Двойные интегралы в прямоугольной области

Пусть область интегрирования R представляет собой прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$. Тогда двойной интеграл в такой области выражается через повторный интеграл в следующем виде:

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

В данном случае область интегрирования R относится одновременно к типу I и II, так что у нас есть возможность выбирать, по какой переменной (x или y) начинать интегрировать функцию $f(x, y)$. Обычно удобнее начинать с более простого интеграла.

В частном случае, когда подынтегральная функция $f(x, y)$ "расщепляется" на произведение $g(x)\, h(y)$, двойной интеграл равен произведению двух определенных интегралов:

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_R g(x)\, h(y)\, dxdy = \left(\int\limits_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int\limits_c^d h(y)\, dy \right).$$

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{R} xydxdy$ в области $R = \{(x, y) \mid 2 \le x \le 5, 0 \le y \le 1\}$.

Решение.
Как видно, подынтегральная функция $f(x, y)$ представляет собой произведение $g(x)\, h(y)$. Следовательно, интеграл равен

$$\iint\limits_{R} xydxdy = \int\limits_{2}^{4} xdx \cdot \int\limits_{0}^{1} ydy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = (8-2)\left(\frac{1}{2}-0\right) = 3.$$

Пример 2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{R} xy^2dxdy$, заданный в области $R = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 5, 0 \le y \le 2\}$.

Решение.
Поскольку функция $f(x, y)$ представляет собой произведение $g(x)\, h(y)$, интеграл равен

$$\iint\limits_{R} xy^2dxdy = \int\limits_{1}^{5} xdx \cdot \int\limits_{0}^{2} y^2dy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^5 \cdot \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{3}-0\right) = 64.$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, заданный в области $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$.

Решение.
Выражая двойной интеграл через повторный (в котором внутренний интеграл зависит от x), получаем

$$\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \int\limits_0^2 \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x+y)^2}\right] dy = \int\limits_1^2 \left[\left(-\frac{1}{x+y}\right)\Big|_{x=0}^2\right] dy$$

$$= \int\limits_1^2 \left[-\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y}\right] dy = [\ln y - \ln(y+2)]|_1^2 = \left(\ln\frac{y}{y+2}\right)\Big|_1^2 = \ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{3}{2}.$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\iint\limits_R \cos(x+y)dxdy$ в области $R = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

Решение.

В данном случае также удобно сначала проинтегрировать по x и затем по y.

$$\iint\limits_R \cos(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dx\right]dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\sin(x+y)\right)\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\right]dy$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right) - \sin y\right]dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\cancel{y}-\cancel{y}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+y+y}{2}\right]dy$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)dy = \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)dy = \sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\left[\sin\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right] = 0.$$

Пример 5

Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x-y^2)\,dxdy$, заданный в области $R=\{(x,y)\,|\,2\le x\le 3, 1\le y\le 2\}$.

Решение.

Выразим двойной интеграл через повторный. Сначала проинтегрируем по x, затем по y.

$$\iint\limits_R (x-y^2)\,dxdy = \int\limits_1^2\int\limits_2^3 (x-y^2)\,dxdy = \int\limits_1^2\left[\int\limits_2^3 (x-y^2)\,dx\right]dy = \int\limits_1^2\left[\left.\left(\frac{x^2}{2}-y^2x\right)\right|_{x=2}^{3}\right]dy$$

$$= \int\limits_1^2\left[\left(\frac{9}{2}-3y^2\right)-\left(2-2y^2\right)\right]dy = \int\limits_1^2\left(\frac{5}{2}-y^2\right)dy = \left.\left(\frac{5}{2}y-\frac{y^3}{3}\right)\right|_1^2$$

$$= \left(5-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Мы можем поменять порядок интегрирования. Результат, разумеется, не изменится.

$$\iint\limits_R (x-y^2)\,dxdy = \int\limits_2^3\int\limits_1^2 (x-y^2)\,dydx = \int\limits_2^3\left[\int\limits_1^2 (x-y^2)\,dy\right]dx = \int\limits_2^3\left[\left.\left(xy-\frac{y^3}{3}\right)\right|_{y=1}^{2}\right]dx$$

$$= \int\limits_2^3\left[\left(2x-\frac{8}{3}\right)-\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]dx = \int\limits_2^3\left(x-\frac{7}{3}\right)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{7x}{3}\right)\right|_2^3$$

$$= \left(\frac{9}{2}-7\right)-\left(2-\frac{14}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Двойные интегралы в произвольной области

Пусть область интегрирования R типа I (элементарная относительно оси Oy) ограничена графиками функций $x = a, x = b, y = p(x)$ и $y = q(x)$. При этом выполняются неравенства $a < b$ и $p(x) < q(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда двойной интеграл по области R выражается через повторный по формуле

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{x=a}^{x=b} \int\limits_{y=p(x)}^{y=q(x)} f(x, y)\,dydx.$$

Аналогичное соотношение существует и для области типа II. Пусть область интегрирования R типа II (элементарная относительно оси Ox) ограничена графиками функций $x = u(y), x = v(y), y = c, y = d$ при условии, что $c < d$ и $u(y) < v(y)$ для всех $y \in [c, d]$. Тогда двойной интеграл, заданный в области R, выражается через повторный интеграл по формуле

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{y=c}^{y=d} \int\limits_{x=u(y)}^{x=v(y)} f(x, y)\,dxdy.$$

При решении задач иногда полезно разбить исходную область интегрирования R на две или более областей и вычислять двойной интеграл в каждой области отдельно.

Пример 1

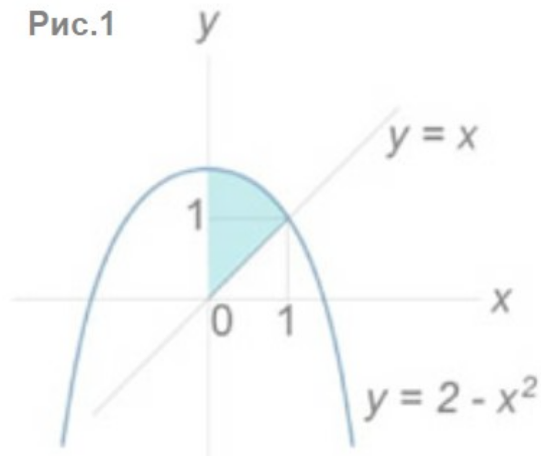
Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x-y)\,dxdy$. Область интегрирования R ограничена графиками функций $x=0$, $x=1$, $y=x$, $y=2-x^2$.

Решение.

Область интегрирования R задана множеством $R=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, x\le y\le 2-x^2\right\}$ и относится к типу I (рисунок 1). Выразим двойной интеграл через повторный:

$$\iint\limits_R (x-y)\,dxdy = \int\limits_0^1\int\limits_x^{2-x^2}(x-y)\,dydx = \int\limits_0^1\left[\int\limits_x^{2-x^2}(x-y)\,dy\right]dx.$$

Рис.1



Вычислим сначала внутренний интеграл.

$$\int\limits_x^{2-x^2}(x-y)\,dy = \left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{2-x^2} = \left[x\left(2-x^2\right)-\frac{\left(2-x^2\right)^2}{2}\right]-\left[x^2-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{3x^2}{2}+2x-2.$$

Теперь найдем внешний интеграл.

$$\int\limits_0^1\left(-\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{3x^2}{2}+2x-2\right)dx = \left(-\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+x^2-2x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{17}{20}.$$

Пример 2

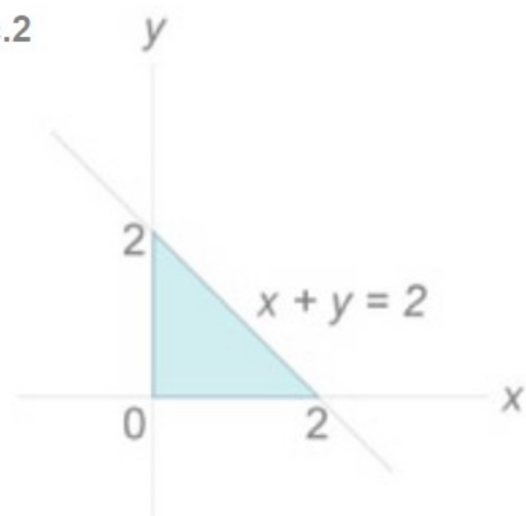
Вычислить интеграл $\iint\limits_{R} (x+y)\, dxdy$. Область интегрирования R ограничена прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

Решение.
Область R представляется в виде множества $R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 2-x\}$ (рисунок 2) и является областью I типа (элементарной относительно оси Oy). Преобразуя двойной интеграл в повторный, получаем:

$$\iint\limits_{R} (x+y)\, dxdy = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2-x} (x+y)\, dydx = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^{2-x} (x+y)\, dy\right] dx = \int\limits_0^2 \left[\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{2-x}\right] dx$$

$$= \int\limits_0^2 \left[x\,(2-x)+\frac{(2-x)^2}{2}\right] dx = \int\limits_0^2 \left(2-\frac{x^2}{2}\right) dx = \left(2x-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Рис.2



Пример 3

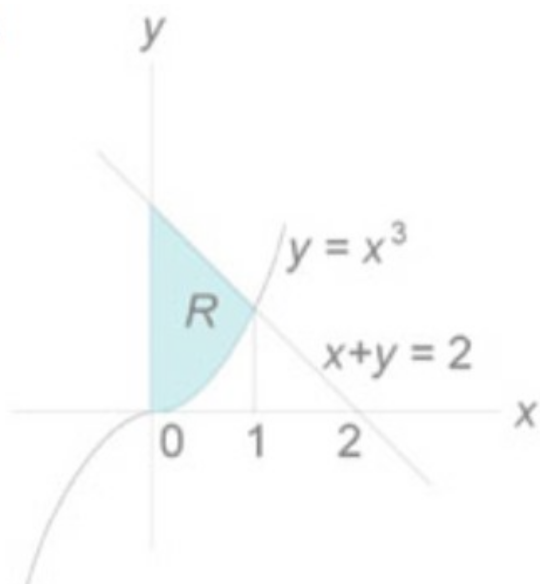
Вычислить интеграл $\iint\limits_R x\,dx\,dy$, в котором область интегрирования R ограничена графиками функций $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Решение.
Область R показана ниже на рисунке 3. Кривая $y = x^3$ и линейная функция, заданная уравнением $x + y = 2$, пересекаются в точке $(1, 1)$. Следовательно, двойной интеграл равен

$$\iint\limits_R x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^3}^{2-x} x\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^3}^{2-x} x\,dy\right] dx = \int\limits_0^1 \left[(xy)\big|_{y=x^3}^{2-x}\right] dx = \int\limits_0^1 \left[x(2-x) - x^4\right] dx$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

Рис.3



Пример 4

Найти интеграл $\iint\limits_R x^2 y dx dy$, где область R представляет собой сегмент окружности. Границы сегмента заданы уравнениями $x^2+y^2=4$, $x+y-2=0$.

Решение.

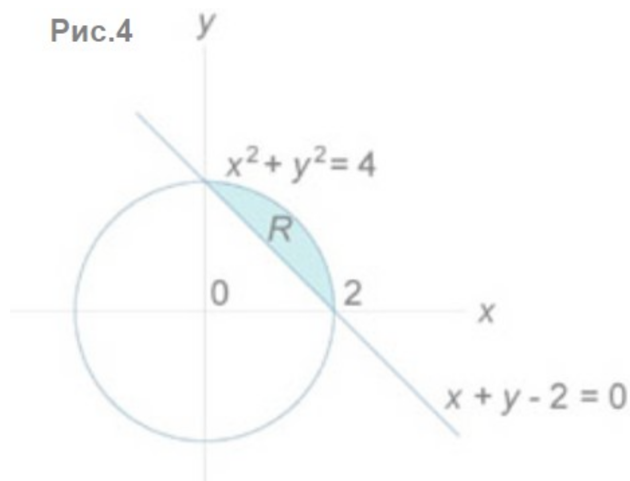
Окружность $x^2+y^2=4$ имеет радиус 2 и центр в начале координат. Область интегрирования показана на рисунке 4. Поскольку верхняя полуокружность описывается уравнением $y=\sqrt{4-x^2}$, то двойной интеграл вычисляется следующим образом:

$$\iint\limits_R x^2 y dx dy = \int\limits_0^2 \int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dx dy = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy \right] dx = \int\limits_0^2 \left[\left(\frac{x^2 y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=2-x}^{\sqrt{4-x^2}} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left[x^2 \left(4-x^2\right) - x^2 (2-x)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left[4x^2 - x^4 - x^2 \left(4-4x+x^2\right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left(4x^3 - 2x^4\right) dx = \frac{1}{2} \left(x^4 - \frac{2x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{1}{2} \left(16 - \frac{64}{5} \right) = \frac{8}{5}.$$

Рис.4



Пример 5

Найти интеграл $\iint\limits_R \sin(x+y)dxdy$, заданный в области R, ограниченной прямыми $y=x$, $x+y=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

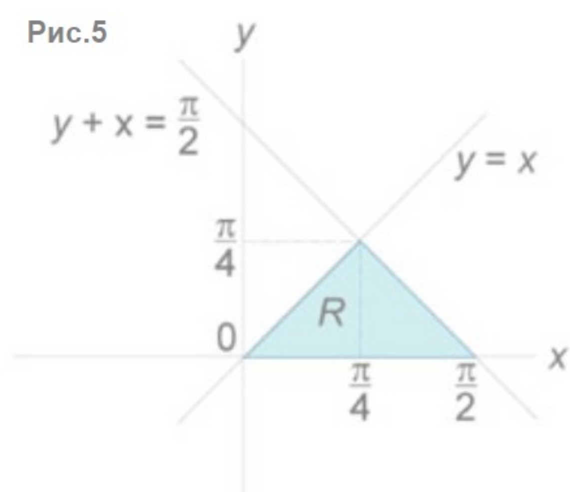
Решение.

Область интегрирования R показана ниже на рисунке 5. Рассматривая ее как область типа II (элементарную относительно оси Ox, двойной интеграл можно преобразовать в повторный и вычислить следующим образом:

$$\iint\limits_R \sin(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y)dx \right] dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(-\cos(x+y))|_{x=y}^{\frac{\pi}{2}-y} \right] dy$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-y+y\right) - \cos 2y \right] dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2ydy = \left(\frac{\sin 2y}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Рис.5



Пример 6

Найти интеграл $\iint\limits_R y dy dx$, где R ограничена прямой $y = 2x$ и параболой $y = 3 - x^2$.

Решение.

Область интегрирования изображена выше на рисунке 6. Найдем точки пересечения прямой и параболы.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x^2 \end{cases}, \Rightarrow 2x = 3 - x^2, \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0, \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -3;\ 1.$$

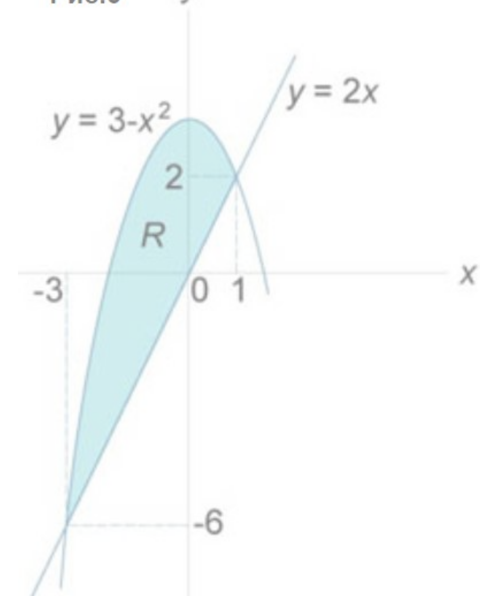
Следовательно, линии, ограничивающие область R, пересекаются в точках $(-3, -6)$ и $(1, 2)$. Тогда исходный двойной интеграл равен

$$\iint\limits_R y dy dx = \int\limits_{-3}^{1} \left[\int\limits_{2x}^{3-x^2} y dy \right] dx = \int\limits_{-3}^{1} \left[\left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=2x}^{3-x^2} \right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-3}^{1} \left[\left(3 - x^2\right)^2 - (2x)^2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-3}^{1} \left(9 - 10x^2 + x^4\right) dx = \frac{1}{2} \left(9x - \frac{10x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_{-3}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(9 - \frac{10}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(-27 + \frac{10 \cdot 27}{3} - \frac{243}{5} \right) \right] = -\frac{64}{15}.$$

Рис.6



Пример 7

Найти интеграл $\iint\limits_R x\sin y dy dx$, где область R ограничена линиями $y=0$, $y=x^2$, $x=1$.

Решение.

Область интегрирования описывается множеством $R=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\right\}$ и показана ниже на рисунке 7. Двойной интеграл равен

$$I=\iint\limits_R x\sin y dy dx=\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{x^2} x\sin y dy\right]dx=\int\limits_0^1\left[\left.(-x\cos y)\right|_{y=0}^{x^2}\right]dx=\int\limits_0^1\left(-x\cos x^2+x\cos 0\right)dx$$

$$=\int\limits_0^1\left(1-\cos x^2\right)x dx.$$

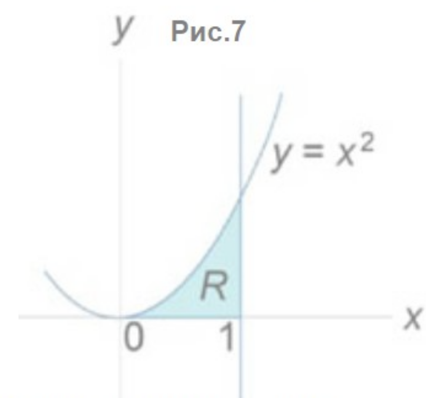


Рис.7

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену

$$z=x^2,\ \Rightarrow dz=2x dx,\ \Rightarrow x dx=\frac{dz}{2}.$$

Если $x=0$, то $x=0$. Соответственно, при $x=1$ имеем $z=1$. Тогда интеграл легко вычисляется:

$$I=\int\limits_0^1\left(1-\cos x^2\right)x dx=\int\limits_0^1(1-\cos z)\frac{dz}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-\cos z)dz=\frac{1}{2}\left.(z-\sin z)\right|_0^1=\frac{1-\sin 1}{2}\approx 0,08.$$

Пример 8

Вычислить интеграл $\iint\limits_R e^x dxdy$. Область интегрирования представляет собой треугольник с вершинами $O\left(0,0\right)$, $B\left(0,1\right)$, и $C\left(1,1\right)$.

Решение.

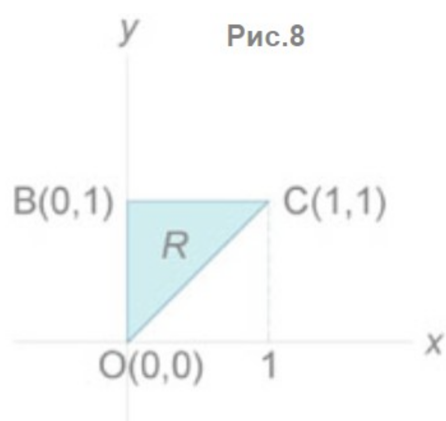
Область R показана выше на рисунке 8. Очевидно, уравнение стороны треугольника OC имеет вид $y = x$, а уравнение стороны BC равно $y = 1$. Рассматривая R как область типа I, получаем

$$I = \iint\limits_R e^x dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_x^1 e^x dy\right] dx = \int\limits_0^1 \left[\left(e^x y\right)\Big|_{y=x}^1\right] dx = \int\limits_0^1 \left(e^x - xe^x\right) dx = \int\limits_0^1 e^x \left(1 - x\right) dx.$$

Полученный внешний интеграл вычислим с помощью интегрирования по частям. Пусть $u = 1 - x$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = -dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. Следовательно,

$$I = \int\limits_0^1 e^x \left(1 - x\right) dx = \left[e^x \left(1 - x\right)\right]\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^x dx = \left[e^x \left(1 - x\right)\right]\Big|_0^1 + \left[e^x\right]\Big|_0^1 = \left[2e^x - xe^x\right]\Big|_0^1$$
$$= 2e - e - 2 = e - 2.$$

Рис.8



Пример 9

Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x+y)\,dxdy$, где область R представляет собой параллелограмм со сторонами $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=2a$, a – некоторый параметр.

Решение.

Будем рассматривать R как область типа II (элементарную относительно оси Ox). Схематически она изображена внизу на рисунке 9. При изменении координаты y от a до $2a$ координата x принимает значения между $x=y-a$ и $x=y$. Поэтому двойной интеграл равен

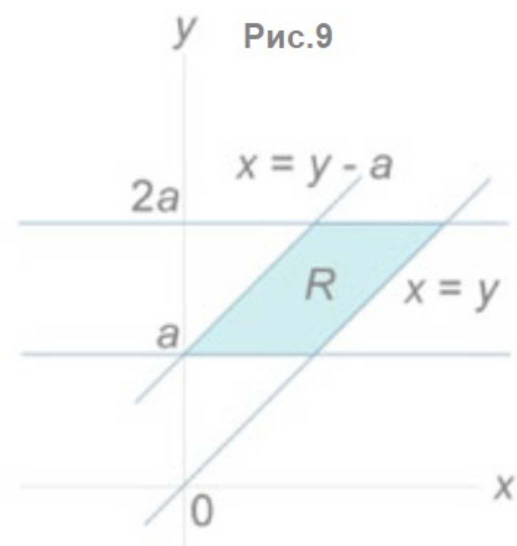
$$\iint\limits_R (x+y)\,dxdy = \int\limits_a^{2a}\left[\int\limits_{y-a}^{y}(x+y)\,dx\right]dy = \int\limits_a^{2a}\left[\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Big|_{x=y-a}^{y}\right]dy$$

$$= \int\limits_a^{2a}\left[\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)-\left(\frac{(y-a)^2}{2}+y(y-a)\right)\right]dy = \int\limits_a^{2a}\left(\frac{3y^2}{2}-\frac{y^2-2ay+a^2}{2}-y^2+ay\right)dy$$

$$= \int\limits_a^{2a}\left(2ay-\frac{a^2}{2}\right)dy = \left(\frac{2ay^2}{2}-\frac{a^2y}{2}\right)\Big|_a^{2a} = \left(ay^2-\frac{a^2y}{2}\right)\Big|_a^{2a}$$

$$= \left(a\cdot(2a)^2-\frac{a^2}{2}\cdot 2a\right)-\left(a\cdot a^2-\frac{a^2}{2}\cdot a\right) = 4a^3-a^3-a^3+\frac{a^3}{2} = \frac{5a^3}{2}.$$

Рис.9



Замена переменных в двойных интегралах

Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$ иногда удобнее перейти в другую систему координат. Это может быть обусловлено формой области интегрирования или сложностью подынтегральной функции. В новой системе координат вычисление двойного интеграла значительно упрощается.

Замена переменных в двойном интеграле описывается формулой

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_S f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dxdy,$$

где выражение $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ представляет собой так называемый *якобиан* преобразования $(x,y) \to (u,v)$, а S – *образ* области интегрирования R, который можно найти с помощью подстановки $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ в определение области R. Отметим, что в приведенной выше формуле $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ означает абсолютное значение соответствующего определителя.

В предположении, что преобразование $(x, y) \to (u, v)$ является взаимно-однозначным, соотношение между якобианами прямого и обратного преобразования координат записывается в виде

$$\left|\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(u, v\right)}\right| = \left|\left(\frac{\partial\left(u, v\right)}{\partial\left(x, y\right)}\right)^{-1}\right|$$

при условии, что знаменатель нигде не равен 0.

Итак, замена переменных в двойном интеграле производится с помощью следующих трех шагов:

1. Найти образ S в новой системе координат (u, v) для исходной области интегрирования R;
2. Вычислить якобиан преобразования $(x, y) \to (u, v)$ и записать дифференциал в новых переменных $dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$;
3. Заменить в подынтегральном выражении исходные переменные x и y, выполнив, соответственно, подстановки $x = x\left(u, v\right)$ и $y = y\left(u, v\right)$.

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R (y-x)\,dxdy$, в котором область определения R ограничена прямыми $y = x+1$, $y = x-3$, $y = -\frac{x}{3}+2$, $y = -\frac{x}{3}+4$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 1. Для упрощения интеграла выполним замену переменных. Полагая $u = y - x$, $v = y + \frac{x}{3}$, получаем

$$y = x+1, \;\Rightarrow y - x = 1, \;\Rightarrow u = 1,$$

$$y = x-3, \;\Rightarrow y - x = -3, \;\Rightarrow u = -3,$$

$$y = -\frac{x}{3}+2, \;\Rightarrow y + \frac{x}{3} = 2, \;\Rightarrow v = 2,$$

$$y = -\frac{x}{3}+4, \;\Rightarrow y + \frac{x}{3} = 4, \;\Rightarrow v = 4.$$

Следовательно, образ S области R имеет вид прямоугольника, как показано на рисунке 2.

Рис.1

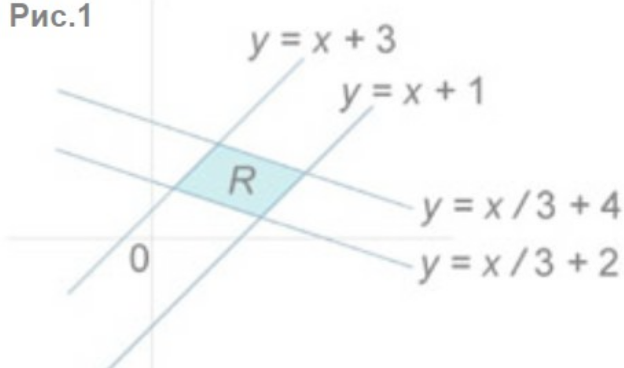
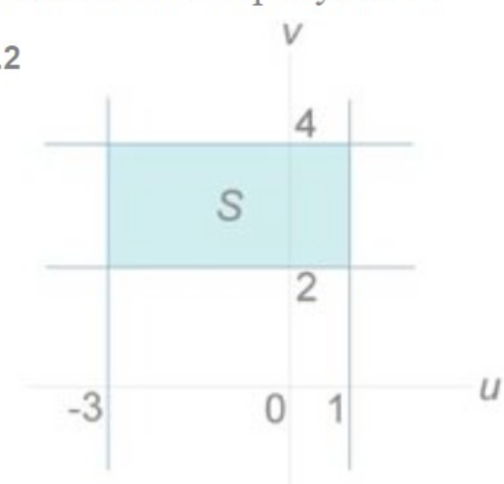


Рис.2



Определим якобиан данного преобразования. Сначала вычислим определитель обратного преобразования:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(y-x)}{\partial y} \\ \frac{\partial\left(y+\frac{x}{3}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(y+\frac{x}{3}\right)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot 1 - 1\cdot\frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Тогда якобиан равен

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\right| = \left|\frac{1}{-\frac{4}{3}}\right| = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, дифференциал преобразуется следующим образом:

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{3}{4}dudv.$$

В новых переменных (u,v) интеграл вычисляется намного легче:

$$\iint\limits_R (y-x)\,dxdy = \iint\limits_S \left(u\cdot\frac{3}{4}dudv\right) = \frac{3}{4}\int\limits_{-3}^{1} udu \int\limits_{2}^{4} dv = \frac{3}{4}\left(\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{1}\cdot v\big|_2^4$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)\cdot(4-2) = -6.$$

Пример 2

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R (x+y)\,dxdy$, в котором область интегрирования R ограничена прямыми линиями $y=x$, $y=2x$, $x+y=2$.

Решение.

Область интегрирования R имеет вид неправильного треугольника и показана на рисунке 3. Чтобы упростить ее, введем новые переменные: $y-x=u$, $y-2x=v$. Выразим x, y через u, v и определим образ области интегрирования S в новой системе координат. Легко видеть, что

$$y=x, \;\Rightarrow y-x=0, \;\Rightarrow u=0,$$

$$y=2x, \;\Rightarrow y-2x=0, \;\Rightarrow v=0.$$

Рис.3

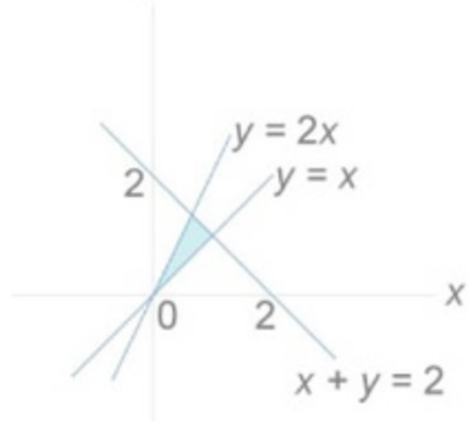
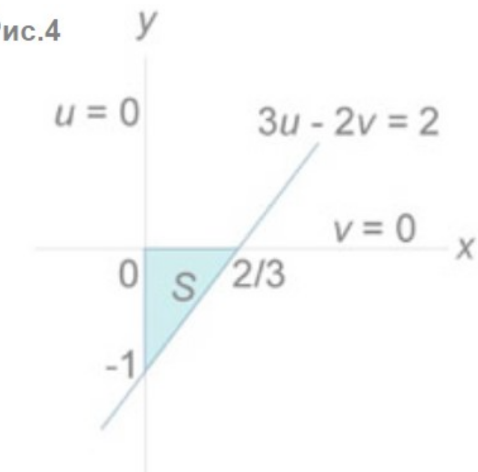


Рис.4



Заметим, что $\quad u-v=(y-x)-(y-2x)=x.$

Следовательно, $\quad y=x+u=u-v+u=2u-v.$

Таким образом, мы получаем $\quad x+y=2, \;\Rightarrow u-v+2u-v=2, \;\Rightarrow 3u-2v=2.$

Если $v=0$, то $u=\dfrac{2}{3}$. Соответственно, если $u=0$, то $v=-1$. Область S имеет вид прямоугольного треугольника (см. рисунок 4 выше).

Уравнение стороны $3u-2v=2$ можно переписать в виде $\quad 3u-2v=2, \;\Rightarrow v=\dfrac{3u-2}{2}=\dfrac{3}{2}u-1.$

Найдем якобиан.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u-v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 2 = 1.$$

Следовательно, $dxdy = dudv$ и двойной интеграл становится равным

$$\iint\limits_R (x+y)\,dxdy = \iint\limits_S (u-v+2u-v)\,dudv = \iint\limits_S (3u-2v)\,dudv = \int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[\int\limits_{\frac{3}{2}u-1}^{0} (3u-2v)\,dv\right] du$$

$$= \int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[\left.\left(3uv - v^2\right)\right|_{v=\frac{3}{2}u-1}^{0}\right] du = -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left[3u\left(\frac{3}{2}u-1\right) - \left(\frac{3}{2}u-1\right)^2\right] du$$

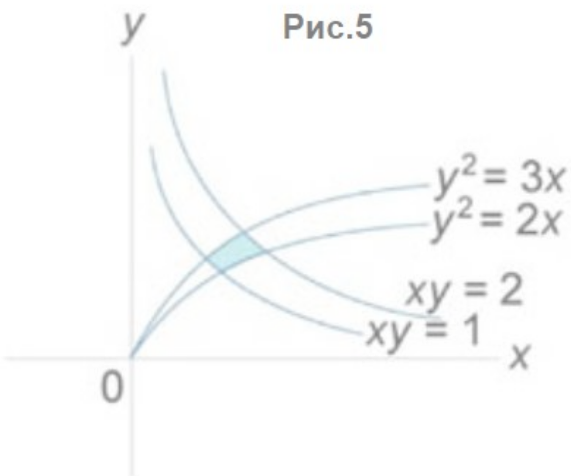
$$= -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{2} - 3u - \frac{9u^2}{4} + 3u - 1\right) du = -\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{4} - 1\right) du = \left.\left(u - \frac{9}{4}\frac{u^3}{3}\right)\right|_0^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}.$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iint\limits_R dxdy$, где область R ограничена параболами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ и гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Решение.



Область R схематически показана на рисунке 5.

Для упрощения области R сделаем замену переменных.

$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases}.$$

Образ S области R определяется следующим образом:

$$y^2 = 2x, \;\Rightarrow \frac{y^2}{x} = 2, \;\Rightarrow u = 2,$$

$$y^2 = 3x, \;\Rightarrow \frac{y^2}{x} = 3, \;\Rightarrow u = 3,$$

$$xy = 1, \;\Rightarrow v = 1,$$

$$xy = 2, \;\Rightarrow v = 2.$$

Как видно, образ S является прямоугольником. Для нахождения якобиана выразим переменные x, y через u, v.

$$u = \frac{y^2}{x}, \;\Rightarrow x = \frac{y^2}{u}, \qquad v = xy, \;\Rightarrow v = \frac{y^2}{u} \cdot y, \;\Rightarrow y^3 = uv.$$

Отсюда следует

$$y = \sqrt[3]{uv} = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \qquad x = \frac{y^2}{u} = \frac{\sqrt[3]{u^2 v^2}}{u} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$

Находим якобиан данного преобразования.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\right) & u^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{9}u^{-1} - \frac{2}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.$$

Соотношение между дифференциалами имеет вид

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \left|-\frac{1}{3u}\right| dudv = \frac{dudv}{3u}.$$

Теперь легко найти искомый интеграл:

$$\iint\limits_R dxdy = \iint\limits_S \frac{dudv}{3u} = \int\limits_2^3 \frac{du}{3u}\int\limits_1^2 dv = \frac{1}{3}(\ln u)\big|_2^3 \cdot v\big|_2^3 = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 2)\cdot(2-1) = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}.$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x^2 + y^2)\, dxdy$, где область R ограничена прямыми $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 2a \ (a > 0)$.

Решение.

Область интегрирования R имеет форму параллелограмма и показана на рисунке 6.

Рис.6

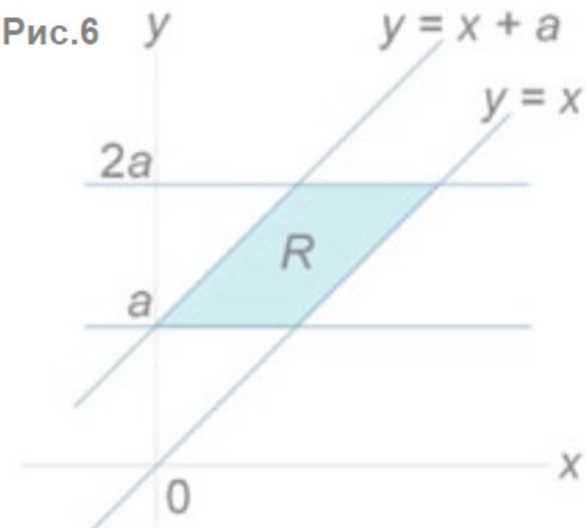
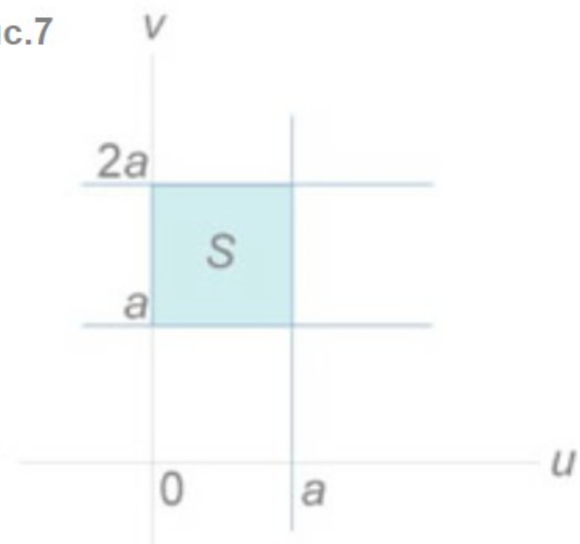


Рис.7



Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = y - u = v - u \\ y = v \end{cases}.$$

Цель этой замены – упростить область интегрирования R.

Найдем образ S области R в новых координатах (u, v).

$$y = x, \Rightarrow y - x = 0, \Rightarrow u = 0,$$

$$y = x + a, \Rightarrow y - x = a, \Rightarrow u = a,$$

$$y = a, \Rightarrow v = a,$$

$$y = 2a, \Rightarrow v = 2a.$$

Из рисунка 7 видно, что область S представляет собой прямоугольник. Вычислим якобиан.

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial (v-u)}{\partial u} & \frac{\partial (v-u)}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -1,$$

так что

$$dxdy = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| dudv = |-1| \cdot dudv = dudv.$$

Теперь можно вычислить двойной интеграл.

$$\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_S \left[(v-u)^2+v^2\right] dudv = \iint\limits_S \left(v^2-2uv+u^2+v^2\right) dudv$$

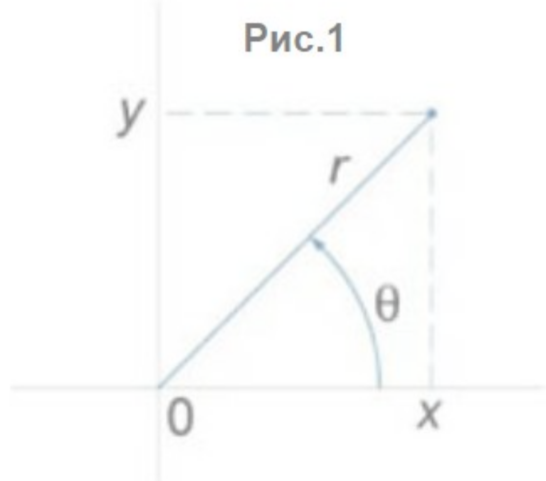
$$= \int\limits_a^{2a} \left[\int\limits_0^a \left(2v^2-2uv+u^2\right) du\right] dv = \int\limits_a^{2a} \left[\left(2v^2u-vu^2+\frac{u^3}{3}\right)\Big|_{u=0}^{a}\right] dv = \int\limits_a^{2a} \left(2av^2-a^2v+\frac{a^3}{3}\right) dv$$

$$= \left(2a\cdot\frac{v^3}{3}-a^2\cdot\frac{v^2}{2}+\frac{a^3}{3}\cdot v\right)\Big|_a^{2a} = \left(\frac{2a}{3}\cdot 8a^3-\frac{a^2}{2}\cdot 4a^2+\frac{a^3}{3}\cdot 2a\right)$$

$$-\left(\frac{2a}{3}\cdot a^3-\frac{a^2}{2}\cdot a^2+\frac{a^3}{3}\cdot a\right) = \frac{7a^4}{2}.$$

Двойные интегралы в полярных координатах

Рис.1



Одним из частных случаев замены переменных является переход из декартовой в *полярную систему координат* (рисунок 1).

$$x = r\cos\theta, \;\; y = r\sin\theta.$$

Якобиан такого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\cdot\sin\theta = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r.$$

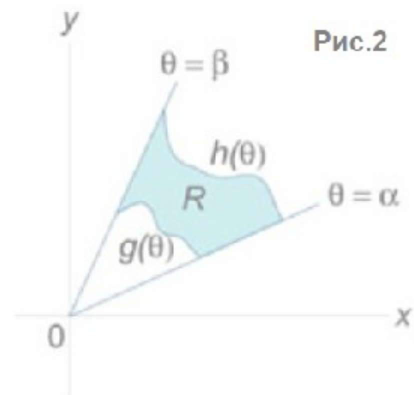
Следовательно, дифференциальный элемент в полярных координатах будет равен

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = rdrd\theta.$$

Пусть область интегрирования R в полярных координатах определяется следующим образом (рисунок 2):

$$0 \le g(\theta) \le r \le h(\theta), \ \alpha \le \theta \le \beta, \text{ где } \beta - \alpha \le 2\pi.$$

Рис.2



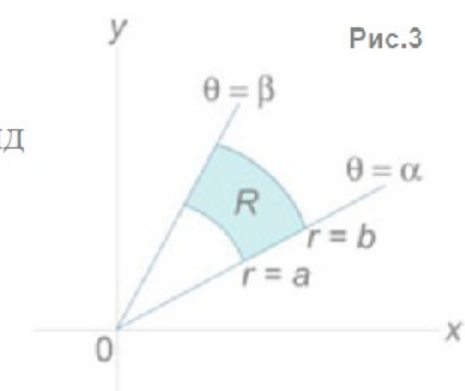
Тогда двойной интеграл в полярных координатах описывается формулой

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

Будем называть *полярным прямоугольником* область интегрирования, показанную на рисунке 3 и удовлетворяющую условиям

$$0 \le a \le r \le b, \ \alpha \le \theta \le \beta, \text{ где } \beta - \alpha \le 2\pi.$$

Рис.3



В этом случае формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

Будьте внимательны, чтобы не пропустить сомножитель (якобиан) r в правой части этой формулы!

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dydx$, преобразовав его в полярные координаты. Область интегрирования R представляет собой сектор $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ круга радиусом $r=\sqrt{3}$.

Решение.

Область R в полярных координатах описывается множеством $R = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{3}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ (рисунок 4). Применяя формулу

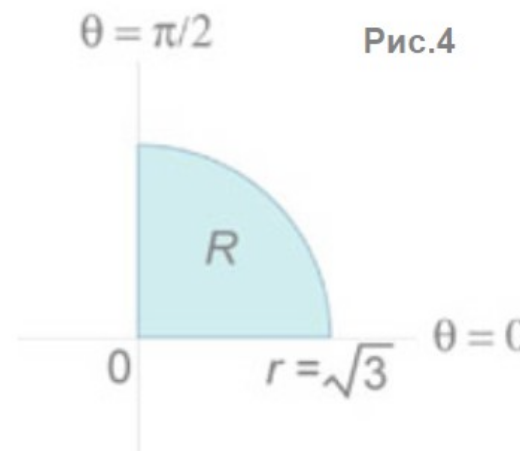


Рис.4

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta,$$

получаем

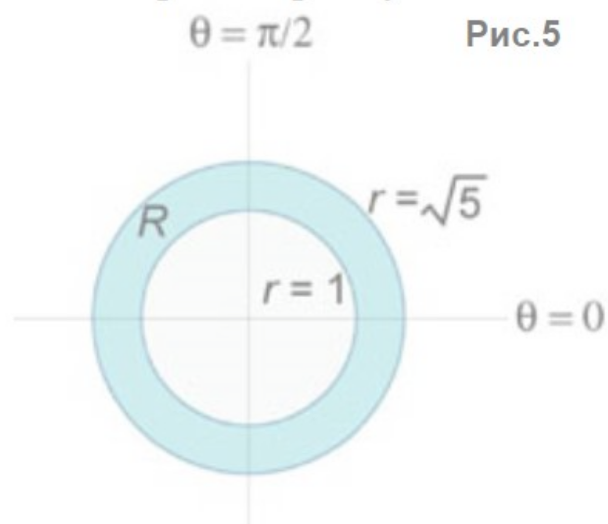
$$\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dydx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{3}} r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) rdrd\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{3}} r^3dr = \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{9}{4} = \frac{9\pi}{8}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\iint\limits_R xydydx$, в котором область интегрирования R представляет собой кольцо, ограниченное окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=5$.

Решение.
В полярных координатах область интегрирования R является полярным прямоугольником (рисунок 5):

Рис.5



$$R=\left\{(r,\theta)\mid 1\le r\le\sqrt{5},0\le\theta\le 2\pi\right\}.$$

Тогда, используя формулу

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy=\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_a^b f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta,$$

находим значение интеграла

$$\iint\limits_R xydydx=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\sqrt{5}} r\cos\theta r\sin\theta rdrd\theta=\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\int\limits_1^{\sqrt{5}} r^3dr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta\int\limits_1^{\sqrt{5}} r^3dr$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_1^{\sqrt{5}}=\frac{1}{4}(-\cos 4\pi+\cos 0)\cdot\frac{1}{4}(25-1)=\frac{1}{4}(-1+1)\cdot 6=0.$$

Пример 3

Найти интеграл $\iint\limits_R \sin\theta dr d\theta$, где область интегрирования R ограничена кардиоидой $r = 1 + \cos\theta$ (рисунок 6).

Решение.
Данный интеграл уже записан в полярных координатах. Выражая его через повторный интеграл, получаем:

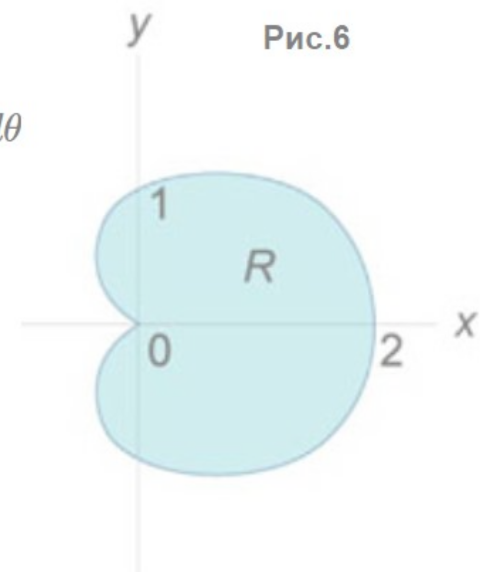
$$\iint\limits_R \sin\theta dr d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1+\cos\theta} \sin\theta dr d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{1+\cos\theta} dr\right]\sin\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left[r|_0^{1+\cos\theta}\right]\sin\theta d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi}(\sin\theta + \cos\theta\sin\theta)\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\sin\theta d\theta + \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta$$

$$= (-\cos\theta)|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 - \frac{1}{4}\cos 4\pi + \frac{1}{4}\cos 0$$

$$= -\cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} = 0.$$

Рис.6



Пример 4

Вычислить интеграл $\iint\limits_R \left(x^2+y^2\right)dxdy$ в круге $x^2+y^2=2x$.

Решение.
Область интегрирования R показана на рисунке 7.

Рис.7

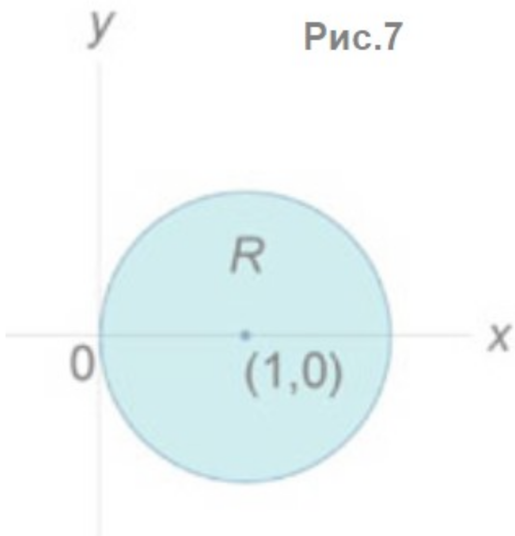
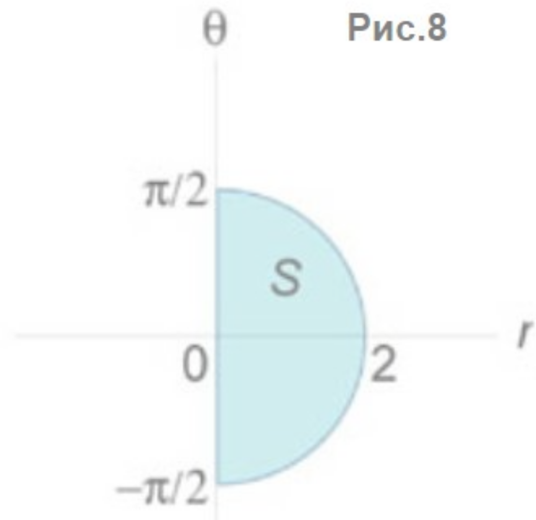


Рис.8



Преобразуем уравнение окружности следующим образом:

$$x^2+y^2=2x,\ \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1,\ \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1.$$

Подставляя $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, найдем уравнение окружности в полярных координатах.

$$x^2+y^2=2x,\ \Rightarrow r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=2r\cos\theta,\ \Rightarrow r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=2r\cos\theta,\ \Rightarrow r=2\cos\theta.$$

Образ S области интегрирования R показан на рисунке 8. После перехода к полярным координатам вычисляем двойной интеграл.

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_S \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right) rdrd\theta = \iint_S r^3 drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\cos\theta} r^3 dr\right] d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{2\cos\theta}\right] d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= \left(\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \sin\pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi\right) - \left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \sin\pi - \frac{1}{8}\sin 2\pi\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2}.$$

Пример 5

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ посредством преобразования в полярные координаты. Область интегрирования R представляет собой круг $x^2+y^2 \le \pi^2$.

Решение.

Область интегрирования R представлена на рисунке 9.

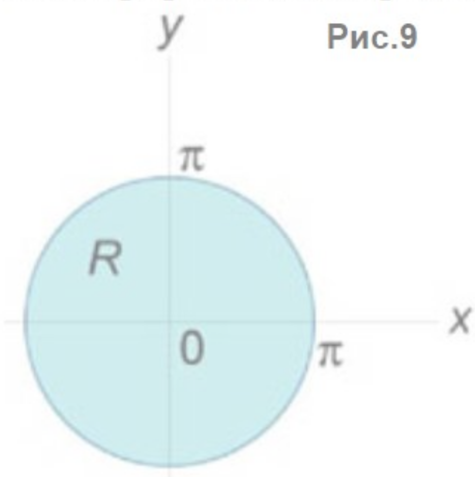


Рис.9

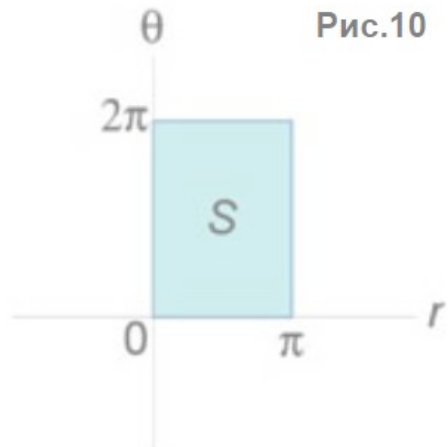


Рис.10

Образ S данной области описывается множеством $\{S = (r, \theta) \mid 0 \le r \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ и показан на рисунке 10. Запишем исходный двойной интеграл в полярных координатах.

$$I = \iint\limits_R \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_S \sin\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\,rdrd\theta = \iint\limits_S r\sin r drd\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi} r\sin r dr$$
$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi} r\sin r dr.$$

Вычислим последний интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u dv = \left.(uv)\right|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Пусть $u = r$, $dv = \sin r dr$. Тогда $du = dr$, $\;v = \int \sin r dr = -\cos r$. Следовательно,

$$I = 2\pi \int\limits_0^{\pi} r\sin r dr = 2\pi \left[\left.(-r\cos r)\right|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} (-\cos r)\,dr \right] = 2\pi \left[\left.(-r\cos r)\right|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos r dr \right]$$
$$= 2\pi \left[\left.(-r\cos r)\right|_0^{\pi} + \left.(\sin r)\right|_0^{\pi} \right] = 2\pi \left.(\sin r - r\cos r)\right|_0^{\pi} = 2\pi \left[(\sin\pi - \pi\cos\pi) - (\sin 0 - 0\cdot\cos 0) \right]$$
$$= 2\pi\cdot\pi = 2\pi^2.$$