

Двойные интегралы в прямоугольной области

Пусть область интегрирования R представляет собой прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$. Тогда двойной интеграл в такой области выражается через повторный интеграл в следующем виде:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

В данном случае область интегрирования R относится одновременно к типу I и II , так что у нас есть возможность выбирать, по какой переменной (x или y) начинать интегрировать функцию $f(x, y)$. Обычно удобнее начинать с более простого интеграла.

В частном случае, когда подынтегральная функция $f(x, y)$ "расщепляется" на произведение $g(x)h(y)$, двойной интеграл равен произведению двух определенных интегралов:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R g(x)h(y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint_R xy dx dy$ в области $R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$.

Решение.

Как видно, подынтегральная функция $f(x, y)$ представляет собой произведение $g(x)h(y)$. Следовательно, интеграл равен

$$\iint_R xy dx dy = \int_2^4 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = (8 - 2) \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 3.$$

Пример 2

Вычислить двойной интеграл $\iint_R xy^2 dx dy$, заданный в области $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2\}$.

Решение.

Поскольку функция $f(x, y)$ представляет собой произведение $g(x)h(y)$, интеграл равен

$$\iint_R xy^2 dx dy = \int_1^5 x dx \cdot \int_0^2 y^2 dy = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^5 \cdot \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{8}{3} - 0\right) = 64.$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, заданный в области $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Решение.

Выражая двойной интеграл через повторный (в котором внутренний интеграл зависит от x), получаем

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} &= \int_1^2 \int_0^2 \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[\int_0^2 \frac{dx}{(x+y)^2} \right] dy = \int_1^2 \left[\left(-\frac{1}{x+y} \right) \Big|_{x=0}^2 \right] dy \\ &= \int_1^2 \left[-\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} \right] dy = [\ln y - \ln(y+2)] \Big|_1^2 = \left(\ln \frac{y}{y+2} \right) \Big|_1^2 = \ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\iint_R \cos(x + y) dx dy$ в области $R = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

Решение.

В данном случае также удобно сначала проинтегрировать по x и затем по y .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + y) dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\sin(x + y)) \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \right] dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - \sin y \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} + y - y}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} + y + y}{2} \right] dy \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) dy = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) dy = \sqrt{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \left[\sin \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right] = 0. \end{aligned}$$

Пример 5

Вычислить интеграл $\iint_R (x - y^2) dx dy$, заданный в области $R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$.

Решение.

Выразим двойной интеграл через повторный. Сначала проинтегрируем по x , затем по y .

$$\begin{aligned}\iint_R (x - y^2) dx dy &= \int_1^2 \int_2^3 (x - y^2) dx dy = \int_1^2 \left[\int_2^3 (x - y^2) dx \right] dy = \int_1^2 \left[\left(\frac{x^2}{2} - y^2 x \right) \Big|_{x=2}^3 \right] dy \\ &= \int_1^2 \left[\left(\frac{9}{2} - 3y^2 \right) - (2 - 2y^2) \right] dy = \int_1^2 \left(\frac{5}{2} - y^2 \right) dy = \left(\frac{5}{2} y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(5 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Мы можем поменять порядок интегрирования. Результат, разумеется, не изменится.

$$\begin{aligned}\iint_R (x - y^2) dx dy &= \int_2^3 \int_1^2 (x - y^2) dy dx = \int_2^3 \left[\int_1^2 (x - y^2) dy \right] dx = \int_2^3 \left[\left(xy - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=1}^2 \right] dx \\ &= \int_2^3 \left[\left(2x - \frac{8}{3} \right) - \left(x - \frac{1}{3} \right) \right] dx = \int_2^3 \left(x - \frac{7}{3} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{7x}{3} \right) \Big|_2^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} - 7 \right) - \left(2 - \frac{14}{3} \right) = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Двойные интегралы в произвольной области

Пусть область интегрирования R типа I (элементарная относительно оси Oy) ограничена графиками функций $x = a$, $x = b$, $y = p(x)$ и $y = q(x)$. При этом выполняются неравенства $a < b$ и $p(x) < q(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда двойной интеграл по области R выражается через повторный по формуле

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=p(x)}^{y=q(x)} f(x, y) dy dx.$$

Аналогичное соотношение существует и для области типа II . Пусть область интегрирования R типа II (элементарная относительно оси Ox) ограничена графиками функций $x = u(y)$, $x = v(y)$, $y = c$, $y = d$ при условии, что $c < d$ и $u(y) < v(y)$ для всех $y \in [c, d]$. Тогда двойной интеграл, заданный в области R , выражается через повторный интеграл по формуле

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=u(y)}^{x=v(y)} f(x, y) dx dy.$$

При решении задач иногда полезно разбить исходную область интегрирования R на две или более областей и вычислять двойной интеграл в каждой области отдельно.

Пример 1

Вычислить интеграл $\iint_R (x - y) dx dy$. Область интегрирования R ограничена графиками функций $x = 0$, $x = 1$, $y = x$, $y = 2 - x^2$.

Решение.

Область интегрирования R задана множеством $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\}$ и относится к типу I (рисунок 1). Выразим двойной интеграл через повторный:

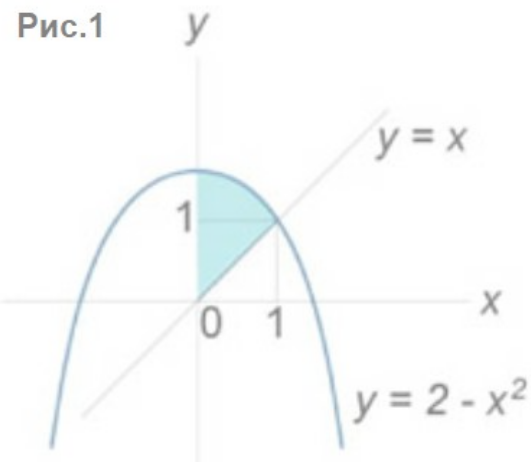
$$\iint_R (x - y) dx dy = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} (x - y) dy dx = \int_0^1 \left[\int_x^{2-x^2} (x - y) dy \right] dx.$$

Вычислим сначала внутренний интеграл.

$$\begin{aligned} \int_x^{2-x^2} (x - y) dy &= \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x}^{2-x^2} = \left[x(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2} \right] - \left[x^2 - \frac{x^2}{2} \right] \\ &= -\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x - 2. \end{aligned}$$

Теперь найдем внешний интеграл.

$$\int_0^1 \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x - 2 \right) dx = \left(-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + x^2 - 2x \right) \Big|_0^1 = -\frac{17}{20}.$$



Пример 2

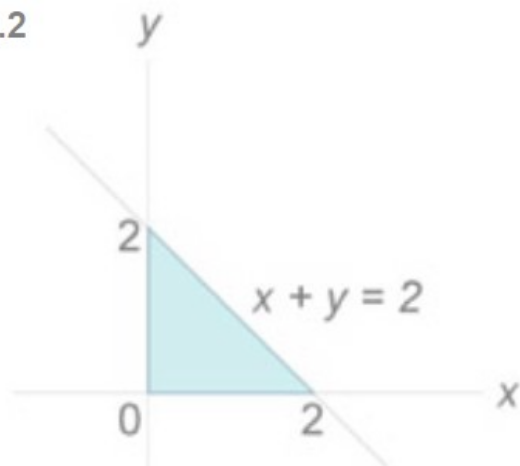
Вычислить интеграл $\iint_R (x + y) dx dy$. Область интегрирования R ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Решение.

Область R представляется в виде множества $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$ (рисунок 2) и является областью I типа (элементарной относительно оси Oy). Преобразуя двойной интеграл в повторный, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (x + y) dy dx = \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} (x + y) dy \right] dx = \int_0^2 \left[\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{2-x} \right] dx \\ &= \int_0^2 \left[x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} \right] dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Рис.2



Пример 3

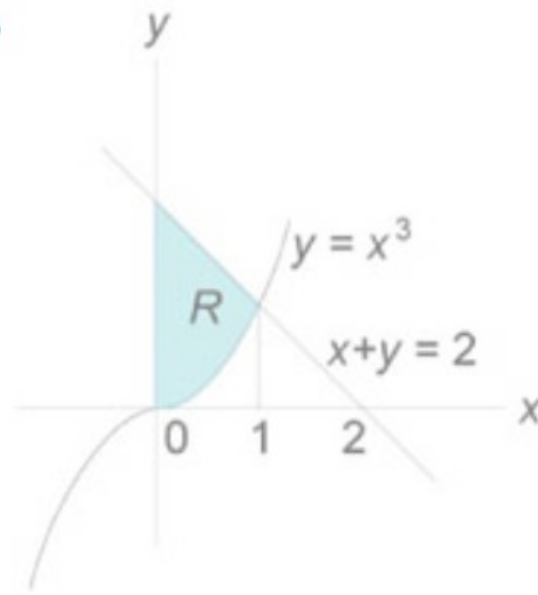
Вычислить интеграл $\iint_R x dx dy$, в котором область интегрирования R ограничена графиками функций $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Решение.

Область R показана ниже на рисунке 3. Кривая $y = x^3$ и линейная функция, заданная уравнением $x + y = 2$, пересекаются в точке $(1, 1)$. Следовательно, двойной интеграл равен

$$\begin{aligned} \iint_R x dx dy &= \int_0^1 \int_{x^3}^{2-x} x dy dx = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{2-x} x dy \right] dx = \int_0^1 \left[(xy) \Big|_{y=x^3}^{2-x} \right] dx = \int_0^1 [x(2-x) - x^4] dx \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

Рис.3



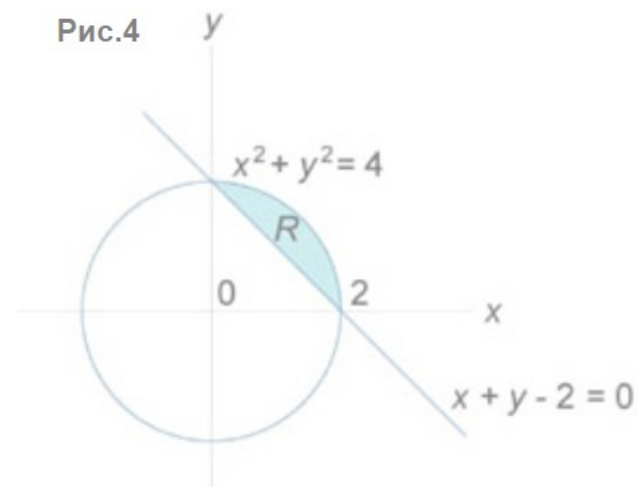
Пример 4

Найти интеграл $\iint_R x^2 y dx dy$, где область R представляет собой сегмент окружности. Границы сегмента заданы уравнениями $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - 2 = 0$.

Решение.

Окружность $x^2 + y^2 = 4$ имеет радиус 2 и центр в начале координат. Область интегрирования показана на рисунке 4. Поскольку верхняя полуокружность описывается уравнением $y = \sqrt{4 - x^2}$, то двойной интеграл вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 y dx dy &= \int_0^2 \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dx dy = \int_0^2 \left[\int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy \right] dx = \int_0^2 \left[\left(\frac{x^2 y^2}{2} \right) \Big|_{y=2-x}^{\sqrt{4-x^2}} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[x^2 (4 - x^2) - x^2 (2 - x)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[4x^2 - x^4 - x^2 (4 - 4x + x^2) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 - 2x^4) dx = \frac{1}{2} \left(x^4 - \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left(16 - \frac{64}{5} \right) = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$



Пример 5

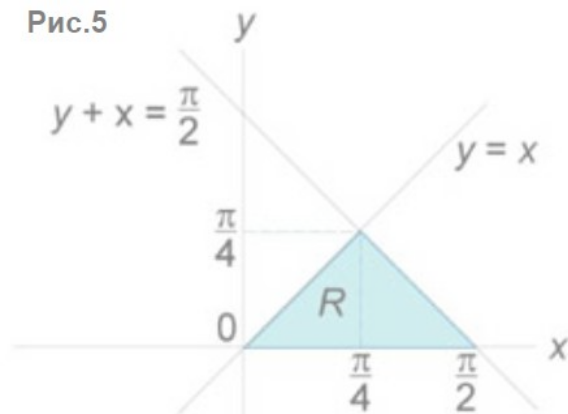
Найти интеграл $\iint_R \sin(x + y) dx dy$, заданный в области R , ограниченной прямыми $y = x$, $x + y = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

Решение.

Область интегрирования R показана ниже на рисунке 5. Рассматривая ее как область типа II (элементарную относительно оси Ox , двойной интеграл можно преобразовать в повторный и вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_R \sin(x + y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x + y) dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(-\cos(x + y)) \Big|_{x=y}^{\frac{\pi}{2}-y} \right] dy \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - y + y\right) - \cos 2y \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2y dy = \left(\frac{\sin 2y}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Рис.5



Пример 6

Найти интеграл $\iint_R y dy dx$, где R ограничена прямой $y = 2x$ и параболой $y = 3 - x^2$.

Решение.

Область интегрирования изображена выше на рисунке 6. Найдем точки пересечения прямой и параболы.

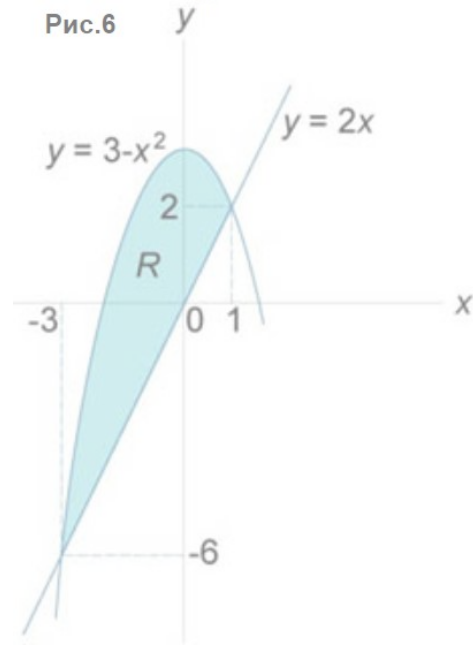
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x^2 \end{cases}, \Rightarrow 2x = 3 - x^2, \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0, \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -3; 1.$$

Следовательно, линии, ограничивающие область R , пересекаются в точках $(-3, -6)$ и $(1, 2)$. Тогда исходный двойной интеграл равен

$$\iint_R y dy dx = \int_{-3}^1 \left[\int_{2x}^{3-x^2} y dy \right] dx = \int_{-3}^1 \left[\left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=2x}^{3-x^2} \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^1 [(3-x^2)^2 - (2x)^2] dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{-3}^1 (9 - 10x^2 + x^4) dx = \frac{1}{2} \left(9x - \frac{10x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-3}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(9 - \frac{10}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(-27 + \frac{10 \cdot 27}{3} - \frac{243}{5} \right) \right] = -\frac{64}{15}. \end{aligned}$$

Рис.6



Пример 7

Найти интеграл $\iint_R x \sin y dy dx$, где область R ограничена линиями $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

Решение.

Область интегрирования описывается множеством $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ и показана ниже на рисунке 7. Двойной интеграл равен

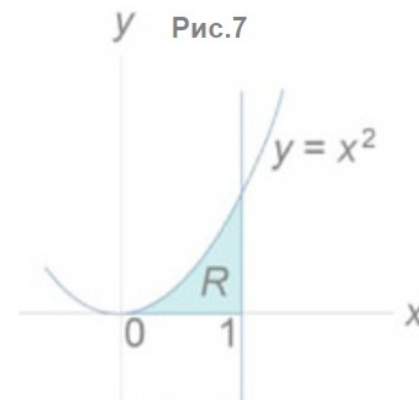
$$\begin{aligned} I &= \iint_R x \sin y dy dx = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} x \sin y dy \right] dx = \int_0^1 \left[(-x \cos y) \Big|_{y=0}^{x^2} \right] dx = \int_0^1 (-x \cos x^2 + x \cos 0) dx \\ &= \int_0^1 (1 - \cos x^2) x dx. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену

$$z = x^2, \Rightarrow dz = 2x dx, \Rightarrow x dx = \frac{dz}{2}.$$

Если $x = 0$, то $z = 0$. Соответственно, при $x = 1$ имеем $z = 1$. Тогда интеграл легко вычисляется:

$$I = \int_0^1 (1 - \cos x^2) x dx = \int_0^1 (1 - \cos z) \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos z) dz = \frac{1}{2} (z - \sin z) \Big|_0^1 = \frac{1 - \sin 1}{2} \approx 0,08.$$



Пример 8

Вычислить интеграл $\iint_R e^x dx dy$. Область интегрирования представляет собой треугольник с вершинами $O(0,0)$, $B(0,1)$, и $C(1,1)$.

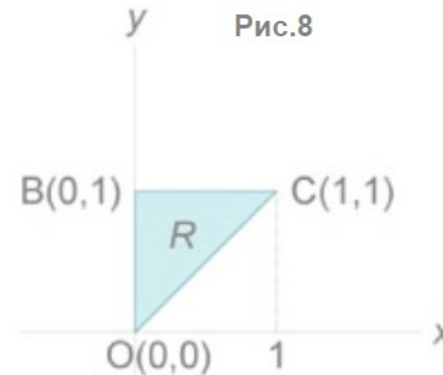
Решение.

Область R показана выше на рисунке 8. Очевидно, уравнение стороны треугольника OC имеет вид $y = x$, а уравнение стороны BC равно $y = 1$. Рассматривая R как область типа I , получаем

$$I = \iint_R e^x dx dy = \int_0^1 \left[\int_x^1 e^x dy \right] dx = \int_0^1 \left[(e^x y) \Big|_{y=x}^1 \right] dx = \int_0^1 (e^x - x e^x) dx = \int_0^1 e^x (1 - x) dx.$$

Полученный внешний интеграл вычислим с помощью интегрирования по частям. Пусть $u = 1 - x$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = -dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^x (1 - x) dx = [e^x (1 - x)] \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = [e^x (1 - x)] \Big|_0^1 + [e^x] \Big|_0^1 = [2e^x - x e^x] \Big|_0^1 \\ &= 2e - e - 2 = e - 2. \end{aligned}$$



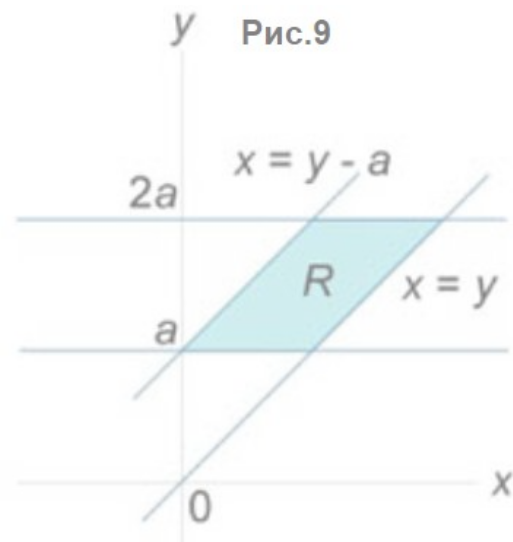
Пример 9

Вычислить интеграл $\iint_R (x + y) dx dy$, где область R представляет собой параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 2a$, a – некоторый параметр.

Решение.

Будем рассматривать R как область типа II (элементарную относительно оси Ox). Схематически она изображена внизу на рисунке 9. При изменении координаты y от a до $2a$ координата x принимает значения между $x = y - a$ и $x = y$. Поэтому двойной интеграл равен

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dx dy &= \int_a^{2a} \left[\int_{y-a}^y (x + y) dx \right] dy = \int_a^{2a} \left[\left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{x=y-a}^y \right] dy \\ &= \int_a^{2a} \left[\left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) - \left(\frac{(y-a)^2}{2} + y(y-a) \right) \right] dy = \int_a^{2a} \left(\frac{3y^2}{2} - \frac{y^2 - 2ay + a^2}{2} - y^2 + ay \right) dy \\ &= \int_a^{2a} \left(2ay - \frac{a^2}{2} \right) dy = \left(\frac{2ay^2}{2} - \frac{a^2 y}{2} \right) \Big|_a^{2a} = \left(ay^2 - \frac{a^2 y}{2} \right) \Big|_a^{2a} \\ &= \left(a \cdot (2a)^2 - \frac{a^2}{2} \cdot 2a \right) - \left(a \cdot a^2 - \frac{a^2}{2} \cdot a \right) = 4a^3 - a^3 - a^3 + \frac{a^3}{2} = \frac{5a^3}{2}. \end{aligned}$$



Замена переменных в двойных интегралах

Для вычисления двойного интеграла $\iint_R f(x, y) dx dy$ иногда удобнее перейти в другую систему координат.

Это может быть обусловлено формой области интегрирования или сложностью подынтегральной функции. В новой системе координат вычисление двойного интеграла значительно упрощается.

Замена переменных в двойном интеграле описывается формулой

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dx dy,$$

где выражение $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ представляет собой так называемый *якобиан* преобразования

$(x, y) \rightarrow (u, v)$, а S – *образ* области интегрирования R , который можно найти с помощью подстановки $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ в определение области R . Отметим, что в приведенной выше формуле $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$

означает абсолютное значение соответствующего определителя.

В предположении, что преобразование $(x, y) \rightarrow (u, v)$ является взаимно-однозначным, соотношение между якобианами прямого и обратного преобразования координат записывается в виде

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \right|$$

при условии, что знаменатель нигде не равен 0.

Итак, замена переменных в двойном интеграле производится с помощью следующих трех шагов:

1. Найти образ S в новой системе координат (u, v) для исходной области интегрирования R ;
2. Вычислить якобиан преобразования $(x, y) \rightarrow (u, v)$ и записать дифференциал в новых переменных $dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$;
3. Заменить в подынтегральном выражении исходные переменные x и y , выполнив, соответственно, подстановки $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$.

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint_R (y - x) dx dy$, в котором область определения R ограничена прямыми $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{x}{3} + 2$, $y = -\frac{x}{3} + 4$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 1. Для упрощения интеграла выполним замену переменных. Полагая $u = y - x$, $v = y + \frac{x}{3}$, получаем

$$y = x + 1, \Rightarrow y - x = 1, \Rightarrow u = 1,$$

$$y = x - 3, \Rightarrow y - x = -3, \Rightarrow u = -3,$$

$$y = -\frac{x}{3} + 2, \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 2, \Rightarrow v = 2,$$

$$y = -\frac{x}{3} + 4, \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 4, \Rightarrow v = 4.$$

Следовательно, образ S области R имеет вид прямоугольника, как показано на рисунке 2.

Рис.1

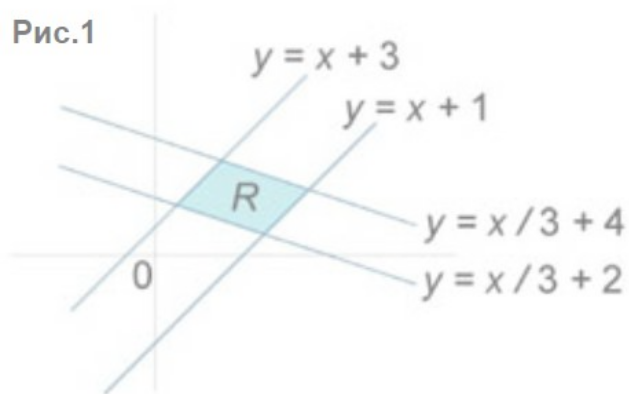
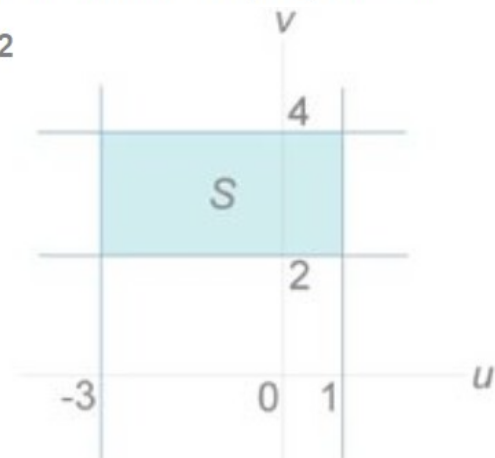


Рис.2



Определим якобиан данного преобразования. Сначала вычислим определитель обратного преобразования:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(y-x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(y+\frac{x}{3})}{\partial x} & \frac{\partial(y+\frac{x}{3})}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Тогда якобиан равен

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \right| = \left| \frac{1}{-\frac{4}{3}} \right| = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, дифференциал преобразуется следующим образом:

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \frac{3}{4} dudv.$$

В новых переменных (u, v) интеграл вычисляется намного легче:

$$\begin{aligned} \iint_R (y-x) dxdy &= \iint_S \left(u \cdot \frac{3}{4} dudv \right) = \frac{3}{4} \int_{-3}^1 u du \int_2^4 dv = \frac{3}{4} \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_{-3}^1 \cdot v \Big|_2^4 \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2} \right) \cdot (4-2) = -6. \end{aligned}$$

Пример 2

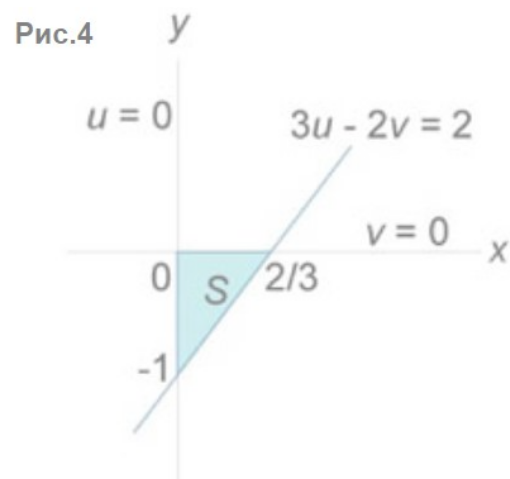
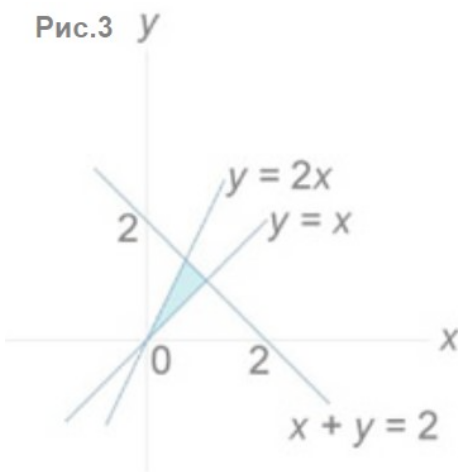
Вычислить двойной интеграл $\iint_R (x + y) dx dy$, в котором область интегрирования R ограничена прямыми линиями $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 2$.

Решение.

Область интегрирования R имеет вид неправильного треугольника и показана на рисунке 3. Чтобы упростить ее, введем новые переменные: $y - x = u$, $y - 2x = v$. Выразим x, y через u, v и определим образ области интегрирования S в новой системе координат. Легко видеть, что

$$y = x, \Rightarrow y - x = 0, \Rightarrow u = 0,$$

$$y = 2x, \Rightarrow y - 2x = 0, \Rightarrow v = 0.$$



Заметим, что $u - v = (y - x) - (y - 2x) = x$.

Следовательно, $y = x + u = u - v + u = 2u - v$.

Таким образом, мы получаем $x + y = 2, \Rightarrow u - v + 2u - v = 2, \Rightarrow 3u - 2v = 2$.

Если $v = 0$, то $u = \frac{2}{3}$. Соответственно, если $u = 0$, то $v = -1$. Область S имеет вид прямоугольного треугольника (см. рисунок 4 выше).

Уравнение стороны $3u - 2v = 2$ можно переписать в виде $3u - 2v = 2, \Rightarrow v = \frac{3u - 2}{2} = \frac{3}{2}u - 1$.

Найдем якобиан.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(2u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u-v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 = 1.$$

Следовательно, $dx dy = du dv$ и двойной интеграл становится равным

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dx dy &= \iint_S (u - v + 2u - v) du dv = \iint_S (3u - 2v) du dv = \int_0^{\frac{2}{3}} \left[\int_{\frac{3}{2}u-1}^0 (3u - 2v) dv \right] du \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[(3uv - v^2) \Big|_{v=\frac{3}{2}u-1}^0 \right] du = - \int_0^{\frac{2}{3}} \left[3u \left(\frac{3}{2}u - 1 \right) - \left(\frac{3}{2}u - 1 \right)^2 \right] du \\ &= - \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{2} - 3u - \frac{9u^2}{4} + 3u - 1 \right) du = - \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{9u^2}{4} - 1 \right) du = \left(u - \frac{9}{4} \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Пример 3

Вычислить интеграл $\iint_R dx dy$, где область R ограничена парабололами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ и гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 5.

Для упрощения области R сделаем замену переменных.

$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases}.$$

Образ S области R определяется следующим образом:

$$y^2 = 2x, \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 2, \Rightarrow u = 2,$$

$$y^2 = 3x, \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 3, \Rightarrow u = 3,$$

$$xy = 1, \Rightarrow v = 1,$$

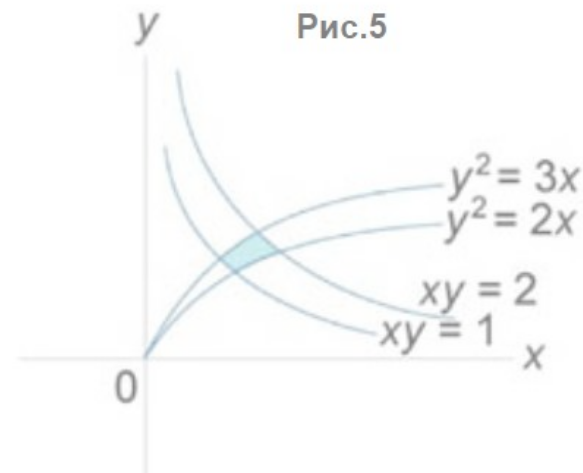
$$xy = 2, \Rightarrow v = 2.$$

Как видно, образ S является прямоугольником. Для нахождения якобиана выразим переменные x, y через u, v .

$$u = \frac{y^2}{x}, \Rightarrow x = \frac{y^2}{u}, \quad v = xy, \Rightarrow v = \frac{y^2}{u} \cdot y, \Rightarrow y^3 = uv.$$

Отсюда следует

$$y = \sqrt[3]{uv} = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{y^2}{u} = \frac{\sqrt[3]{u^2 v^2}}{u} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$



Находим якобиан данного преобразования.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\right) & u^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{9}u^{-1} - \frac{2}{9}u^{-1} = -\frac{1}{3}u^{-1} = -\frac{1}{3u}.\end{aligned}$$

Соотношение между дифференциалами имеет вид

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \left| -\frac{1}{3u} \right| dudv = \frac{dudv}{3u}.$$

Теперь легко найти искомый интеграл:

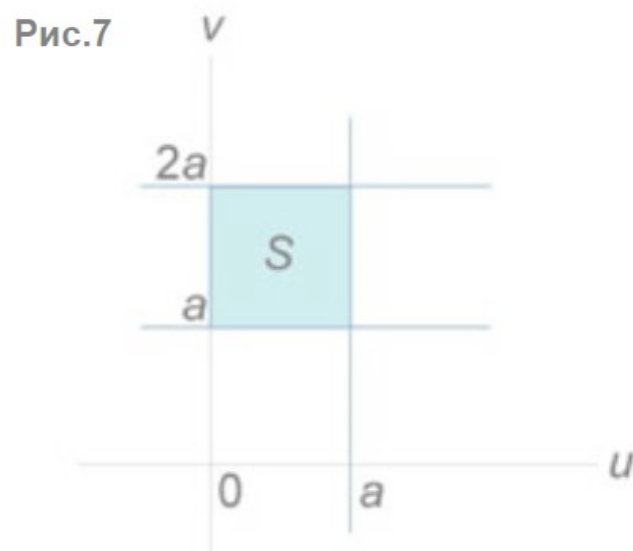
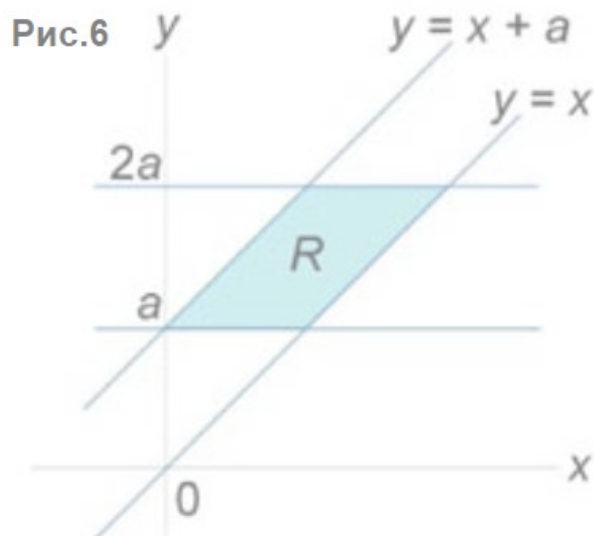
$$\iint_R dxdy = \iint_S \frac{dudv}{3u} = \int_2^3 \frac{du}{3u} \int_1^2 dv = \frac{1}{3} (\ln u) \Big|_2^3 \cdot v \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\ln 3 - \ln 2) \cdot (2 - 1) = \frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}.$$

Пример 4

Вычислить интеграл $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$, где область R ограничена прямыми $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 2a$ ($a > 0$).

Решение.

Область интегрирования R имеет форму параллелограмма и показана на рисунке 6.



Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = y - u = v - u \\ y = v \end{cases}.$$

Цель этой замены – упростить область интегрирования R .

Найдем образ S области R в новых координатах (u, v) .

$$y = x, \Rightarrow y - x = 0, \Rightarrow u = 0,$$

$$y = x + a, \Rightarrow y - x = a, \Rightarrow u = a,$$

$$y = a, \Rightarrow v = a,$$

$$y = 2a, \Rightarrow v = 2a.$$

Из рисунка 7 видно, что область S представляет собой прямоугольник. Вычислим якобиан.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(v-u)}{\partial u} & \frac{\partial(v-u)}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -1,$$

так что

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = |-1| \cdot dudv = dudv.$$

Теперь можно вычислить двойной интеграл.

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_S [(v - u)^2 + v^2] dudv = \iint_S (v^2 - 2uv + u^2 + v^2) dudv \\ &= \int_a^{2a} \left[\int_0^a (2v^2 - 2uv + u^2) du \right] dv = \int_a^{2a} \left[\left(2v^2u - vu^2 + \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{u=0}^a \right] dv = \int_a^{2a} \left(2av^2 - a^2v + \frac{a^3}{3} \right) dv \\ &= \left(2a \cdot \frac{v^3}{3} - a^2 \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{a^3}{3} \cdot v \right) \Big|_a^{2a} = \left(\frac{2a}{3} \cdot 8a^3 - \frac{a^2}{2} \cdot 4a^2 + \frac{a^3}{3} \cdot 2a \right) \\ &\quad - \left(\frac{2a}{3} \cdot a^3 - \frac{a^2}{2} \cdot a^2 + \frac{a^3}{3} \cdot a \right) = \frac{7a^4}{2}. \end{aligned}$$

Двойные интегралы в полярных координатах

Одним из частных случаев замены переменных является переход из декартовой в *полярную систему координат* (рисунок 1).

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Якобиан такого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \theta \cdot r \cos \theta - (-r \sin \theta) \cdot \sin \theta = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Следовательно, дифференциальный элемент в полярных координатах будет равен

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| drd\theta = r drd\theta.$$

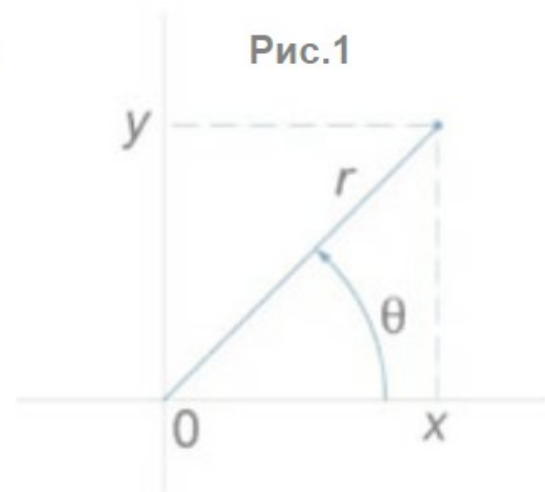


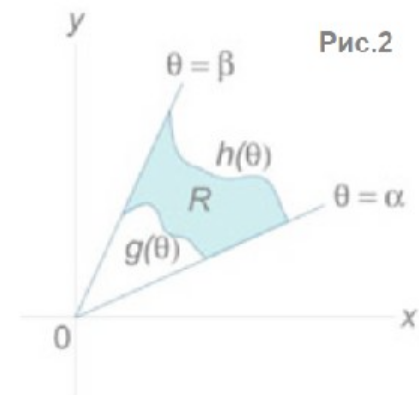
Рис.1

Пусть область интегрирования R в полярных координатах определяется следующим образом (рисунок 2):

$$0 \leq g(\theta) \leq r \leq h(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad \text{где } \beta - \alpha \leq 2\pi.$$

Тогда двойной интеграл в полярных координатах описывается формулой

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

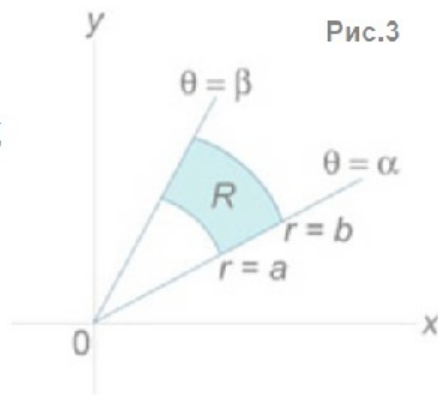


Будем называть *полярным прямоугольником* область интегрирования, показанную на рисунке 3 и удовлетворяющую условиям

$$0 \leq a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad \text{где } \beta - \alpha \leq 2\pi.$$

В этом случае формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$



Будьте внимательны, чтобы не пропустить сомножитель (якобиан) r в правой части этой формулы!

Пример 1

Вычислить двойной интеграл $\iint_R (x^2 + y^2) dydx$, преобразовав его в полярные координаты. Область интегрирования R представляет собой сектор $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ круга радиусом $r = \sqrt{3}$.

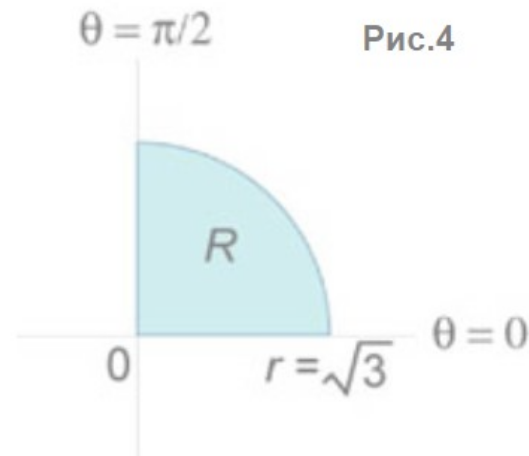
Решение.

Область R в полярных координатах описывается множеством $R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ (рисунок 4). Применяя формулу

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

получаем

$$\iint_R (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr = \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\pi}{8}.$$



Пример 2

Вычислить интеграл $\iint_R xydydx$, в котором область интегрирования R представляет собой кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 5$.

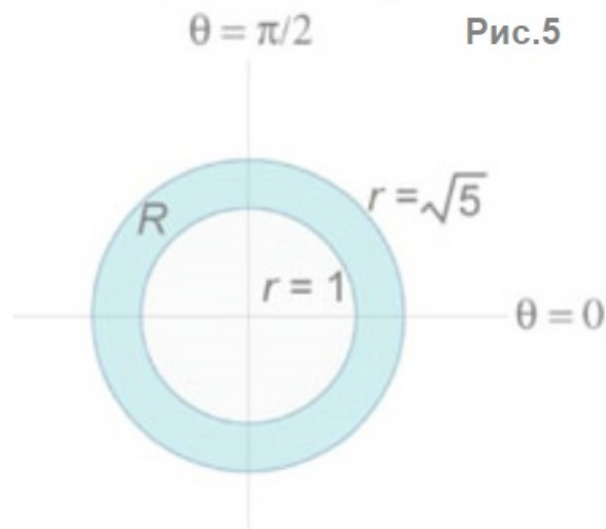
Решение.

В полярных координатах область интегрирования R является полярным прямоугольником (рисунок 5):

$$R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Тогда, используя формулу

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$



находим значение интеграла

$$\begin{aligned} \iint_R xydydx &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} r \cos \theta r \sin \theta r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_1^{\sqrt{5}} r^3 dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta \int_1^{\sqrt{5}} r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{4} (-\cos 4\pi + \cos 0) \cdot \frac{1}{4} (25 - 1) = \frac{1}{4} (-1 + 1) \cdot 6 = 0. \end{aligned}$$

Пример 3

Найти интеграл $\iint_R \sin \theta dr d\theta$, где область интегрирования R ограничена кардиоидой $r = 1 + \cos \theta$ (рисунок 6).

Решение.

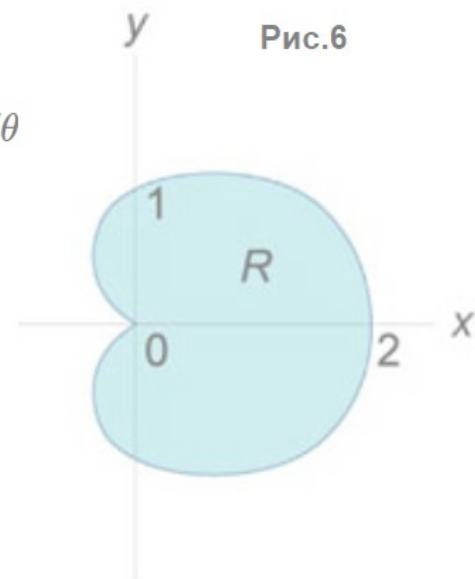
Данный интеграл уже записан в полярных координатах. Выражая его через повторный интеграл, получаем:

$$\iint_R \sin \theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} \sin \theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{1+\cos \theta} dr \right] \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r \Big|_0^{1+\cos \theta} \right] \sin \theta d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta + \cos \theta \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta$$

$$= (-\cos \theta) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 - \frac{1}{4} \cos 4\pi + \frac{1}{4} \cos 0$$

$$= -1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

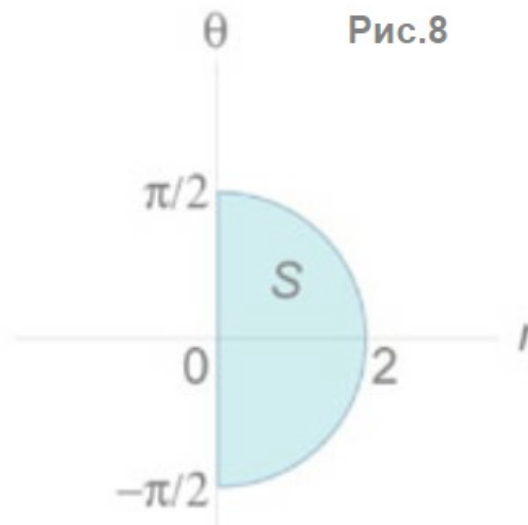
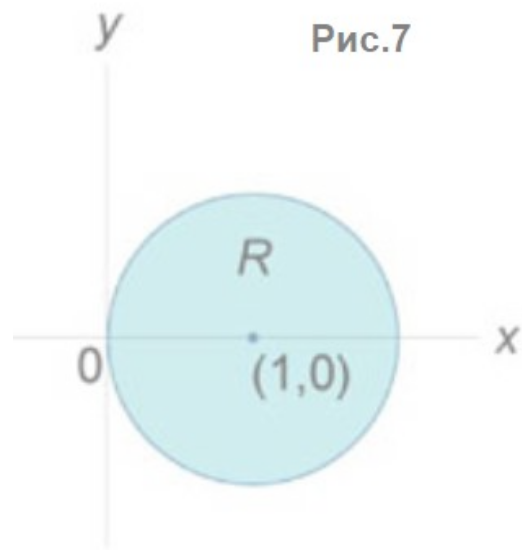


Пример 4

Вычислить интеграл $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ в круге $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение.

Область интегрирования R показана на рисунке 7.



Преобразуем уравнение окружности следующим образом:

$$x^2 + y^2 = 2x, \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1, \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Подставляя $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, найдем уравнение окружности в полярных координатах.

$$x^2 + y^2 = 2x, \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 2r \cos \theta, \Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2r \cos \theta, \Rightarrow r = 2 \cos \theta.$$

Образ S области интегрирования R показан на рисунке 8. После перехода к полярным координатам вычисляем двойной интеграл.

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \iint_S (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \, r \, dr \, d\theta = \iint_S r^3 \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2 \cos \theta} r^3 \, dr \right] d\theta \\
&= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{2 \cos \theta} \right] d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) d\theta \\
&= \left(\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \sin \pi + \frac{1}{8} \sin 2\pi \right) - \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \pi - \frac{1}{8} \sin 2\pi \right) \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

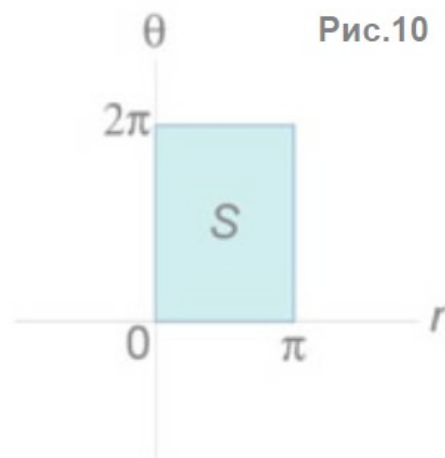
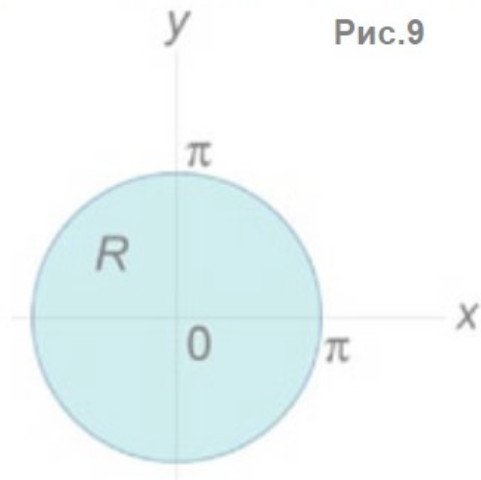
Пример 5

Вычислить двойной интеграл $\iint_R \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ посредством преобразования в полярные координаты.

Область интегрирования R представляет собой круг $x^2 + y^2 \leq \pi^2$.

Решение.

Область интегрирования R представлена на рисунке 9.



Образ S данной области описывается множеством $\{S = (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ и показан на рисунке 10. Запишем исходный двойной интеграл в полярных координатах.

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_R \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_S \sin \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} r dr d\theta = \iint_S r \sin r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi r \sin r dr \\
 &= 2\pi \int_0^\pi r \sin r dr.
 \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пусть $u = r$, $dv = \sin r dr$. Тогда $du = dr$, $v = \int \sin r dr = -\cos r$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 I &= 2\pi \int_0^\pi r \sin r dr = 2\pi \left[(-r \cos r)|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos r) dr \right] = 2\pi \left[(-r \cos r)|_0^\pi + \int_0^\pi \cos r dr \right] \\
 &= 2\pi \left[(-r \cos r)|_0^\pi + (\sin r)|_0^\pi \right] = 2\pi (\sin r - r \cos r)|_0^\pi = 2\pi [(\sin \pi - \pi \cos \pi) - (\sin 0 - 0 \cdot \cos 0)] \\
 &= 2\pi \cdot \pi = 2\pi^2.
 \end{aligned}$$

