



# Элементы комбинаторики

- 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ  
КОМБИНАТОРИКИ.**
- 2. ФОРМУЛА БИНОМА НЬЮТОНА.**
- 3. ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ.**

# 1. Основные понятия комбинаторики



*Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы **выбора** или **расположения** элементов множества в соответствии с заданными **правилами**.*

*Т.е. в комбинаторике изучаются задачи, связанные с рассмотрением конечных множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.*

# Пример 1.



- Из цифр **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** можно составить следующие комбинации чисел: 123, 321, 312, 213, 516, 59, 4901...
- Т.о., полученные комбинации удовлетворяют различным условиям.
- В зависимости от правил составления можно выделить 3 типа комбинаций:
  1. перестановки;
  2. размещения;
  3. сочетания.

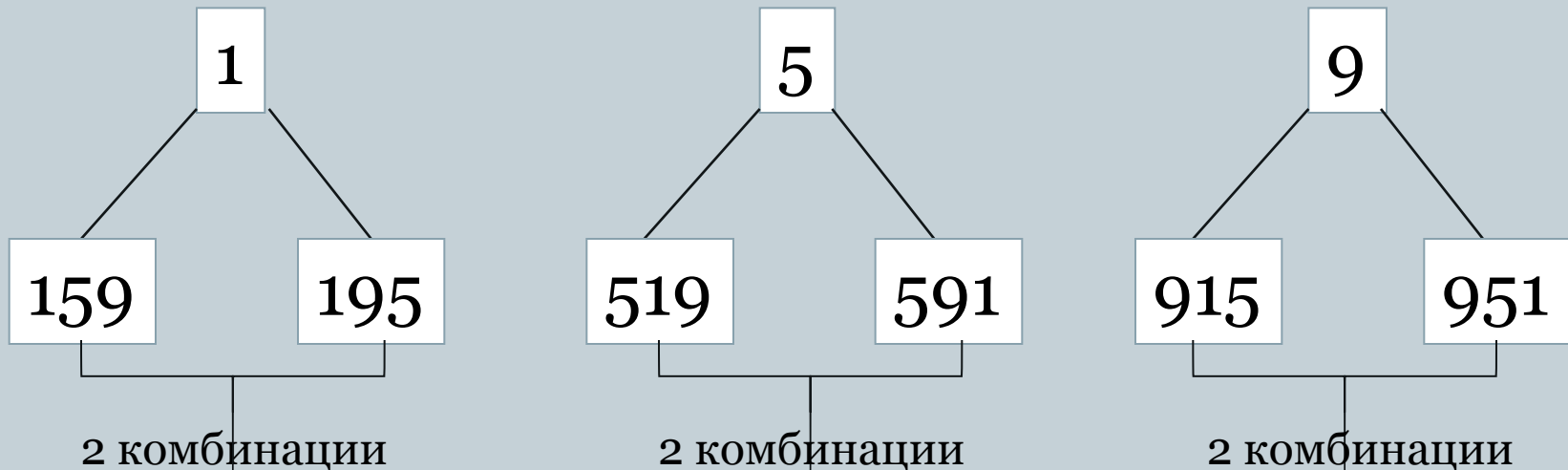
# 1.1. Метод перебора вариантов



Пример 2

*Из чисел 1, 5, 9 составить трёхзначное число без повторяющихся цифр.*

**Дерево возможных вариантов!**



**Всего  $2 \cdot 3 = 6$  комбинаций.**

# Методы перебора (дерево возможных вариантов)

## Пример 3

Из цифр 2, 4, 7 составить трёхзначное число, в котором ни одна цифра не может повторяться более двух раз.

а) Сколько таких чисел начинается с 2?

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

2 способ:

1) Числа без повторения:  $247$   $274$   
если первая цифра числа 2

2) Числа, в которых повторяется 2:

$22$

$24$

$224$

$227$

$242$

$272$

3) Число, в котором повторяется 4:

$244$

$224$

$227$

$242$

$24$

$277$

$47$

$272$

$274$

$277$

4) Число, в котором повторяется 7:

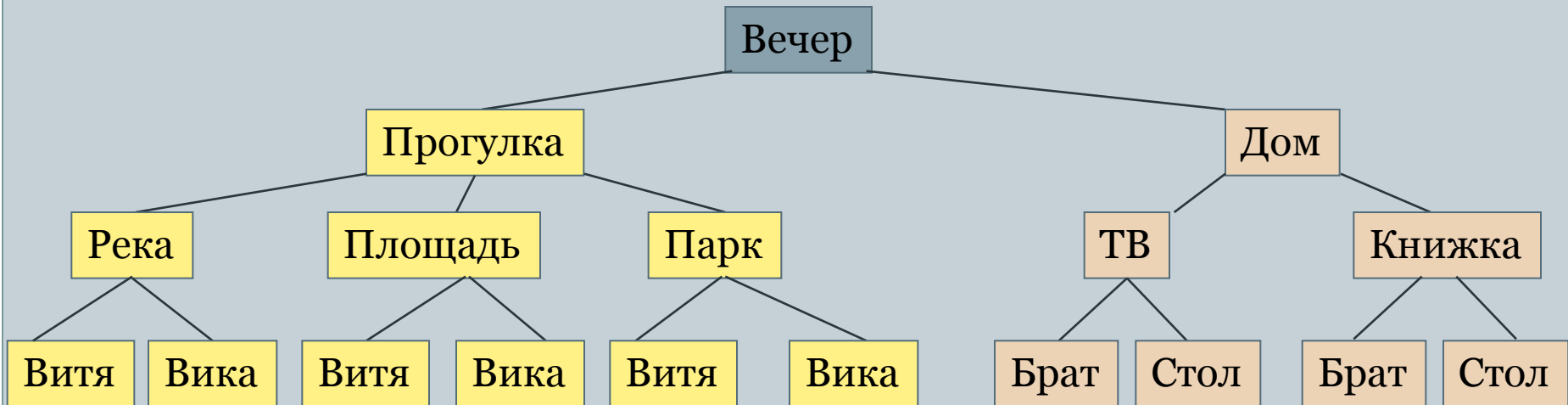
а) Ответ: 8 чисел.

б) Ответ: 24 числа.

# Дерево возможных вариантов

## Пример 4.

«Этот вечер свободный можно так провести...» (А. Кушнер):  
пойти прогуляться к реке, на площадь или в парк и потом пойти в гости к Вите или к Вике. А можно остаться дома, сначала посмотреть телевизор или почитать книжку, потом поиграть с братом или разобраться наконец у себя на столе. Нарисовать дерево возможных вариантов.



На завтрак можно выбрать булочку, кекс, пряники или печенье.

## 1.2. Правило умножения (произведения)

х/б  
изд.

булочка



кекс



пряники



печенье



Для того, чтобы найти число всех возможных исходов (вариантов) независимого проведения двух испытаний А и В, надо перемножить число всех исходов испытания А на число всех исходов испытания В



Испытание А имеет 3 варианта (исхода), а испытание В-4, всего вариантов независимых испытаний А и В  $3 \cdot 4 = 12$ .

Пример 5. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?



*Решение.*

В качестве первой цифры может быть выбрана любая из цифр 1, 2, 3, т.е.  $n=3$ .

Второй цифрой может быть выбрана любая из четырех данных цифр 0, 1, 2, 3, т.е.  $m = 4$ .

Согласно правилу произведения число всевозможных двузначных чисел, составленных с помощью предложенных цифр, равно

$$n*m = 3*4=12.$$

Ответ: 12.



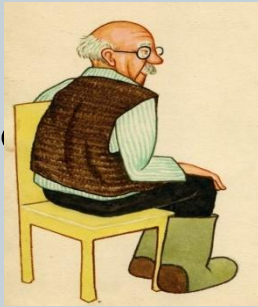
# Семейный ужин.

Пример 6.

*В семье 6 человек, а за столом в кухне 6 стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?*



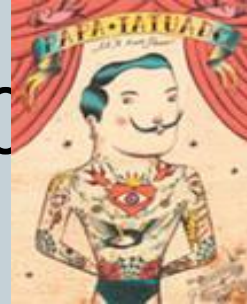
6



5



4



3



2



1

6

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

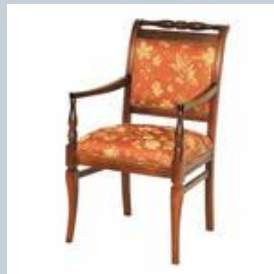
очти 2 года



№1



№2



№3



№4



№5



№6

# 1.3. Понятие факториала



Произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно называют  **$n$ -факториал** и обозначают:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$$

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 6! \cdot 7 = 720 \cdot 7 = 5040$$

Удобные формулы:

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$



## Пример 7.



a)  $5! - 3! = 120 - 6 = 114$

b)  $6! + 4! =$

c)  $7! - 5! =$

d)  $10! - 8! =$

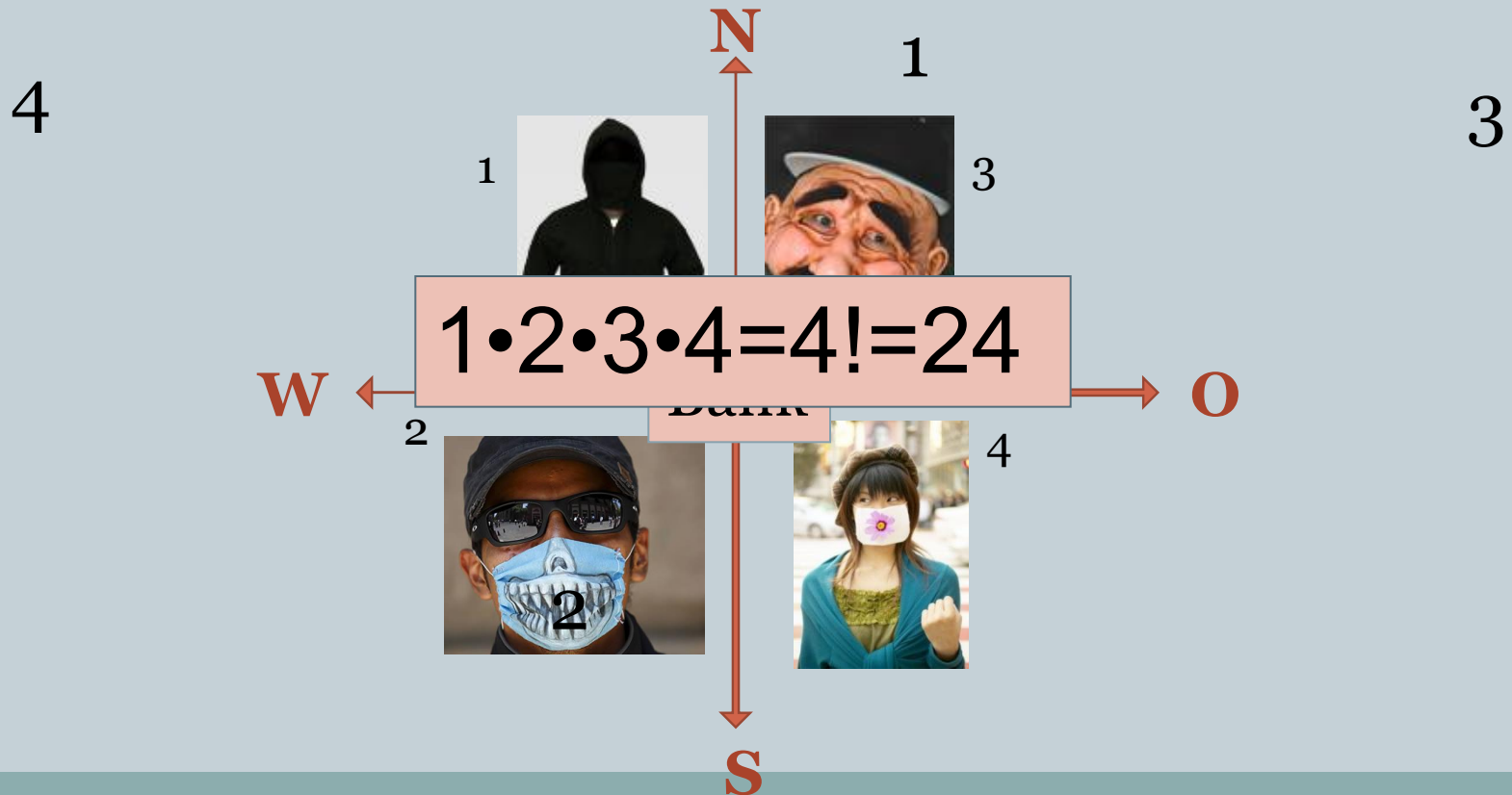
e) 
$$\frac{8! - 6!}{7!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 - 6!}{6! \cdot 7} = \frac{6!(7 \cdot 8 - 1)}{6! \cdot 7} =$$
$$\frac{6!(56 - 1)}{6! \cdot 7} = \frac{55}{7} = 7\frac{6}{7}$$

f) 
$$\frac{7! + 5!}{6!} = 7\frac{1}{6}$$

# Их разыскивает полиция...

Пример 8.

*Сколькими способами 4 вора могут по одному разбежаться на все 4 стороны.*



# Расписание уроков.

## Пример 9.

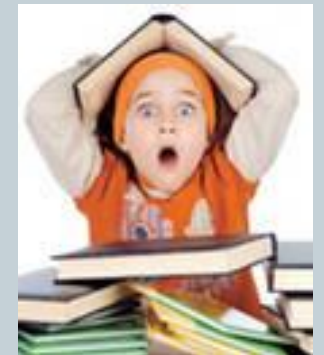
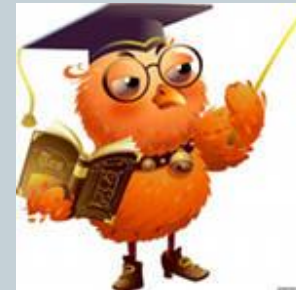
*В 9 классе в среду 7 уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить?*

Расставляем предметы по порядку

Предмет	Число вариантов
Алгебра	7
Геометрия	6
Литература	5
Русский язык	4
Английский язык	3
Биология	2
Физкультура	1

Всего вариантов расписания

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7! = 5040$$



## 1.4. Перестановки



**Задача.** Пусть даны три буквы: А, В, С.  
Составить все возможные комбинации  
из этих букв.

<b>А</b>	<b>В</b>	<b>С</b>
<b>АВС</b>	<b>ВАС</b>	<b>САВ</b>
<b>АСВ</b>	<b>ВСА</b>	<b>СВА</b>

**Ответ:** 6 комбинаций.

## 1.4. Перестановки



### ***Перестановками из $n$ элементов***

называются соединения, которые состоят из одних и тех же  $n$  элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Комбинации из  $n$  элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов называются ***перестановками***.

Число перестановок из  $n$  элементов обозначают

$P_n$  и читают «пэ энное»

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

# Задача



Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

- *Решение.* На первое место можно поставить любую из четырех книг, на второе – любую из трех оставшихся книг, на третье – любую из двух оставшихся книг и на четвертое место – последнюю оставшуюся книгу.
- Применяя формулу  $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- Ответ: книги можно поставить 24 способами.



# Задача



Сколько способами можно положить 6 различных открыток в 6 имеющихся конвертов (по одной открытке в конверт)?

- *Решение.* Задача сводится к нахождению числа перестановок из 6 элементов.
- Применяя формулу, получим
$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$
- Ответ: 720 способами.

## Пример.



Даны три числа 1, 5, 9. Посчитать число перестановок.

*Решение.*  $P_3 = 3! = 6$

159, 195, 519, 591, 915, 951.

Ответ: 6 комбинаций.

Пример. Даны числа 1, 2, 3, 4. Посчитать и записать число перестановок.

*Решение.*  $P_4 = 4! = 24$

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2413	3241	4231
1342	2431	3214	4213
1423	2314	3314	4312
1432	2341	3341	4321

Ответ: 24 комбинации.

# Задание.



a)  $5! - 3! = 120 - 6 = 114$

b)  $6! + 4! =$

c)  $7! - 5! =$

d)  $10! - 8! =$

e) 
$$\frac{8! - 6!}{7!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 - 6!}{6! \cdot 7} = \frac{6!(7 \cdot 8 - 1)}{6! \cdot 7} =$$
$$\frac{6!(56 - 1)}{6! \cdot 7} = \frac{55}{7} = 7\frac{6}{7}$$

f) 
$$\frac{7! + 5!}{6!} = 7\frac{1}{6}$$

## 1.5. Размещения

### *Задача.*

Сколько различных двузначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

*Решение.* Перебором убедимся в том, что из четырех цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,

21, 23, 24,

31, 32, 34,

41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырех цифр, а на втором – любая из оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел  $4 \cdot 3 = 12$ . *Ответ: 12.*

## 1.5. Размещения



**Размещениями из  $t$  элементов по  $n$  элементов ( $n \leq t$ )** называются такие соединения, каждое из которых содержит  $n$  элементов, взятых из данных  $t$  разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из  $t$  элементов по  $n$  элементов обозначают  $A_t^n$  и читают «А из эм по эн»

$$A_t^n = t(t-1)(t-2) \cdot \dots \cdot (t - (n-1))$$

## Примеры.



$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12;$$


$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24;$$

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

$$\underline{A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot 2 \cdot 1 = P_n}$$

- Т.е. число размещений из  $n$  элементов по  $n$  равно числу перестановок из этих элементов.

# Формула для нахождения числа размещений


$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

*Примеры.*

$$1) \quad A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60$$

$$2) \quad \frac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5} = \frac{\frac{20!}{13!} + \frac{20!}{14!}}{\frac{20!}{15!}} = \frac{15!}{13!} + \frac{15!}{14!} =$$
$$= 15 \cdot 14 + 15 = 15(14 + 1) = 225$$



# Задания.



1. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?
2. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9?
3. Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 8 учебных предметов, а в расписание на день могут быть включены только 3 из них?
4. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Ответы: 210; 5040; 336; 60.

## Задания.



5. Сколько существует способов для обозначения с помощью букв А, В, С, D, Е, F вершин данного треугольника? (ответ: 120)
6. В группе 20 человек. Сколькими способами из их числа можно сделать назначение: физорга и культорга? Физорга, культорга и казначея? (6840)
7. Найти значение выражения:

$$1) \frac{A_{15}^9 - A_{15}^8}{A_{15}^7}; \quad 2) \frac{A_{18}^{10} + A_{18}^{11}}{A_{18}^9}; \quad 3) \frac{A_9^4 \cdot A_4^4}{A_8^6}$$

## 1.5. Сочетания и их свойства



**Сочетаниями из  $t$  элементов по  $n$**  в каждом ( $n \leq t$ ) называются соединения, каждое из которых содержит  $n$  элементов, взятых из данных  $t$  разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

Число всевозможных сочетаний из  $t$  различных элементов по  $n$  элементов обозначают  $C_t^n$  и читают «С из эм по эн»

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} \quad (1)$$

Например,  $C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Если  $m = n$ , то  $C_n^n = \frac{A_n^n}{P_n} = \frac{P_n}{P_n} = 1.$

Учитывая, что  $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$  при  $m \geq n$  и  $P_n = n!$ ,

можно записать  $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}. \quad (2)$

Например,  $C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$

# Задача. Сколько существует способов выбора двух карт из колоды в 36 карт?

- Изымаемые из колоды всевозможные пары карт без учета порядка их расположения в наборе образуют сочетания из 36 по 2. По формуле (2) находим:

$$C_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)! \cdot 2!} = \frac{36!}{34! \cdot 2!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 35 \cdot 18 = 630.$$

Ответ : 630 способов.

# Свойства сочетаний

Свойство 1.  $\underline{C_m^n = C_m^{m-n}}$

Свойство 2 (рекуррентное свойство)

$\underline{C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}}$

Пример. Найти значение выражения

$$C_{20}^{18} + C_{20}^{19} = C_{21}^{19} = \frac{21!}{(21-19)! \cdot 19!} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210.$$

## Задания.

№ 1. Вычислить : 

$$C_7^1; C_6^1; C_7^2; C_7^3; C_8^3; C_{10}^8;$$

$$C_9^8; C_{10}^9; C_{15}^{15}; C_{30}^0; C_{40}^{38}; C_{60}^2$$

№ 2. Найти значение выражения :

$$1) C_{13}^{10} + C_{13}^{11}; \quad 2) C_{14}^{12} + C_{14}^{13}; \quad 3) C_{19}^4 - C_{18}^4;$$

$$4) C_{21}^3 - C_{20}^3; \quad 5) C_{61}^3 - C_{60}^2; \quad 6) C_{71}^3 - C_{70}^2.$$

№ 3. Найти  $x$ , если  $C_{x-2}^2 = 21$ .

№ 4. Найти  $x$ , если  $C_x^2 = 153$ .

# Задачи.



1. Сколькими способами для участия в конференции из 9 членов научного общества можно выбрать четверых студентов? (126)
2. Сколько различных аккордов, содержащих 3 звука, можно образовать из 12 клавиш одной октавы? (220)
3. В помещении 16 ламп. Сколько существует вариантов его освещения, если одновременно должны светиться 14 ламп? (120)
4. На окружности отмечено 12 точек. Сколько различных треугольников с вершинами в этих точках можно построить? (220)



## 2. Формула бинома Ньютона



- В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*.
- Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома  $(a+b)$  (при условии  $a+b \neq 0$ ):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

- **Формула биннома Ньютона** для натуральных  $m$  имеет вид

$$(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \dots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \dots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

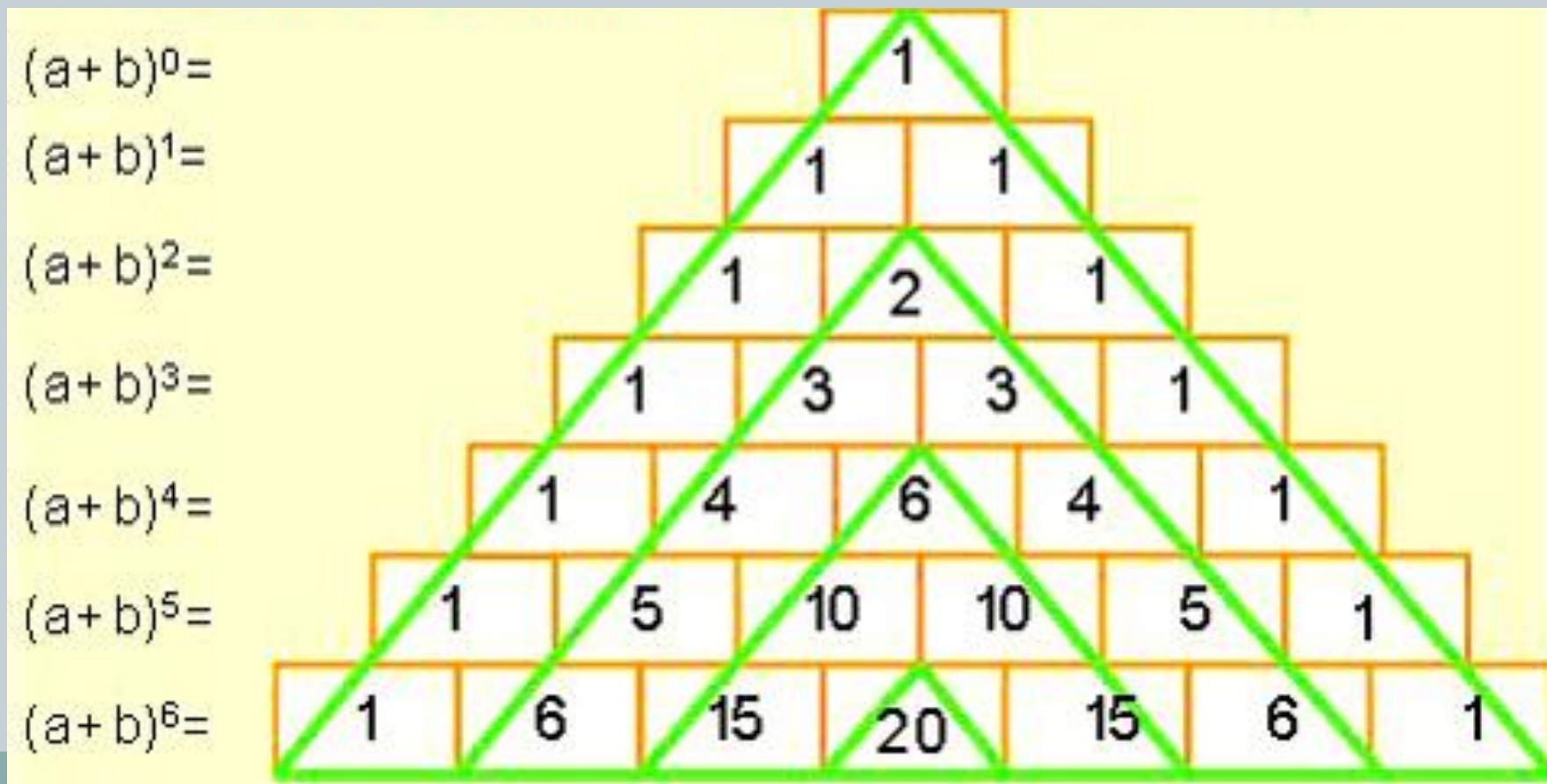
где числа

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

- биномиальные коэффициенты, которые легко находить из треугольника Паскаля.

### 3. Треугольник Паскаля

- это таблица значений  $C_m^n$ , составленная на основании рекуррентного свойства числа сочетаний.



# Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля	Номер строки	Возведение в степень двучлена
1	0	$(a + b)^0 = 1$
1 1	1	$(a + b)^1 = a + b$
1 2 1	2	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	3	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
1 4 6 4 1	4	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	5	$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
1 6 15 20 15 6 1	6	и т. д.

# Свойства биномиальных коэффициентов



Для коэффициентов бинома Ньютона справедливы следующие свойства:

1) коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой  $C_n^p = C_n^{n-p}$

где  $p=0,1,2,\dots,n$ ;

$$2) C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

3) сумма биномиальных коэффициентов равна числу 2, возведенному в степень, равную показателю степени бинома Ньютона:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

- сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Пример. Записать разложение бинома  $(x - 2)^6$



$$(x - 2)^6 = (x + (-2))^6 =$$

$$= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \cdot (-2) + C_6^2 x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3 x^3 \cdot (-2)^3 +$$

$$+ C_6^4 x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5 x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$

$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) +$$

$$+ 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$

$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$$

# Упражнения.

Записать разложение бинома:



$$(1 + x)^8$$

$$(2x + 1)^5$$

$$(1 + \sqrt{2})^6$$

$$(x + 1)^7$$

$$(x + 2)^6$$

$$(1 + \sqrt{3})^5$$

$$(a - 1)^9$$

$$(3x + 2)^4$$

$$\left(a - \frac{1}{3a}\right)^7$$

$$(y - 1)^{10}$$

$$\left(2a - \frac{1}{2}\right)^5$$

$$\left(b - \frac{1}{2b}\right)^6$$

$$(x + 2)^6$$

$$\left(3x - \frac{1}{3}\right)^6$$