Элементы комбинаторики

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ.
2. ФОРМУЛА БИНОМА НЬЮТОНА.
3. ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ.

1. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика *– это раздел математики, в котором изучаются вопросы выбора или расположения элементов множества в соответствии с заданными правилами.*

Т.е. в комбинаторике изучаются задачи, связанные с рассмотрением конечных множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.

Пример 1.

- Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно составить следующие комбинации чисел: 123, 321, 312, 213, 516, 59, 4901…
- Т.о., полученные комбинации удовлетворяют различным условиям.
- В зависимости от правил составления можно выделить 3 типа комбинаций:

1. перестановки;
2. размещения;
3. сочетания.

1.1. Метод перебора вариантов

Пример 2

Из чисел 1, 5, 9 составить трёхзначное число без повторяющихся цифр.

Дерево возможных вариантов!

1 → 159, 195 — 2 комбинации

5 → 519, 591 — 2 комбинации

9 → 915, 951 — 2 комбинации

Всего 2•3=6 комбинаций.

Методы перебора
(дерево возможных вариантов)

Пример 3

Из цифр 2, 4, 7 составить трёхзначное число, в котором ни одна цифра не может повторяться более двух раз.
а)Сколько таких чисел начинается с 2?
б) Сколько всего таких чисел можно составить?

1способ: построим дерево возможных вариантов, если первая цифра числа 2

22 24 27

224 227 242 244 247 272 274 277

2 способ:

1)Числа без повторений: 247 274

2)Числа, в которых повторяется 2: 224 227 242 272

3)Число, в котором повторяется 4: 244

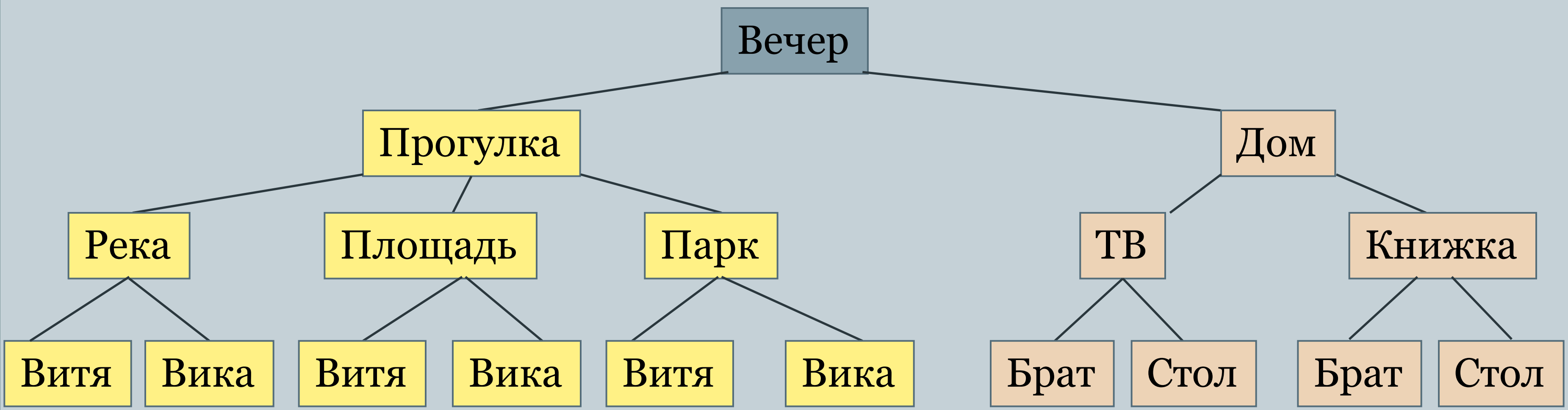
4)Число, в котором повторяется 7: 277

а)Ответ: 8 чисел.

б)Ответ: 24 числа.

Дерево возможных вариантов

Пример 4. *«Этот вечер свободный можно так провести…» (А. Кушнер): пойти прогуляться к реке, на площадь или в парк и потом пойти в гости к Вите или к Вике. А можно остаться дома, сначала посмотреть телевизор или почитать книжку, потом поиграть с братом или разобраться наконец у себя на столе. Нарисовать дерево возможных вариантов.*



На завтрак можно выбрать булочку, кекс, пряники

1.2. Правило умножения (произведения)

Для того, чтобы найти число всех возможных исходов (вариантов) независимого проведения двух испытаний А и В, надо перемножить число всех исходов испытания А на число всех исходов испытания В

Испытание А имеет 3 варианта (исхода), а испытание В-4, всего вариантов независимых испытаний А и В $3 \cdot 4 = 12$.

Пример 5. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

Решение.

В качестве первой цифры может быть выбрана любая из цифр 1, 2, 3, т.е. $n=3$.

Второй цифрой может быть выбрана любая из четырех данных цифр 0, 1, 2, 3, т.е. $m = 4$.

Согласно правилу произведения число всевозможных двузначных чисел, составленных с помощью предложенных цифр, равно

$$n*m = 3*4=12.$$

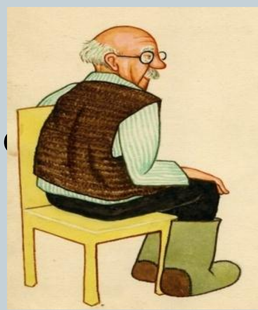
Ответ: 12.

Семейный ужин.

Пример 6.

В семье 6 человек, а за столом в кухне 6 стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

6• •2•1= 720 очти 2 года



6 5 4 3 2 1






№1 №2 №3 №4 №5 №6

1.3. Понятие факториала

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют n-факториал и обозначают:

$n! = 1•2•3•…•(n-1)•n.$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1•2 = 2$

$3! = 1•2•3 = 6$

$4! = 1•2•3•4 = 3!•4 = 24$

$5! = 1•2•3•4•5 = 4!•5 = 24•5 = 120$

$6! = 1•2•3•4•5•6 = 5!•6 = 120•6 = 720$

$7! = 1•2•3•4•5•6•7 = 6!•7 = 720•7 = 5040$

Удобные формулы:

$n!=(n-1)!•n$

$(n+1)!=n!•(n+1)$

Пример 7.

a) $5! - 3! = 120 - 6 = 114$

b) $6! + 4! =$

c) $7! - 5! =$

d) $10! - 8! =$

e) $\dfrac{8!-6!}{7!} = \dfrac{6!\cdot 7\cdot 8-6!}{6!\cdot 7} = \dfrac{6!(7\cdot 8-1)}{6!\cdot 7} =$
$\dfrac{6!(56-1)}{6!\cdot 7} = \dfrac{55}{7} = 7\frac{6}{7}$

f) $\dfrac{7!+5!}{6!} = 7\frac{1}{6}$

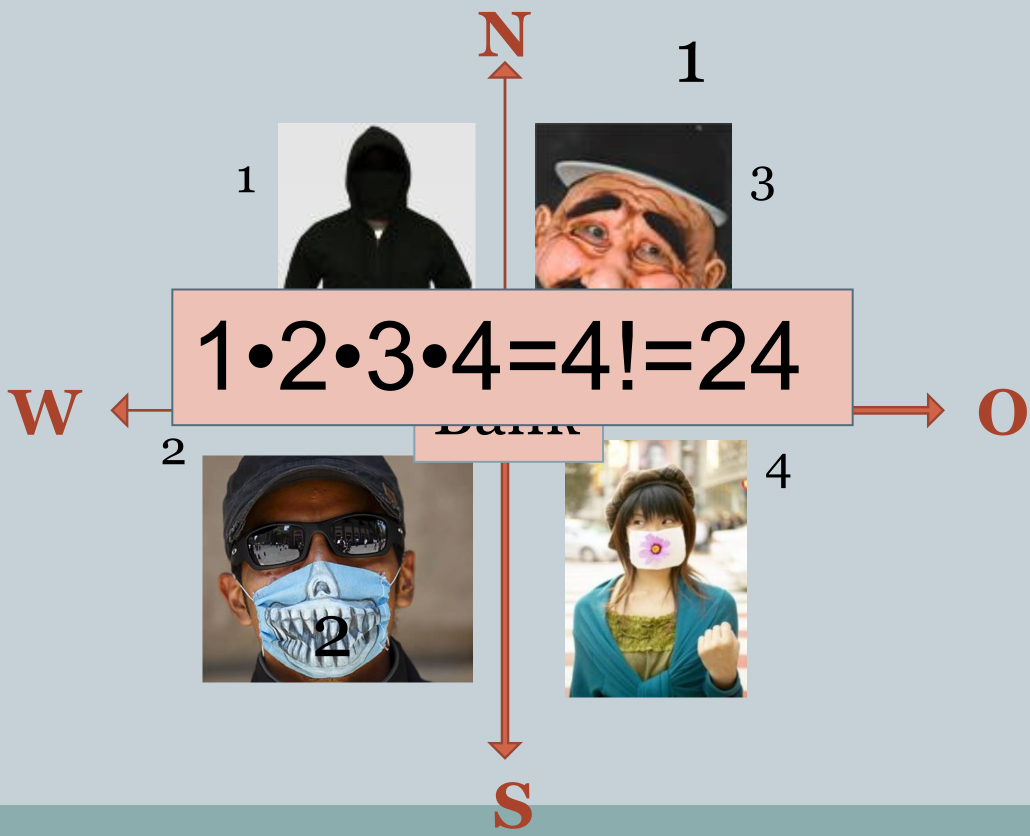
Их разыскивает полиция…

Пример 8. *Сколькими способами 4 вора могут по одному разбежаться на все 4 стороны.*

4

1

3



$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$$

Расписание уроков.

Пример 9. *В 9 классе в среду 7 уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить?*

Расставляем предметы по порядку

Предмет	Число вариантов
Алгебра	7
Геометрия	6
Литература	5
Русский язык	4
Английский язык	3
Биология	2
Физкультура	1

Всего вариантов расписания

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7! =$$

$$= 5040$$

1.4. Перестановки

Задача. Пусть даны три буквы: A, B, C. Составить все возможные комбинации из этих букв.

A	B	C
ABC	BAC	CAB
ACB	BCA	CBA

Ответ: 6 комбинаций.

1.4. Перестановки

Перестановками из n элементов называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения. Комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов называются ***перестановками.*** Число перестановок из n элементов обозначают P_n и читают «пэ энное»

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Задача

Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

- *Решение*. На первое место можно поставить любую из четырех книг, на второе – любую из трех оставшихся книг, на третье – любую из двух оставшихся книг и на четвертое место – последнюю оставшуюся книгу.
- Применяя формулу $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- Ответ: книги можно поставить 24 способами.

Задача

Сколькими способами можно положить 6 различных открыток в 6 имеющихся конвертов (по одной открытке в конверт)?

- *Решение*. Задача сводится к нахождению числа перестановок из 6 элементов.
- Применяя формулу, получим

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

- Ответ: 720 способами.

Пример.

Даны три числа 1, 5, 9. Посчитать число перестановок.

Решение. $P_3 = 3! = 6$

159, 195, 519, 591, 915, 951.

Ответ: 6 комбинаций.

Пример. Даны числа 1, 2, 3, 4. Посчитать и записать число перестановок.

Решение. $P_4 = 4! = 24$

1	**2**	**3**	**4**
1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2413	3241	4231
1342	2431	3214	4213
1423	2314	3314	4312
1432	2341	3341	4321

Ответ: 24 комбинации.

Задание.

a) $5! - 3! = 120 - 6 = 114$

b) $6! + 4! =$

c) $7! - 5! =$

d) $10! - 8! =$

e) $\frac{8!-6!}{7!} = \frac{6!\cdot7\cdot8-6!}{6!\cdot7} = \frac{6!(7\cdot8-1)}{6!\cdot7} =$

$\frac{6!(56-1)}{6!\cdot7} = \frac{55}{7} = 7\frac{6}{7}$

f) $\frac{7!+5!}{6!} = 7\frac{1}{6}$

1.5. Размещения

Задача.

Сколько различных двузначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

Решение. Перебором убедимся в том, что из четырех цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,

21, 23, 24,

31, 32, 34,

41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырех цифр, а на втором – любая из оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел 4*3=12. *Ответ: 12.*

1.5. Размещения

***Размещениями из m элементов по n элементов* (n≤m)** называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n и читают «А из эм по эн»

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))$$

Примеры.

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12;$$

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24;$$

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

$$\underline{A_n^n = n\left(n-1\right)\left(n-2\right) \cdot 2 \cdot 1 = P_n}$$

- Т.е. число размещений из n элементов по n равно числу перестановок из этих элементов.

Формула для нахождения числа размещений

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Примеры.

1) $$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 60$$

2) $$\frac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5} = \frac{\frac{20!}{13!} + \frac{20!}{14!}}{\frac{20!}{15!}} = \frac{15!}{13!} + \frac{15!}{14!} =$$

$$= 15\cdot 14 + 15 = 15(14+1) = 225$$

Задания.

1. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?
2. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9?
3. Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 8 учебных предметов, а в расписание на день могут быть включены только 3 из них?
4. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Ответы: 210; 5040; 336; 60.

Задания.

5. Сколько существует способов для обозначения с помощью букв A, B, C, D, E, F вершин данного треугольника? (ответ: 120)
6. В группе 20 человек. Сколькими способами из их числа можно сделать назначение: физорга и культорга? Физорга, культорга и казначея? (6840)
7. Найти значение выражения:

$$1)\quad \frac{\grave{A}_{15}^{9}-\grave{A}_{15}^{8}}{\grave{A}_{15}^{7}};\qquad 2)\quad \frac{\grave{A}_{18}^{10}+\grave{A}_{18}^{11}}{\grave{A}_{18}^{9}};\qquad 3)\quad \frac{\grave{A}_{9}^{4}\cdot \grave{A}_{4}^{4}}{\grave{A}_{8}^{6}}$$

1.5. Сочетания и их свойства

Сочетаниями из m элементов по n в каждом ($n \leq m$) называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

Число всевозможных сочетаний из m различных элементов по n элементов обозначают C_m^n и читают «С из эм по эн»

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} \qquad (1)$$

Например, $C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Если $m = n$, то $C_n^n = \frac{A_n^n}{P_n} = \frac{P_n}{P_n} = 1.$

Учитывая, что $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ при $m \geq n$ и $P_n = n!$,

можно записать $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}. \qquad (2)$

Например, $C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$

Задача. Сколько существует способов выбора двух карт из колоды в 36 карт?

- Изымаемые из колоды всевозможные пары карт без учета порядка их расположения в наборе образуют сочетания из 36 по 2. По формуле (2) находим:

$$C_{36}^{2}=\frac{36!}{(36-2)!\cdot 2!}=\frac{36!}{34!\cdot 2!}=\frac{35\cdot 36}{2}=35\cdot 18=630.$$

Ответ : 630 способов.

Свойства сочетаний

Свойство 1. $\underline{C_m^n = C_m^{m-n}}$

Свойство 2 (рекурентное свойство)

$$\underline{C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.}$$

Пример. Найти значение выражения

$$C_{20}^{18} + C_{20}^{19} = C_{21}^{19} = \frac{21!}{(21-19)!\cdot 19!} = \frac{20\cdot 21}{2} = 210.$$

Задания.

№ 1. Вычислить :

$C_7^1; \quad C_6^1; \quad C_7^2; \quad C_7^3; \quad C_8^3; \quad C_{10}^8;$

$C_9^8; \quad C_{10}^9; \quad C_{15}^{15}; \quad C_{30}^0; \quad C_{40}^{38}; \quad C_{60}^2$

№ 2. Найти значение выражения :

1) $C_{13}^{10} + C_{13}^{11}$; 2) $C_{14}^{12} + C_{14}^{13}$; 3) $C_{19}^4 - C_{18}^4$;

4) $C_{21}^3 - C_{20}^3$; 5) $C_{61}^3 - C_{60}^2$; 6) $C_{71}^3 - C_{70}^2$.

№ 3. Найти x, если $C_{x-2}^2 = 21$.

№ 4. Найти x, если $C_x^2 = 153$.

Задачи.

1. Сколькими способами для участия в конференции из 9 членов научного общества можно выбрать четверых студентов? (126)
2. Сколько различных аккордов, содержащих 3 звука, можно образовать из 12 клавиш одной октавы? (220)
3. В помещении 16 ламп. Сколько существует вариантов его освещения, если одновременно должны светиться 14 ламп? (120)
4. На окружности отмечено 12 точек. Сколько различных треугольников с вершинами в этих точках можно построить? (220)

2. Формула бинома Ньютона

- В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*.
- Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома (a+b) (при условии a+b≠0):

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

- **Формула бинома Ньютона** для натуральных m имеет вид

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \\ + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

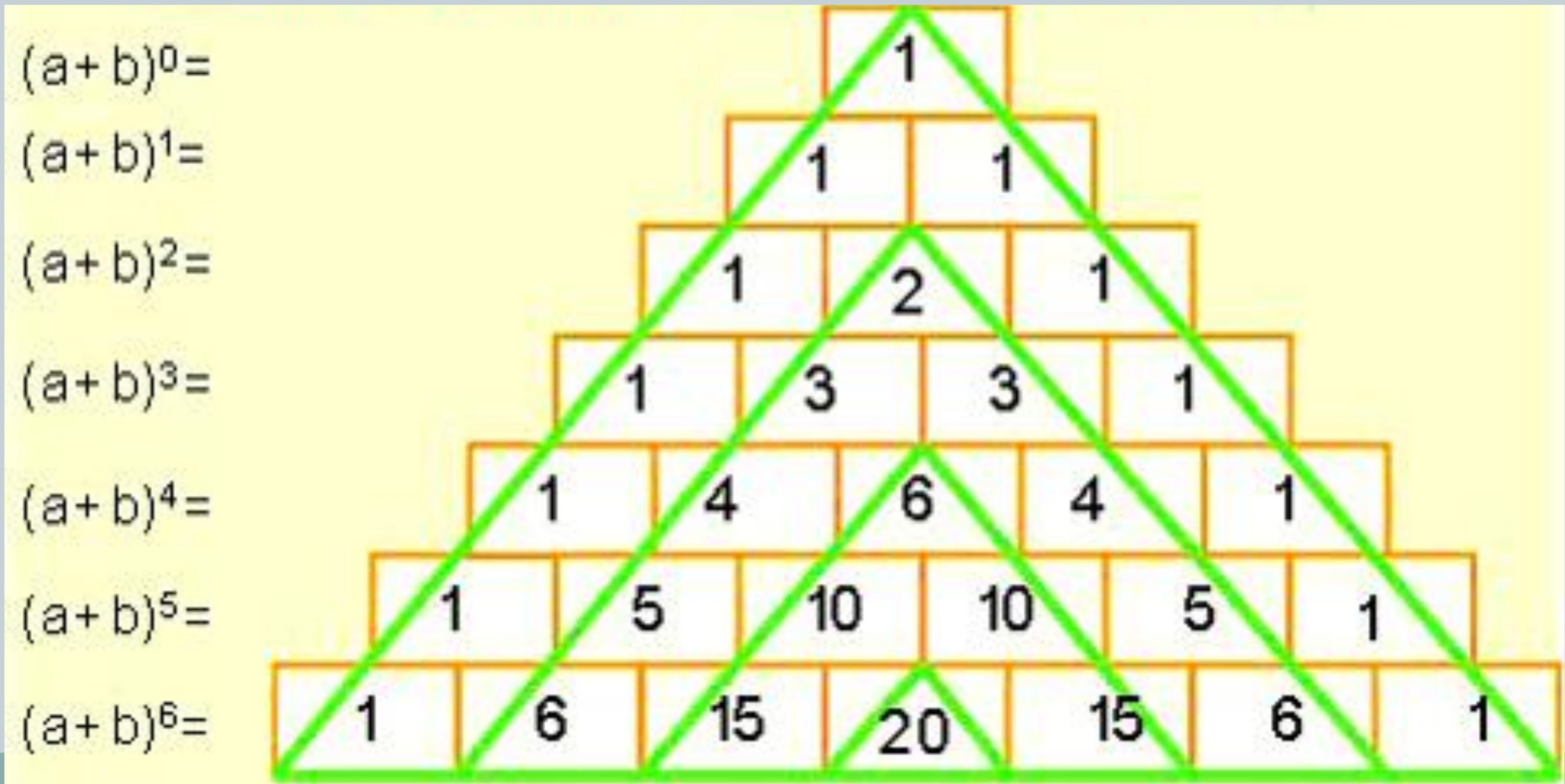
где числа

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

- *биномиальные коэффициенты*, которые легко находить из треугольника Паскаля.

3. Треугольник Паскаля

- это таблица значений C_m^n, составленная на основании рекурентного свойства числа сочетаний.



Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля	Номер строки	Возведение в степень двучлена
1	0	$(a+b)^0 = 1$
1 1	1	$(a+b)^1 = a + b$
1 2 1	2	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	3	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
1 4 6 4 1	4	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	5	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
1 6 15 20 15 6 1	6	и т. д.

Свойства биномиальных коэффициентов

Для коэффициентов бинома Ньютона справедливы следующие свойства:

1) коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой $C_n^p = C_n^{n-p}$

где $p=0,1,2,\ldots,n$;

2) $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

3) сумма биномиальных коэффициентов равна числу *2*, возведенному в степень, равную показателю степени бинома Ньютона:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

- сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Пример. Записать разложение бинома $(x-2)^6$

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$

$$= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \cdot (-2) + C_6^2 x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3 x^3 \cdot (-2)^3 +$$

$$+ C_6^4 x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5 x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$

$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) +$$

$$+ 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$

$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$$

Упражнения.

Записать разложение бинома:

$(1+x)^8$

$(x+1)^7$

$(a-1)^9$

$(y-1)^{10}$

$(x+2)^6$

$(2x+1)^5$

$(x+2)^6$

$(3x+2)^4$

$\left(2a-\frac{1}{2}\right)^5$

$\left(3x-\frac{1}{3}\right)^6$

$\left(1+\sqrt{2}\right)^6$

$\left(1+\sqrt{3}\right)^5$

$\left(a-\frac{1}{3a}\right)^7$

$\left(b-\frac{1}{2b}\right)^6$