Моделдеуде спектралдық әдістер

Кері есептер

$y = f(x)$ – функция

Тура есеп: $x \longrightarrow f(x) = y$

Анықталу облысы ....

Кері есеп: $y \longrightarrow x$.

Лектор

Сулейменов

Кенесары

Машимович

Литература

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007 г.

2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Изд-во «Наука», 1969 г.

3. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. М.: Физматкнига, 2003.

4. Кравченко К.В. О дифференциальных операторах с нелокальными краевыми условиями. Дифф. уравн., 2000, т.36. № 4, стр. 464–469.

Қарастырылатын мәселе:

Негізгі объект: дифферен-
циалдық оператор:

$$L(y) := a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) +$$

$$+ \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x).$$

Диф. теңд. курсында $a_n(x) \neq 0$ үшін келесі түрлендірулер қарастырылған

$L(y)$ келесі түрге келтіріледі

$$\tilde{L}(y) := y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)\, y'(x) + p_0(x)\, y(x)$$

Егер $p_1(x)$ ф-сы интегралданса,

онда

$$\tilde{L}(\tilde{y}) := \tilde{y}^{(n)}(x) + \tilde{p}_{n-2}(x)\, \tilde{y}^{(n-2)}(x) + \ldots + \tilde{p}_1(x)\, \tilde{y}'(x) + \tilde{p}_0(x)\, \tilde{y}(x).$$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{n}\int P_1(x)dx}$$

$$n = 2 \implies$$

$$L(y) := a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) +$$
$$+ a_0(x)\, y(x) \longrightarrow$$

$$\tilde{L}(\tilde{y}) := \tilde{y}''(x) + \hat{a}_0(x)\, \tilde{y}(x).$$

Задание 1.

Для дифференциального оператора

① $L(y) = (2x+1)\,y''(x) + (x+1)\,y'(x) - 5y(x)$

② $L(y) = y''(x) + \sin x\, y'(x) + (x-1)\,y(x)$

(3) $L(y) = y''(x) + \operatorname{tg} 3x \, y'(x) + 3\,y(x)$

(4) $L(y) = y''(x) - \cos 5x \, y'(x) - 3y(x).$

провести преобразование приведения к виду

$$\tilde{y}''(x) + \tilde{p}_0(x)\,\tilde{y}(x) = \tilde{L}(\tilde{y}(x)).$$

Толқындық теңдеу үшін

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)\,u = 0 \quad , \quad u = u(x,t)$$

Фурье әдісін пайдаланып

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \implies$$

$$u_{tt} = X(x) \cdot T''(t)$$

$$u_{xx} = T(t) \cdot X''(x)$$

$$X(x)\cdot T''(t) - T(t)X''(x) + q(x)X(x)\cdot T(t) = 0$$

- $\dfrac{1}{X(x)\cdot T(t)} \Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{T''(t)}{T(t)}}_{=-\lambda} = \underbrace{\frac{X''(x) - q(x)X(x)}{X(x)}}_{=-\lambda}$$

$$X''(x) - q(x)X(x) = -\lambda X(x)$$

Теңдеуі Штурм-Лиувилль теңдеуі деп аталады

§1 Меншікті мәндер және меншікті функциялар

Мәселенің қойылуы:

Шекаралық есепті қарастырайық $L \equiv L(q(x), h, H)$:

$$\ell y := -y'' + q(x) y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \qquad (1)$$

$$U(y) := y'(0) - h \cdot y(0) = 0; \quad V(y) := y'(\pi) + H y(\pi) = 0. \qquad (2)$$

λ - спектрлік параметр

$h, H \in R$;

$q(x)$ - нақты мәнді функция,

$q \in L^2(0; 2\pi) \Longleftrightarrow \int_0^{\pi} |q(x)|^2 dx < \infty.$

l - Штурм - Лиувилль операторы

$q(x)$ - потенциал

Есеп: λ параметрімен байланысты характеристика бойынша потенциал $q(x)$-ті қалпына келтіру!

Әрине, $\forall x \in [0;\pi] \Rightarrow$

$y(x)=0$ функциясы (1)

Диф. теңд. шешімі болады.

$y(x)=0$ функциясы L-шек. есептің

тривиалдық шешімі д/ат.

Def L шекаралық есептің тривиалды емес шешімдері бар болатын спектрлік параметр λ-н барлық мәндері меншікті мәндер деп аталады, ал $\lambda \to y(x)$ тривиалды емес шешімдері меншікті функция д/аталады.

$\{\lambda\}$ — спектр

$\{y(x)\}$ — меншікті функциялар

§1-де зерттейміз

1) спектрдің қарапайым қасиеттерін;

2) $\{\lambda\}$, $\{y(x)\}$ - асимптотикалық теңдеулерін.

L шекаралық есептер түрлері

(1) Λ

I $\quad U(y) := y'(0) - hy(0) = 0; \quad y(\pi) = 0.$

II $\quad y(0) = 0; \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0.$

III $\quad y(0) = 0; \quad y(\pi) = 0.$

Шекаралық шарттар

$$\{U(y);\ V(y)\}\ ;\ \{U(y)\ ;\ y(\pi)=0\}.$$

$$\{y(0)=0;\ V(y)\}\ ;\ \{y(0)=0\ ;\ y(\pi)=0\}$$

екі нүктелік шекаралық шарттар д/а.

$$U_j(y) := H_j y'(0) + h_j y(0) + \int_0^{\pi} y(t)\,d\sigma_j(t)\ ,\ j=1,2.$$

$\sigma(t)$ – шектелген вариациялы ф-я,

локальді емес шарттар д/а.

$$C(x,\lambda),\ S(x,\lambda),\ \varphi(x,\lambda),\ \psi(x,\lambda) \ - \ (1).$$

$$\begin{cases} C(0,\lambda)=1, \\ C'(0,\lambda)=0. \end{cases} \quad \begin{cases} S(0,\lambda)=0, \\ S'(0,\lambda)=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(0,\lambda)=1, \\ \varphi'(0,\lambda)=h. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(\pi,\lambda)=1, \quad \psi'(\pi,\lambda)=-H. \end{cases}$$

$$\forall x \in [0;\pi]: \ \varphi(x,\lambda),\ \psi(x,\lambda),\ C(x,\lambda),$$

$S(x,\lambda)$ — $\begin{cases} \text{целые аналитические по } \lambda. \\ \lambda \text{ бойынша бүтін аналитикалық.} \end{cases}$

$\varphi(x,\lambda)\,,\ \psi(x,\lambda):$

$$U(\varphi(x,\lambda)) := \varphi'(0,\lambda) - h\varphi(0,\lambda) = 0, \qquad (3)$$

$$V(\psi(x,\lambda)) := \psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0.$$

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) \rangle, \qquad (4)$$

$$\langle y(x), z(x) \rangle \overset{\text{def}}{=} y(x)\cdot z'(x) - y'(x)\cdot z(x). \; -$$

– Вронскиан

Формула Остроградского –

– Лиувилля

$$y''(x) + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = 0.$$

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$W[y_1, y_2](x) \overset{\text{def}}{=\!=} W(x).$$

$$\big(W(x)\big)' \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -a_1(x)\, y_1'(x) - a_0 y_1(x) & -a_1 y_2'(x) - a_0 y_2(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -a_1(x) y_1'(x) & -a_1(x) y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -a_0(x) y_1(x) & -a_0(x) y_2(x) \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} - a_0(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = -a_1(x)\, W(x).$$

$$(w(x))' = -a_1(x)\,w(x),$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = -a_1(x)\,w(x) \Longleftrightarrow \quad \left[x_0 \in [0;\pi],\ x \in [0;\pi]\right]$$

$$\frac{dw(x)}{w(x)} = -a_1(x)\,dx \Longleftrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dw(t)}{w(t)} = -\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt$$

$$\left[\ln|w(t)|\right]\Big|_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt \Longleftrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{w(x)}{w(x_0)}\right| = -\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt \Longleftrightarrow$$

$$\left|\frac{W(x)}{W(x_0)}\right| = e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt} \iff$$

$$W(x) = \pm W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}, \quad x = x_0 \Rightarrow$$

$$W(x_0) = W(x_0) \cdot e^{0} \iff$$

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}$$

В задаче Штурма - Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad a_1(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt} \Leftrightarrow$$

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](x_0).$$

$$(4): \ x = 0 \wedge x = \pi \Rightarrow$$

$$1) \ x = 0 \Leftrightarrow \Delta(\lambda) = \langle \psi(0,\lambda), \varphi(0,\lambda) \rangle =$$

$$= \psi(0,\lambda) \cdot \varphi'(0,\lambda) - \psi'(0,\lambda)\varphi(0,\lambda) =$$

$$= \left| \varphi(0,\lambda) = 1;\ \varphi'(0,\lambda) = h \right| = \cancel{\psi(0,\lambda) - h\psi}$$

$$= h\cdot\psi(0,\lambda) - \psi'(0,\lambda) = -\left[\psi'(0,\lambda) - h\psi(0,\lambda)\right] =$$

$$= -U(\psi).$$

$$2)\ x=\pi \iff \Delta(\lambda) = \psi(\pi,\lambda)\,\varphi'(\pi,\lambda) - \psi'(\pi,\lambda)\,\cdot$$

$$\cdot\,\varphi(\pi,\lambda) = \left| \psi(\pi,\lambda) = 1;\ \psi'(\pi,\lambda) = -H \right| =$$

$$= \varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = V(\varphi).$$

$$\Delta(\lambda) = -U(\psi) = V(\varphi).$$