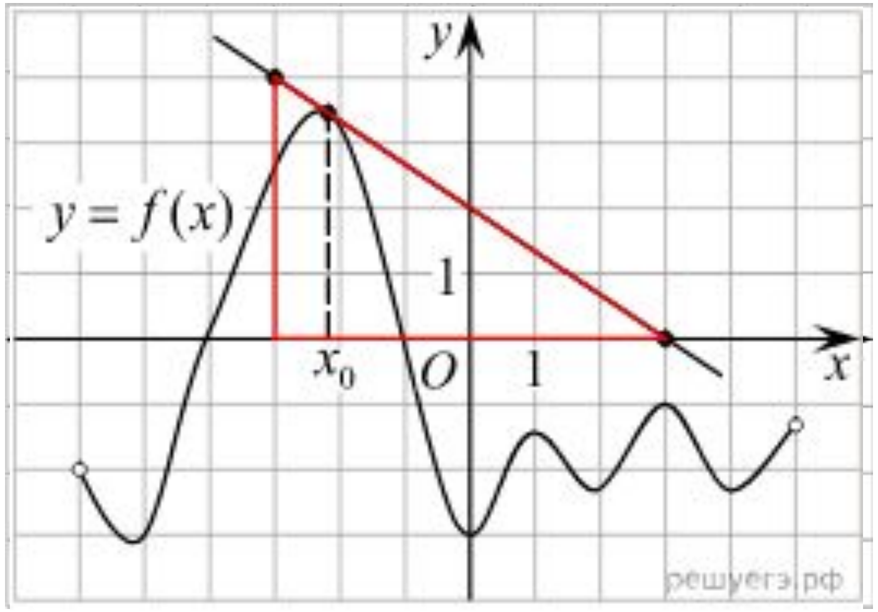
Задача 12

На рисунке изображены график функции и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $g(x) = 6f(x) - 3x$ в точке x_0.

Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = 6 \cdot f'(x) - 3.$$



По рисунку найдём значение f"(x_0). Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.

$$f'(x_0) = -\frac{2}{3}.$$

Тогда $$g'(x_0) = 6 \cdot f'(x_0) - 3 = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 3 = -7.$$

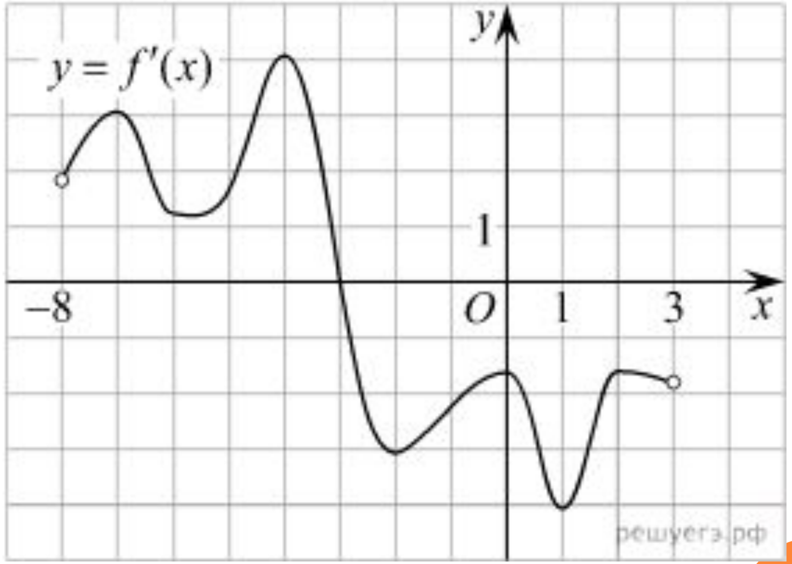
Ответ: −7.

Применение производной к исследованию функций

$f(x)$	↗	max	↘	min	↗
$f'(x)$	+	0	−	0	+

Задача 1

На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции определенной на интервале (−8; 3). В какой точке отрезка [−3; 2] функция y=f(x) принимает наибольшее значение?

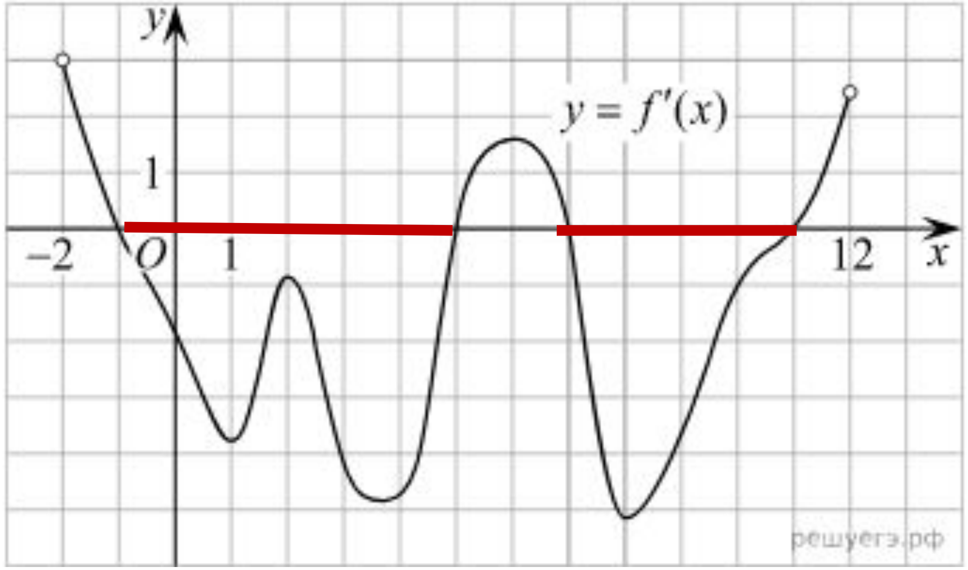


Решение. На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3.

Ответ: −3.

Задача 2

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.



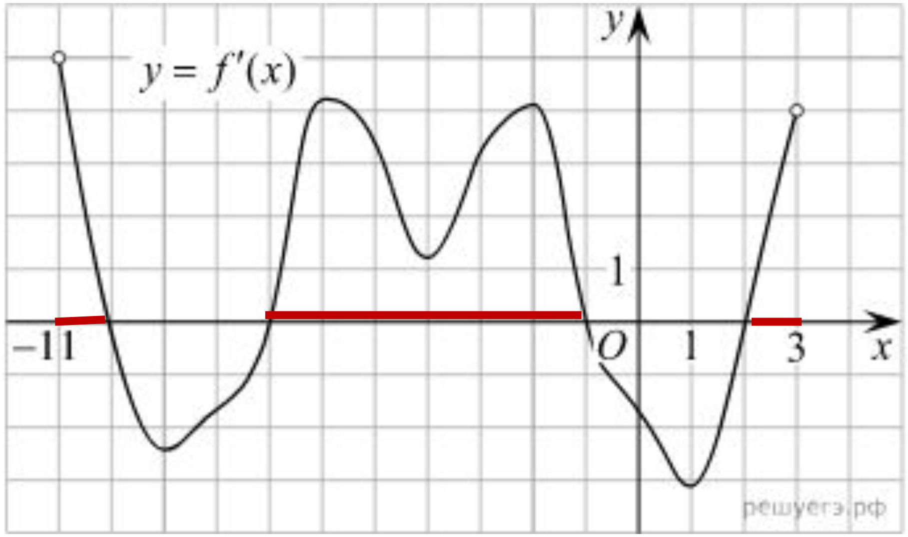
Решение. Если функция непрерывна на отрезке [*a*; *b*], а её производная положительна (отрицательна) на интервале (*a*; *b*), то функция возрастает (убывает) на отрезке [*a*; *b*]. Производная функции отрицательна, на интервалах (−1; 5) и (7; 11). Значит, функция убывает на отрезках [−1; 5] длиной 6 и [7; 11] длиной 4. Длина наибольшего из них 6.

Ответ: 6.

Задача 3

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.

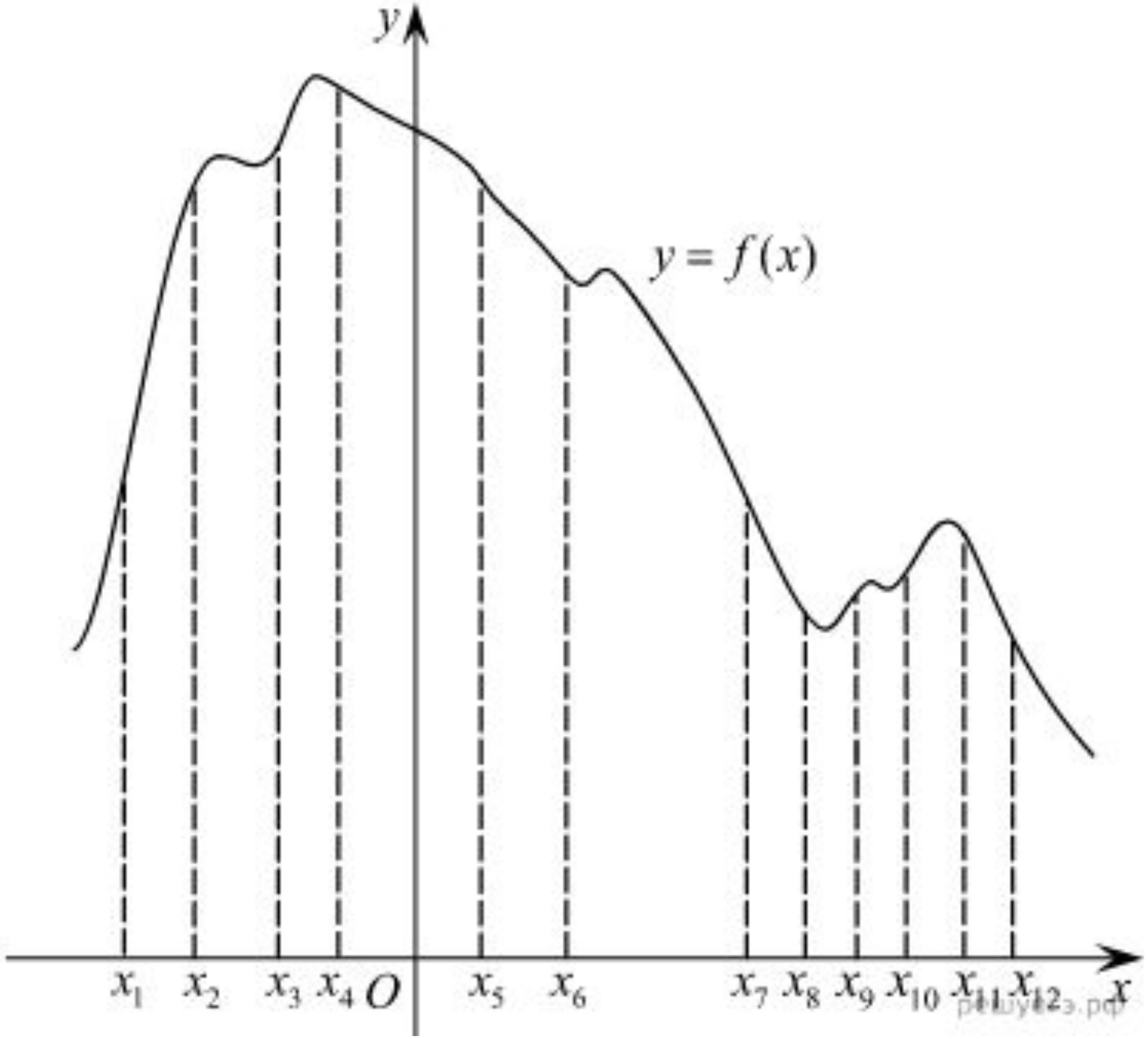
Решение. Промежутки возрастания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции неотрицательна, то есть промежуткам (−11; −10], [−7; −1], [2; 3). Наибольший из них — отрезок [−7; −1], длина которого 6.



Ответ: 6.

Задача 4

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс. В скольких из этих точек производная функции отрицательна?



Решение.

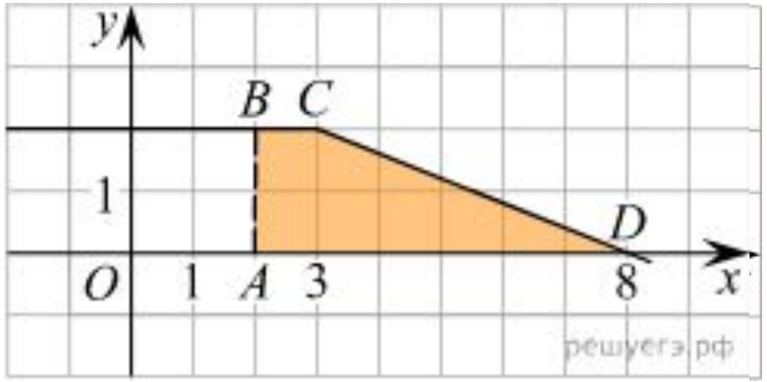
Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция убывает. В этих интервалах лежат 7 точек.

Ответ:7.

Первообразная

Задача 1

На рисунке изображён график некоторой функции y=f(x) (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите *F*(8) − *F*(2), где *F*(*x*) — одна из первообразных функции *f*(*x*).



Решение. Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции Поэтому

$$F(b)-F(a)=\frac{1+6}{2}\cdot 2=7.$$

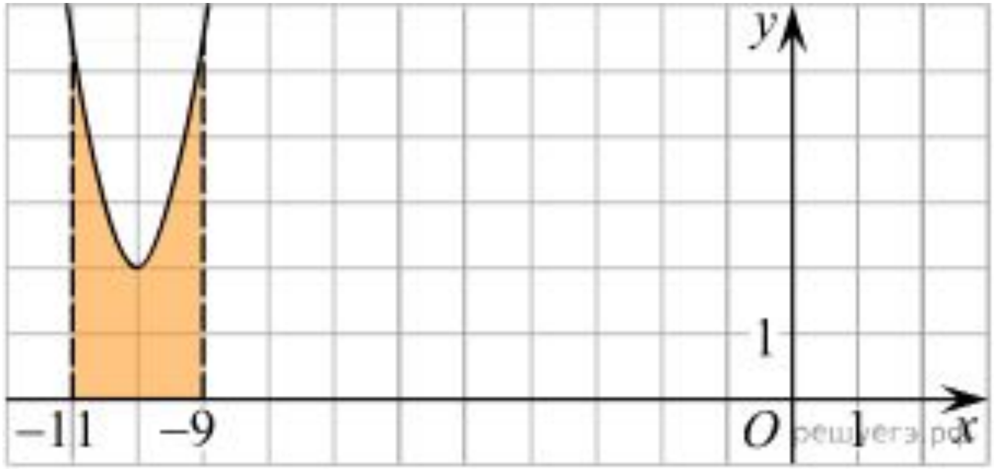
Ответ:7.

Задача 2

На рисунке изображён график функции *y* = *f*(*x*). Функция

$$F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$$

— одна из первообразных функции *y* = *f*(*x*). Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках и
Имеем:

$$F(-9)=-1018\frac{7}{8}.$$

$$F(-11)=-1024\frac{7}{8}.$$

$$F(-9)-F(-11)=-1018\frac{7}{8}+1024\frac{7}{8}=6.$$

Ответ:6.

Задание 11

- нахождение точек максимума и минимума функции
- нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

Исследование степенных и иррациональных функций

Задача 1

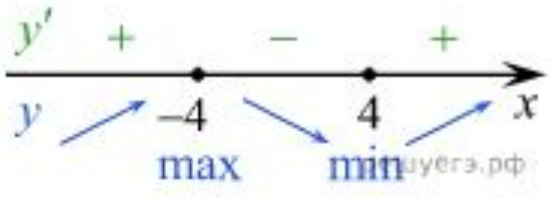
Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17.$

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x-4)(x+4)$$

Найдем нули производной: $3(x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Ответ: −4.

Задача 2

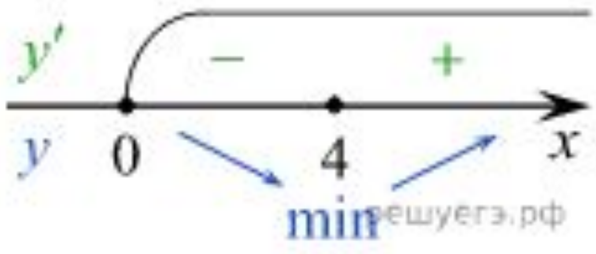
Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1.$

Решение. Запишем функцию в виде $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$

и найдем ее производную $y' = \sqrt{x} - 2.$

Найдем нули производной: $\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4.$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума x=4

Ответ: 4.

Исследование частных

Задача 1

Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{36}{x}$ **на отрезке** $[1;\ 9]$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y' = 1 - \frac{36}{x^2}$.

Найдем нули производной: $1 - \frac{36}{x^2} = 0,$ $x = 6,$ $x = -6,$

На отрезке $[1;\ 9]$. только точка $x = 6,$

Вычисляем значение функции в точках 1, 6, 9 и выбираем наименьший результат

y(1) = 37 **y(6) = 12** y(9) = 13

Ответ: 12.

Исследование произведений

Задача 1 Найдите наибольшее значение функции $y=(8-x)e^{x-7}$ на отрезке $[3;10]$.

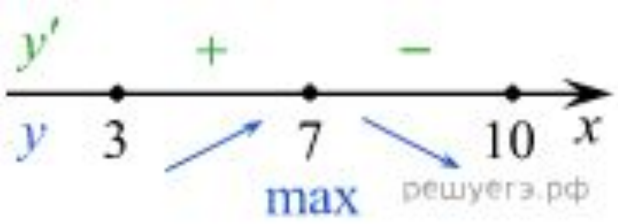
Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y'=\left((8-x)e^{x-7}\right)'=(8-x)'e^{x-7}+(8-x)\left(e^{x-7}\right)'=(8-x)e^{x-7}-e^{x-7}=(7-x)e^{x-7}.$$

Найдем нули производной: $\begin{cases}(7-x)e^{x-7}=0\\ 3\leqslant x\leqslant 10\end{cases}\Leftrightarrow x=7.$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке x=7 заданная функция имеет максимум. Найдем наибольшее значение:
y(7) = 1

Ответ: 1.

Исследование показательных и логарифмических функций

Задача 1

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5) - 2x + 9$.

Решение.

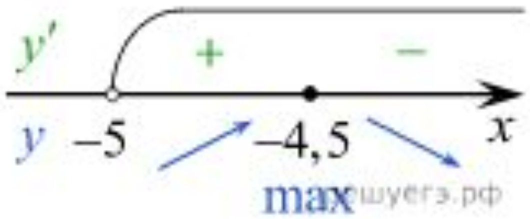
Функция определена и дифференцируема на $(-5; +\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{1}{x+5} - 2.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x+5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -4,5.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4,5$.

Ответ: −4,5.

Исследование тригонометрических функций

Задача 1

Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

Решение. Найдем производную заданной функции: y' = 15 – 3 Cosx Уравнение y' = 0 не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0) = 15 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.

Исследование функций без помощи производной

Задача 1

Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{4 - 4x - x^2}.$

Решение. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$
с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max} = -\frac{b}{2a}.$

В нашем случае — в точке −2. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$

возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума подкоренное выражение.

Ответ: −2.

Задача 2

Найдите наименьшее значение функции $y = 7^{x^2+2x+3}$.

Решение. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$

с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$

$x_{min} = -1$

Находим $y(-1) = 7^2 = 49$

Ответ: 49