

Моделдеуде  
спектралдық әдістер

Кері есептер

$y = f(x)$  - функция

Тура есеп:  $x \rightarrow f(x) = y$

Аноқталу облысы...

Кері есеп:  $y \rightarrow x$ .

Лектор

Сулейменов

Кенесаров

Машимович

# Литература

1. Юрко В.А. Введение

в теорию обратных спектральных задач.

М.: Физматлит, 2007 г.

2. Наймарк М.А. Линейное дифференциальное уравнение.

М.: Изд-во «Наука», 1969 г.



3. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. М.: Физматкнига, 2003.

4. Кравченко К.В. О дифференциальных операторах с нелокальными краевыми условиями.

Дифф. уравн., 2000, т.36. №4,

стр. 464-469.

Қарастырылатын мәселе:

Негізгі объект: дифференциалдық оператор:

$$L(y) := a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x).$$

Диф. теңд. кұрсонда  $a_n(x) \neq 0$   
үшін келесі түрлендірулер  
қарастырылған



$L(y)$  келесі түрде көрсітіледі

$$\tilde{L}(y) := y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x)$$

Егер  $\tilde{p}_1(x) \neq 0$  болса интегралданса,

онда

$$\tilde{L}(\tilde{y}) := \tilde{y}^{(n)}(x) + \tilde{p}_{n-2}(x)\tilde{y}^{(n-2)}(x) + \dots + \tilde{p}_1(x)\tilde{y}'(x) + \tilde{p}_0(x)\tilde{y}(x).$$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{n} \int P_1(x) dx}$$

$$n=2 \Rightarrow$$

$$L(y) := a_2(x) y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) \rightarrow$$

$$\tilde{L}(\tilde{y}) := \tilde{y}''(x) + \hat{a}_0(x) \tilde{y}(x).$$

# Задача 1.

Два дифференциальных уравнения

$$\textcircled{1} L(y) = (2x+1)y''(x) + (x+1)y'(x) - 5y(x)$$

$$\textcircled{2} L(y) = y''(x) + \sin x y'(x) + (x-1)y(x)$$



$$\textcircled{3} \quad L(y) = y''(x) + \lg 3x y'(x) + 3y(x)$$

$$\textcircled{4} \quad L(y) = y''(x) - \cos 5x y'(x) - 3y(x).$$

провести преобразование  
приведения к виду

$$\tilde{y}''(x) + \hat{p}_0(x) \tilde{y}'(x) = \hat{L}(\tilde{y}(x)).$$

Толқындық теңдеу үшін

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, \quad u = u(x, t)$$

Фурье әдісін пайдаланып

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \Rightarrow$$

$$u_{tt} = X(x) \cdot T''(t)$$

$$u_{xx} = T(t) \cdot X''(x)$$



$$X(x) \cdot T''(t) - T'(t) X''(x) + q(x) X(x) \cdot T'(t) = 0$$

$$\cdot \frac{1}{X(x) \cdot T'(t)} \Rightarrow$$

$$\frac{T''(t)}{T'(t)} = \frac{X''(x) - q(x) X(x)}{X(x)}$$

$$X''(x) - q(x) X(x) = -\lambda X(x)$$

Тендеуі Штурм - Лиувелль

Тендеуі ген атаулар



§1 Меншікті мәндер және  
меншікті функциялар

Мәселенің қойылуы:

Шекаралық есепті қарастырайық

$L \equiv L(q(x), h, H)$ :

$$Ly := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \bar{n}, \quad (1)$$

$$U(y) := y'(0) - h \cdot y(0) = 0; \quad V(y) := y'(\bar{n}) + Hy(\bar{n}) = 0. \quad (2)$$

$\lambda$  - спектрік параметр

$h, H \in \mathbb{R}$ ;

$q(x)$  - нақты дөңгі функциясы,

$$q \in L^2(0; \infty) \Leftrightarrow \int_0^{\infty} |q(x)|^2 dx < \infty.$$

$l$  - Штурм - Лувьець операторы

$q(x)$  - потенциал

Есеп: 2 параметрлі Штурм - Лувьець операторының потенциалы характеристика бойынша потенциал  $q(x)$ -ті қалпына келтіру!

Әрине,  $\forall x \in [0; \pi] \Rightarrow$

$y(x) = 0$  функциясы (1)

Диар. теңд. шешімі болады.

$y(x) = 0$  функциясы  $L$ -шек. есептің

Тривиялық шешімі  $\partial/\partial t$ .



def  $L$  операторы есептін

Трибуердот елес меніңдері бар  
долатон спектрлік параметр  $\lambda$ -н  
барлық мәңдері меншікті мәңдер  
ден атааладо, ал ~~то~~  $\lambda \rightarrow y(x)$

Трибуердот елес меніңдері  
меншікті функциялар  $\partial$ /атааладо.

$\{\lambda\}$  — спектр

$\{y(x)\}$  — меншікті функциялар

§1 - ге зерттейлиз

1) спектрдик карапайом  
касметтерин;

2)  $\{\lambda\}$ ,  $\{y(x)\}$  - асимптотикелок  
тендеулерин.

L шекезелок еселтер түрлерин

(1) A

$$\text{I } U(y) := y'(0) - h y(0) = 0; \quad y(\pi) = 0.$$

$$\text{II } y(0) = 0; \quad V(y) := y'(\pi) + H y(\pi) = 0.$$

$$\text{III } y(0) = 0; \quad y(\pi) = 0.$$



Шекерелорк шарттар

$$\{U(y); V(y)\} ; \{U(y); y(\bar{\pi})=0\}.$$

$$\{y(0)=0; V(y)\} ; \{y(0)=0; y(\bar{\pi})=0\}$$

екі нуктелік шекерелорк шарттар  $\partial/a$ .

$$U_j(y) := H_j y'(0) + h_j y(0) + \int_0^{\bar{\pi}} y(t) d\sigma_j(t), \quad j=1,2.$$

$\sigma(t)$  - шекелген вариациялар  $\Phi$ - $\mathcal{L}$ ,  
локальді емес шарттар  $\partial/a$ .



$C(x, \lambda), S(x, \lambda), \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda) - (1).$

$$\begin{cases} C(0, \lambda) = 1, \\ C'(0, \lambda) = 0. \end{cases} \begin{cases} S(0, \lambda) = 0, \\ S'(0, \lambda) = 1. \end{cases} \begin{cases} \varphi(0, \lambda) = 1, \\ \varphi'(0, \lambda) = h. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(\pi, \lambda) = 1, \\ \psi'(\pi, \lambda) = -H. \end{cases}$$

$\forall x \in [0; \pi] : \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda), C(x, \lambda),$

$S(x, \lambda) - \begin{cases} \text{целые алгебраические по } \lambda. \\ \lambda \text{ должно быть алгебраическим.} \end{cases}$

$\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda):$

$$U(\varphi(x, \lambda)) := \varphi'(0, \lambda) - h \varphi(0, \lambda) = 0, \quad (3)$$

$$V(\psi(x, \lambda)) := \psi'(\pi, \lambda) + H \psi(\pi, \lambda) = 0.$$

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle, \quad (4)$$

$$\langle y(x), z(x) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} y(x) \cdot z'(x) - y'(x) \cdot z(x) -$$

— Вронскиан

Формула Абеля -

- линейная

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$W[y_1, y_2](x) \stackrel{\text{def}}{=} W(x).$$

$$(W(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} =$$



$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -a_1(x)y_1'(x) - a_0(x)y_1(x) & -a_1(x)y_2'(x) - a_0(x)y_2(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -a_1(x)y_1'(x) & -a_1(x)y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -a_0(x)y_1(x) & -a_0(x)y_2(x) \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} - a_0(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = -a_1(x) w(x).$$

$$(w(x))' = -a_1(x)w(x),$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = -a_1(x)w(x) \Leftrightarrow [x_0 \in [0; \pi], x \in [0; \pi]]$$

$$\frac{dw(x)}{w(x)} = -a_1(x)dx \Leftrightarrow \int_{x_0}^x \frac{dw(t)}{w(t)} = - \int_{x_0}^x a_1(t)dt$$

$$\left[ \ln |w(t)| \right]_{x_0}^x = - \int_{x_0}^x a_1(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\ln \left| \frac{w(x)}{w(x_0)} \right| = - \int_{x_0}^x a_1(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{w(x)}{w(x_0)} \right| = e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt} \Leftrightarrow$$

$$w(x) = \pm w(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt}, \quad x = x_0 \Rightarrow$$

$$w(x_0) = w(x_0) \cdot e^0 \Leftrightarrow$$

$$w(x) = w(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt}$$

Q



В заданное уравнение - Лувиния

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad a_1(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt} \Leftrightarrow$$

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](x_0).$$

$$(4) : x=0 \wedge x=\pi \Rightarrow$$

$$1) x=0 \Leftrightarrow \Delta(\lambda) = \langle \psi(0, \lambda), \varphi(0, \lambda) \rangle =$$

$$= \psi(0, \lambda) \cdot \varphi'(0, \lambda) - \psi'(0, \lambda) \varphi(0, \lambda) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \varphi(0, \lambda) = 1; \varphi'(0, \lambda) = h \right| = \cancel{\varphi(0, \lambda)} - h\varphi \\
&= h \cdot \varphi(0, \lambda) - \varphi'(0, \lambda) = -[\varphi'(0, \lambda) - h\varphi(0, \lambda)] = \\
&= -U(\varphi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) x = \bar{\pi} &\Leftrightarrow \Delta(\lambda) = \varphi(\bar{\pi}, \lambda) \varphi'(\bar{\pi}, \lambda) - \varphi'(\bar{\pi}, \lambda) \\
\cdot \varphi(\bar{\pi}, \lambda) &= \left| \varphi(\bar{\pi}, \lambda) = 1; \varphi'(\bar{\pi}, \lambda) = -H \right| = \\
&= \varphi'(\bar{\pi}, \lambda) + H \varphi(\bar{\pi}, \lambda) = V(\varphi).
\end{aligned}$$

$$\Delta(\lambda) = -U(\varphi) = V(\varphi).$$