

# Комбинации многогранников и тел вращения

---

# ШАР И МНОГОГРАННИК

**Определение 1.** Шар называется *вписанным* в многогранник, если он *касается* всех его *граней*.

**Определение 2.** Шар называется *описанным* около многогранника, если *все вершины* многогранника *лежат* на *поверхности шара*.

**!!!ЗАПОМНИ** Если *шар* можно *вписать* в параллелепипед или *описать* около него, то центр шара находится в точке пересечения диагоналей параллелепипеда.

---

**Определение 3.** Шар (сфера) называется *вписанным* в цилиндр, если он *касается* оснований цилиндра и всех его образующих по окружности *большого* круга.

# ШАР И МНОГОГРАННИК

**Определение 4.** Шар (сфера) называется *описанным* около цилиндра, если окружности оснований цилиндра касаются поверхности шара (сферы).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** И в том и в другом случае ось цилиндра проходит через центр шара.

**Определение 5.** Шар (сфера) называется *вписанным* в конус, если он касается основания конуса и всех его образующих.

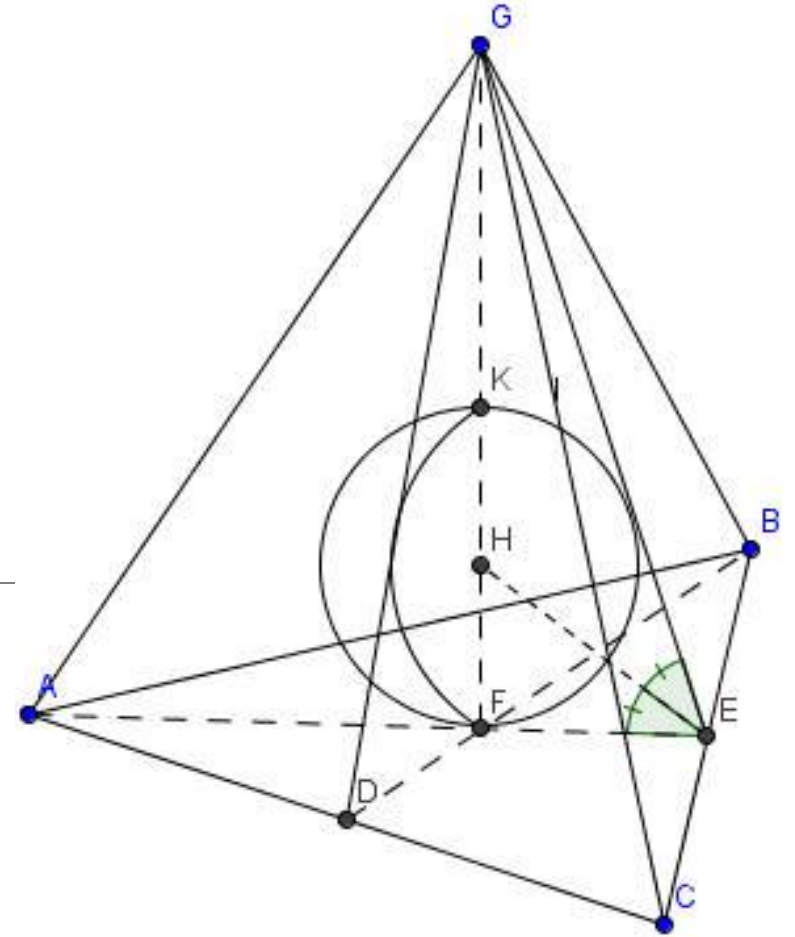
**Определение 6.** Шар (сфера) называется *описанным* около конуса, если окружность основания конуса и его вершина лежат на поверхности шара (на сфере).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** И в том и в другом случае ось конуса проходит через центр шара (сферы).

# Правильная треугольная пирамида и сфера, шар

**1.** В **любую** правильную пирамиду  
МОЖНО **вписать** шар.

**2.** Шар касается основания в  
его центре, а боковых граней –  
в                                  на  
**апофемах.**



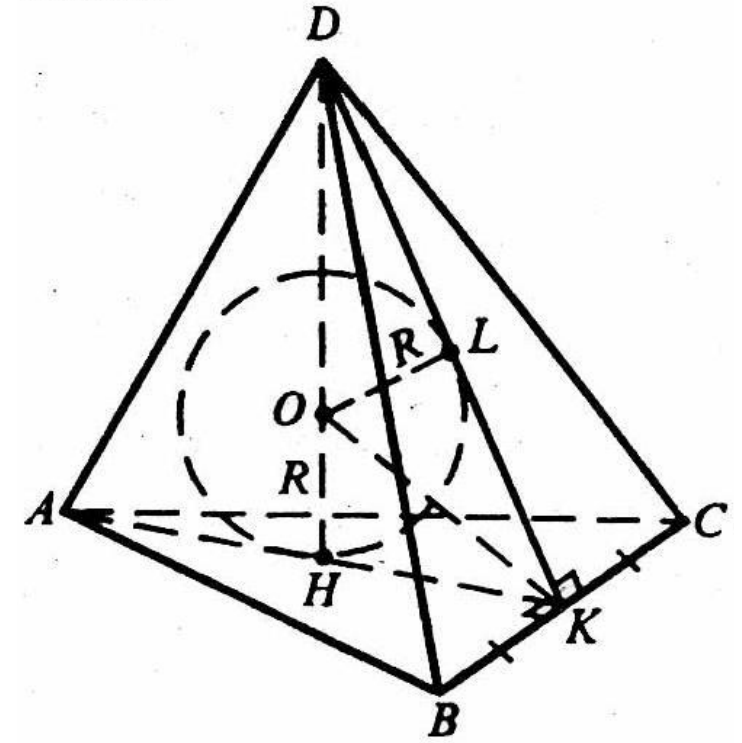
# Правильная треугольная пирамида и сфера, шар

**3.** Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит **на пересечении высоты пирамиды и биссектрисы угла**, образованного апофемой и ее проекцией на основание.

**Ключевая пропорция:**

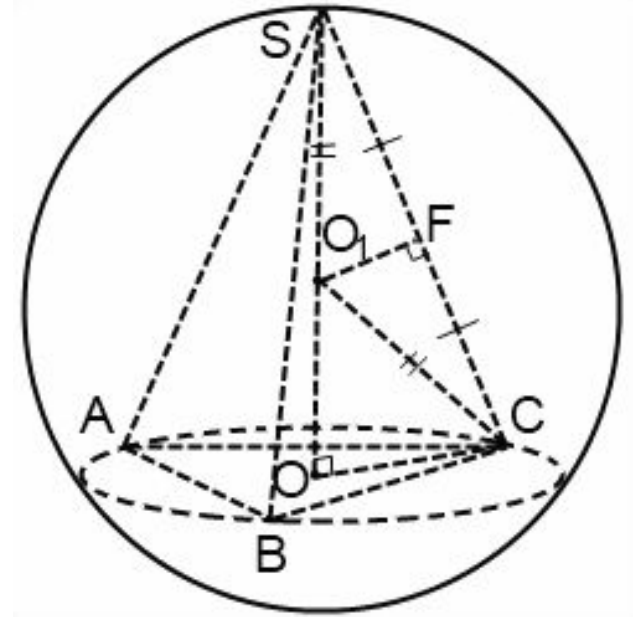
$$\frac{r_{\text{шара}}}{h_{\text{пир-ды}} - r_{\text{шара}}} = \frac{HK}{DK'}$$

$HK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ , где  $a$  – сторона основания пирамиды,  $DK$  – апофема пирамиды.  $HK$  – проекция апофемы, равная  $\frac{1}{3}$  высоты основания пирамиды.



# Правильная треугольная пирамида и сфера, шар

1. Основание высоты правильной пирамиды **совпадает** с центром *описанной около основания окружности*.
2. Центр шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, лежит **на пересечении высоты пирамиды** (или ее продолжении) и *серединного перпендикуляра к ребру пирамиды*, проведенного в плоскости, образованной этим ребром и высотой пирамиды.



# Правильная треугольная пирамида и сфера, шар

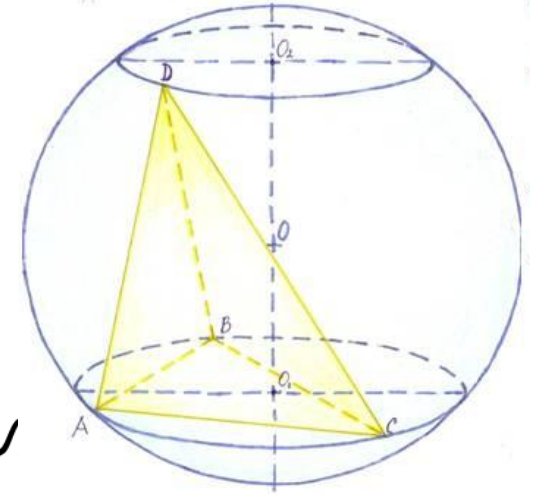
**3.** Найдя центр шара, рассматриваем *подобие прямоугольных треугольников*.

**Ключевая пропорция:**

$$\frac{\frac{b_{\text{бок ребр пир}}}{2}}{R_{\text{шара}}} = \frac{h_{\text{пир-ды}}}{b_{\text{бок ребр пир}}},$$

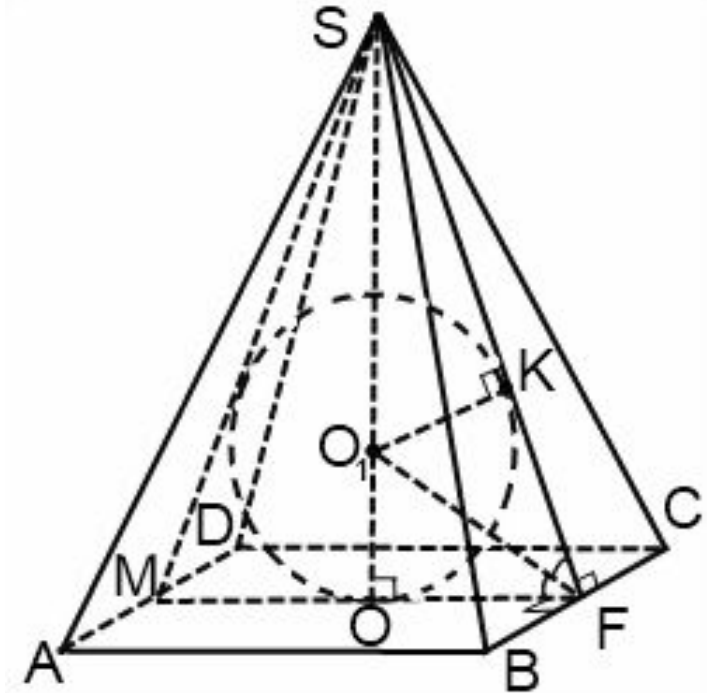
Если боковое ребро **правильной** **треугол**  
**пирамиды** равно  $b$ , а сторона основания пирамиды –  $a$ ,  
тогда радиус описанного шара можно найти по формуле:

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{3}}}$$



# Правильная четырехугольная пирамида и сфера, шар

**1. Радиус шара**, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, **равен радиусу окружности**, вписанной в **равнобедренный треугольник**, где боковые стороны – апофемы пирамиды, а основание – сторона основания пирамиды.



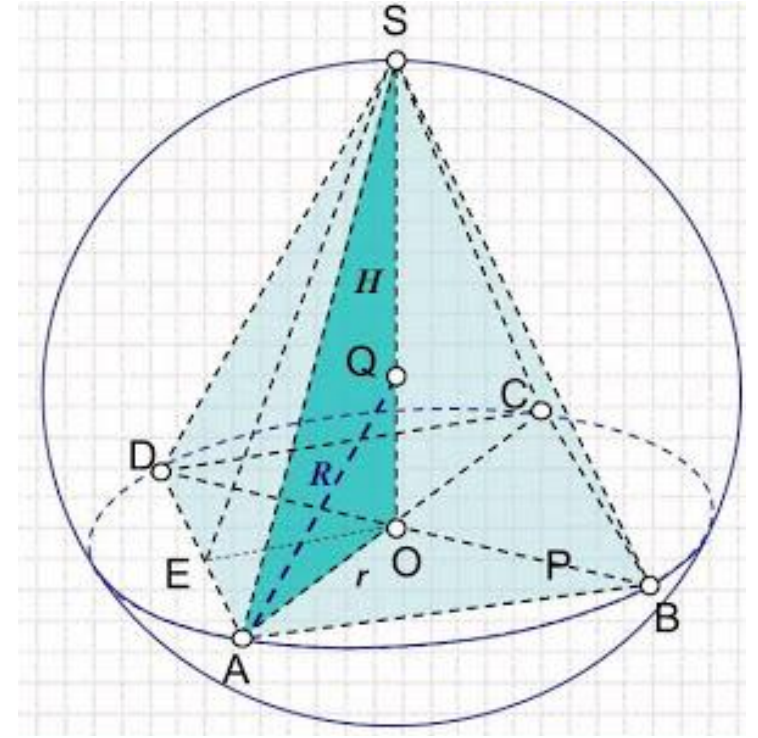
**2.** Для нахождения радиуса сферы можно воспользоваться следующая формула:  $S = pr$



# Правильная четырехугольная пирамида и сфера, шар

**1. Радиус сферы,** описанной около правильной четырехугольной пирамиды, **равен радиусу окружности,** описанной около ее **диагонального сечения.**

**2. Диагональное сечение** четырехугольной пирамиды – **РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК**, где основание – диагональ квадрата, а боковые стороны – боковые ребра пирамиды.



# Правильная четырехугольная пирамида и сфера, шар

**3.** Для нахождения радиуса **сферы**, равного радиусу окружности, описанного около диагонального сечения можно воспользоваться следующими формулами:

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R,$$

где  $b$  – любая сторона треугольника,  $\beta$  – противолежащий этой стороне угол.

$$R = \frac{abc}{4S}$$

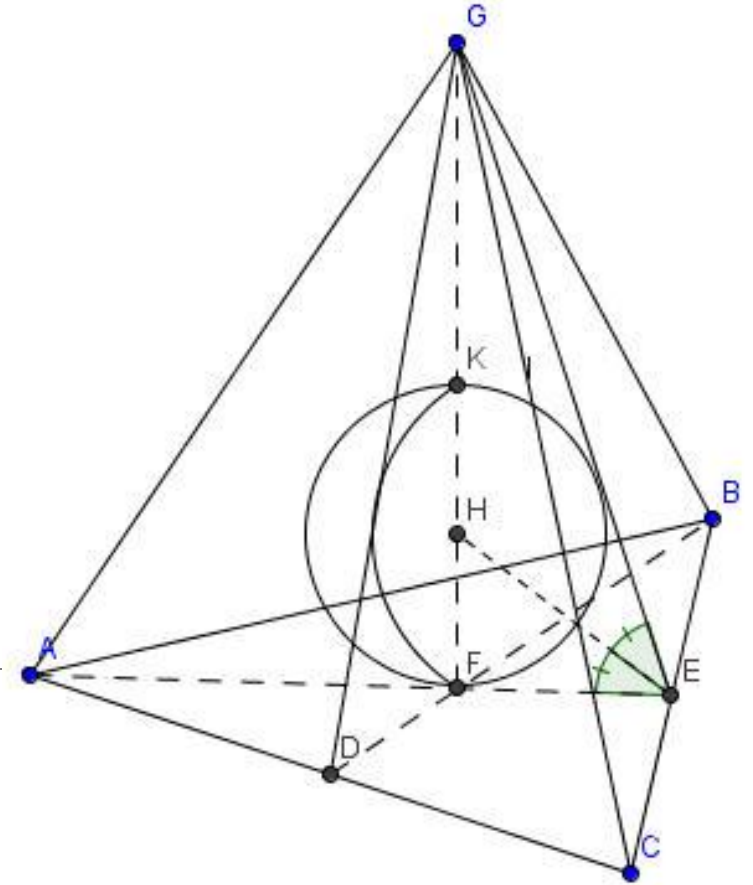
**ИЛИ** можно провести серединный перпендикуляр к боковой стороне до пересечения с высотой равнобедренного треугольника и воспользоваться подобием прямоугольных треугольников (малого с гипотенузой  $R$  и большого с гипотенузой = боковой стороне равнобедренного треугольника).

# Произвольная пирамида и сфера, шар

1. Шар, вписанный в многогранник, касается *граней всех двугранных углов* этого многогранника.
2. Центр шара, вписанного в пирамиду лежит на пересечении биссекторных полуплоскостей всех ее двугранных углов.

$$r = \frac{3V}{S},$$

где  $V$  – объем данной пирамиды,  $S$  – площадь полной поверхности пирамиды.

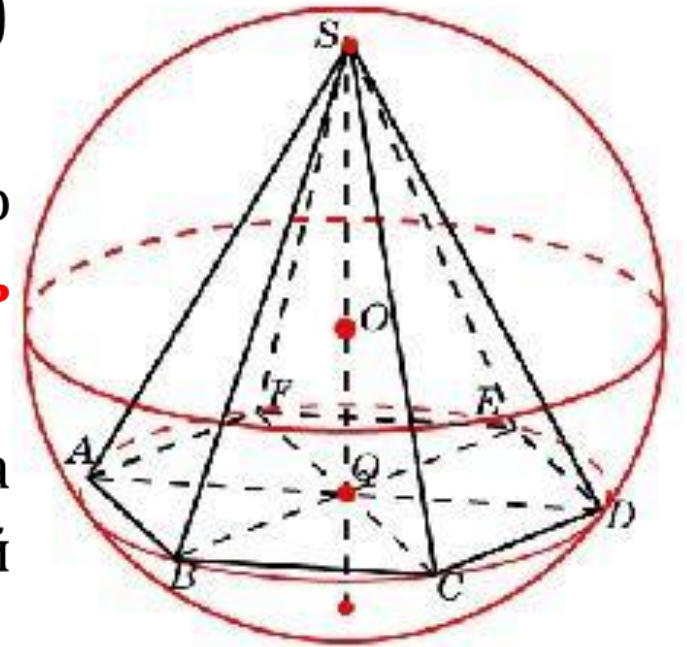


# Произвольная пирамида и сфера, шар

1. Около **любой треугольной** пирамиды (тетраэдра) можно описать шар (сферу).
2. Около произвольной  $n$ - угольной пирамиды можно описать шар, **если около ее основания** можно **описать окружность** и наоборот.
3. Центр шара, описанного около пирамиды, лежат на прямой, **перпендикулярной** основанию и проходящей через центр окружности, описанной около основания.

---

4. Около произвольной  $n$ - угольной пирамиды можно описать шар, если ее боковые ребра равны.
5. Около произвольной  $n$ - угольной пирамиды можно описать шар, если ее боковые ребра равно наклонены к основанию.

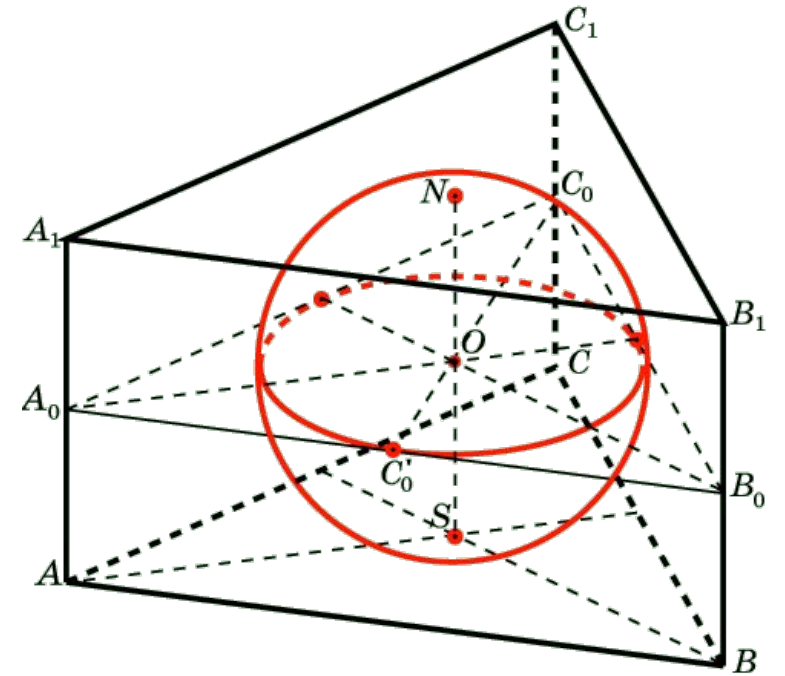


# Призма и сфера, шар

**1.** Шар можно вписать в прямую призму, ЕСЛИ ее основания являются многоугольниками, описанными около окружности, а **высота призмы равна диаметру** этой окружности.

**2.** Радиус вписанного шара **равен радиусу** этой **окружности**.

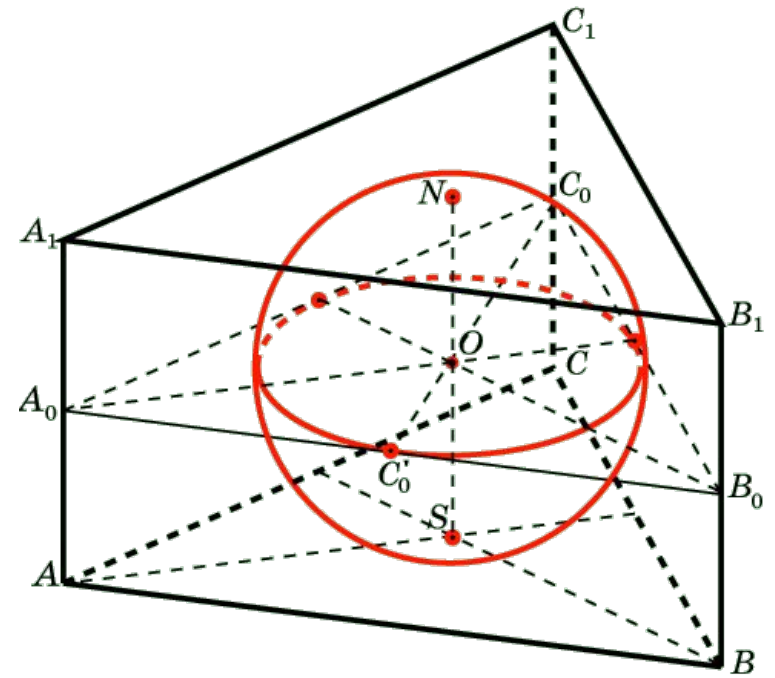
**3.** Центр шара лежит на середине высоты призмы, соединяющей центры окружностей, вписанных с основания призмы.





## Призма и сфера, шар

**4.** Для решения задач рассматривают сечение *полуплоскостью, перпендикулярной боковой грани призмы и проходящей через высоту призмы, соединяющую центры окружностей, вписанных в основания.*



Радиус шара  $R_{\text{шара}}$ , высота призмы  $h_{\text{пр}}$  и радиус окружности  $r_{\text{окр}}$ , вписанной в основание призмы, связаны соотношением:

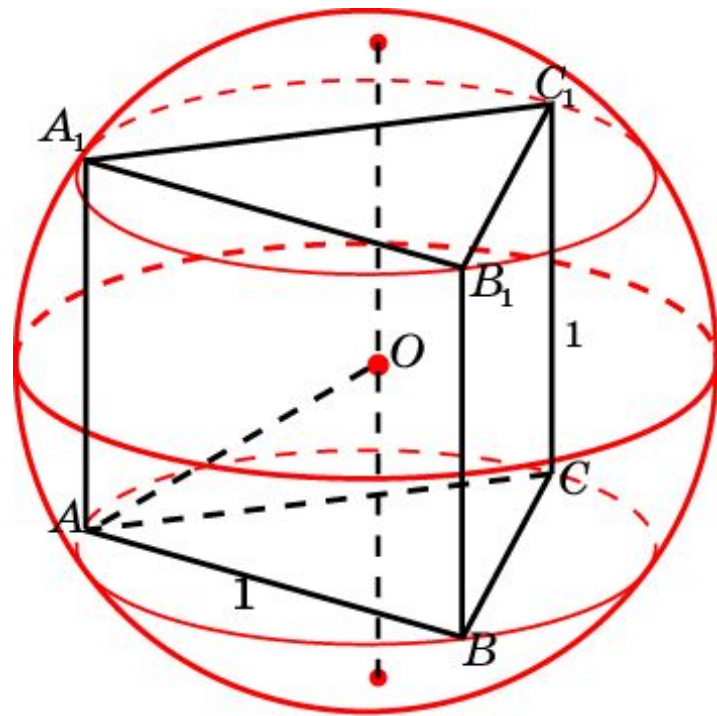
$$R_{\text{шара}} = r_{\text{окр}} = \frac{h_{\text{пр}}}{2}$$

# Призма и сфера, шар

**1.** Шар можно описать около призмы, если она прямая и ее основания являются многоугольниками, вписанными в окружность.

**2.** *Центр шара* лежит *на середине высоты призмы*, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы.

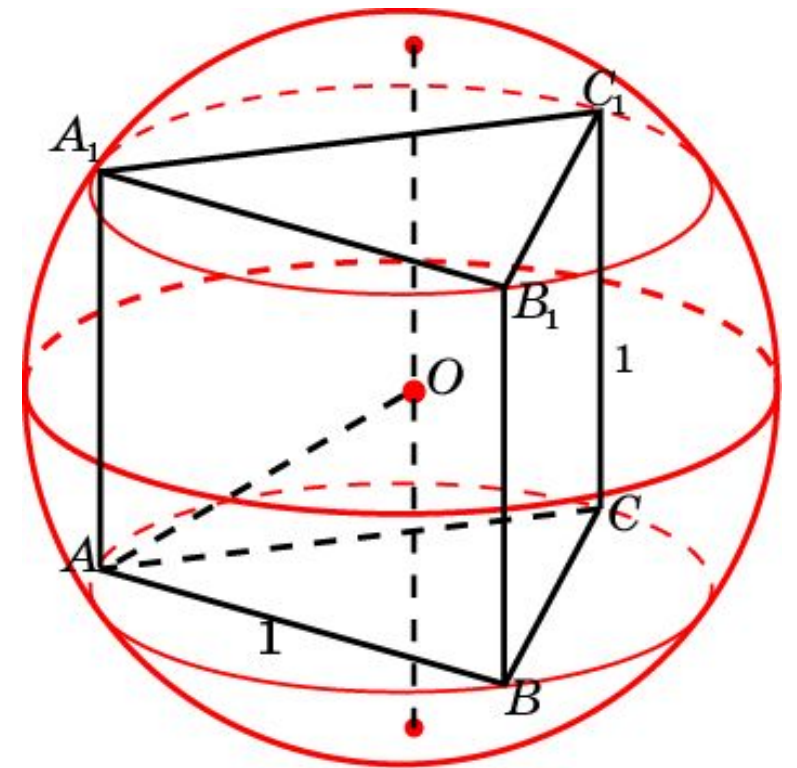
**3.** Для решения задач рассматривают сечение полуплоскостью, проходящей через центр шара и боковое ребро призмы.



# Призма и сфера, шар

Радиус шара  $R_{\text{шара}}$ , радиус окружности  $r_{\text{окр}}$  и высота призмы  $h_{\text{пр}}$  связаны соотношением:

$$R_{\text{шара}}^2 = \left(\frac{h_{\text{пр}}}{2}\right)^2 + r_{\text{окр}}^2$$



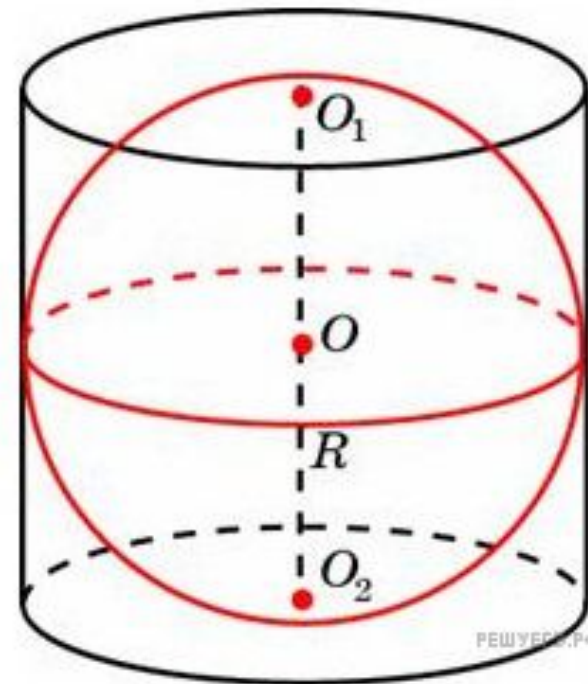


# Цилиндр и сфера, шар

1. Шар можно вписать **ТОЛЬКО** в такой цилиндр, **высота которого равна диаметру основания** (т.е. цилиндр – **равносторонний**).

2. Шар касается оснований цилиндра в **их центрах** и боковой поверхности цилиндра по окружности большого круга шара, параллельной основаниям цилиндра.

3. **Большой круг шара вписан в осевое сечение цилиндра** (т.е. в квадрат).



$$R_{\text{шара}} = r_{\text{цилиндра}}$$
$$2R_{\text{шара}} = h_{\text{цилиндр}}$$

# Цилиндр и сфера, шар

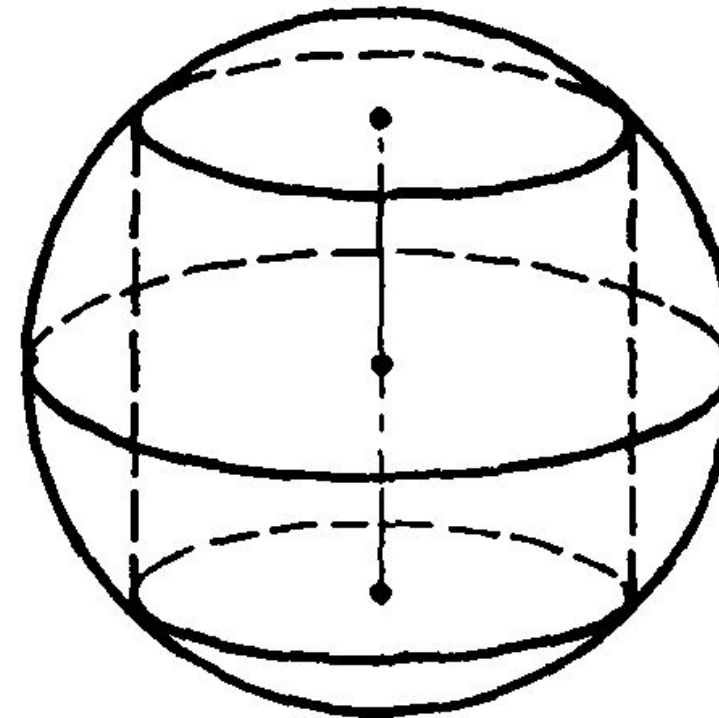
1. Шар можно описать около любого (*прямого кругового*) цилиндра.

2. Окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.

3. Центр шара лежит *на середине высоты*, проходящей через ось цилиндра.

**!!!4. *Осевое сечение цилиндра* (прямоугольник) *вписано в окружность с радиусом*, равным радиусу шара.**

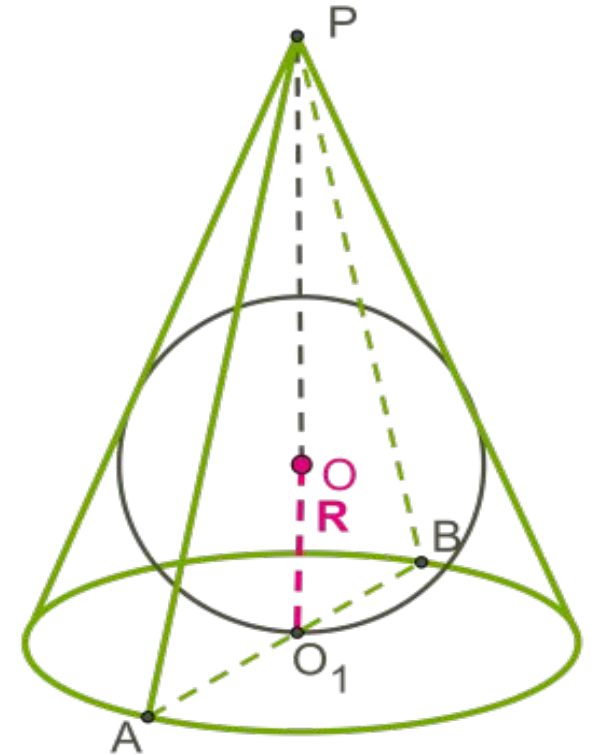
5. Радиус шара  $R_{\text{шара}}$ , радиус цилиндра  $r_{\text{цил}}$  и высота цилиндра  $h_{\text{цил}}$  связаны соотношением:



$$R_{\text{шара}}^2 = \left( \frac{h_{\text{цил}}}{2} \right)^2 + r_{\text{цил}}^2$$

# Конус и сфера, шар

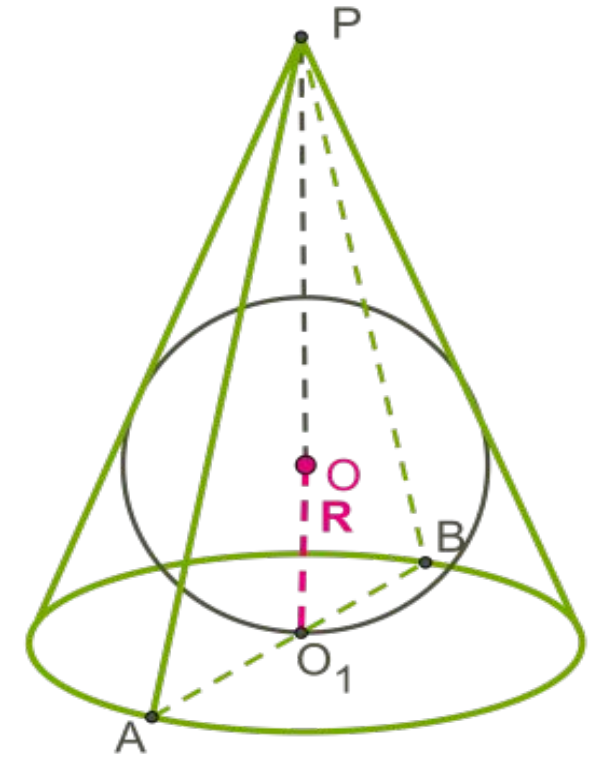
1. Шар можно вписать в любой конус.
2. Шар касается основания конуса в его центре и боковой поверхности конуса по окружности лежащей в плоскости, параллельной основанию конуса.
3. Центр шара лежит на оси конуса и *совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник*, являющийся **ОСЕВЫМ СЕЧЕНИЕМ** конуса.



# Конус и сфера, шар

Радиус шара  $R_{\text{шара}}$ , радиус конуса  $r_{\text{кон}}$  и высота конуса  $h_{\text{кон}}$  СВЯЗАНЫ СООТНОШЕНИЕМ:

$$\frac{R_{\text{шара}}}{h_{\text{кон}} - R_{\text{шара}}} = \frac{r_{\text{кон}}}{\sqrt{h_{\text{кон}}^2 + r_{\text{кон}}^2}}$$

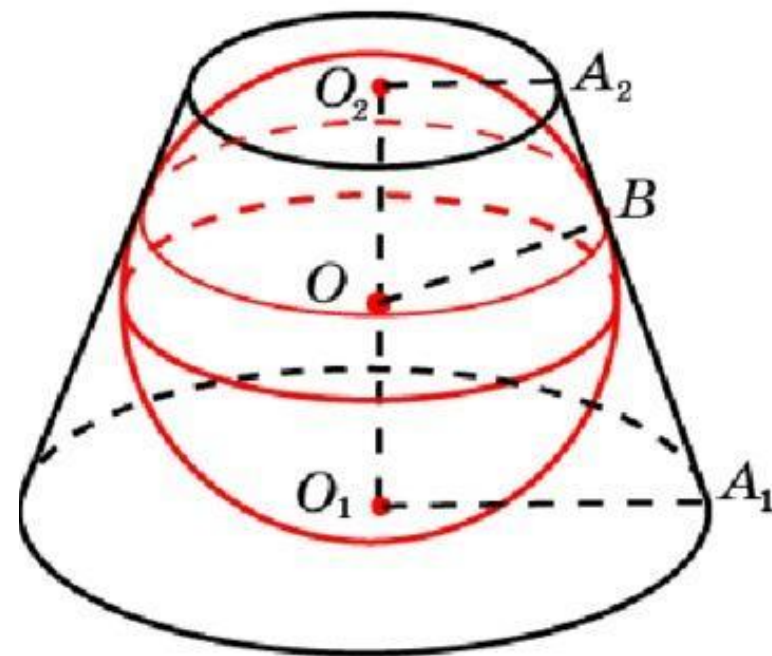


## Конус и сфера, шар

**!!!4.** В усеченный конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда сумма диаметров оснований равна удвоенной образующей конуса.

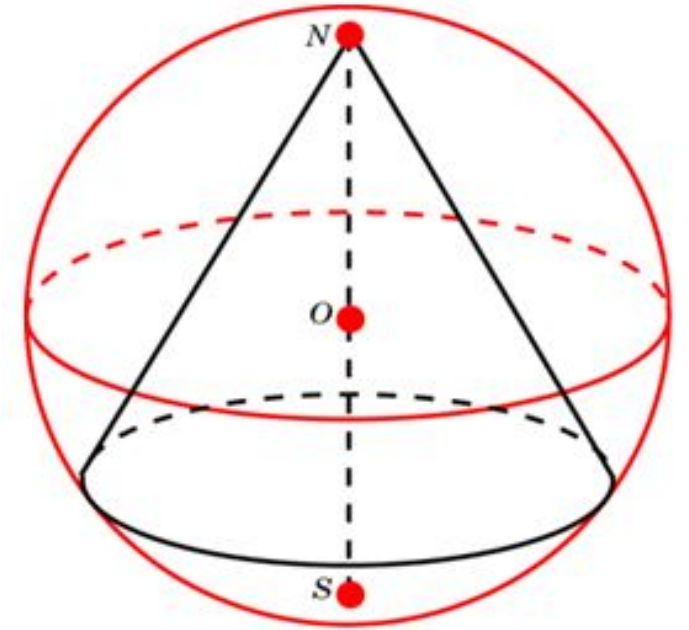
Ее **ЦЕНТР СОВПАДАЕТ** с центром окружности, *вписанной в осевое сечение* усеченного конуса.

*Радиус сферы равен радиусу этой окружности*



# Конус и сфера, шар

1. Шар можно описать около *любого конуса*.
2. *Окружность основания конуса и вершина конуса* лежат на поверхности шара.
3. *Центр шара* лежит *на оси конуса и совпадает с центром окружности*, описанной около *треугольника*, являющегося **ОСЕВЫМ СЕЧЕНИЕМ** конуса.



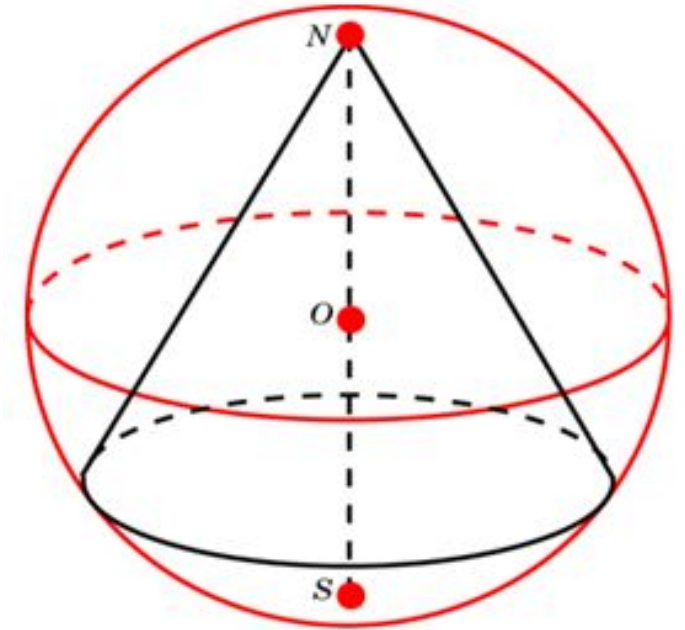
# Конус и сфера, шар

Радиус шара  $R_{\text{шара}}$ , радиус конуса  $r_{\text{кон}}$  и высота конуса  $h_{\text{кон}}$  СВЯЗАНЫ соотношением:

$$R_{\text{шара}}^2 = (h_{\text{кон}} - R_{\text{шара}})^2 + r_{\text{кон}}^2$$

!!! Это соотношение справедливо и в том случае, когда  $h_{\text{кон}} \leq R_{\text{шара}}$

---



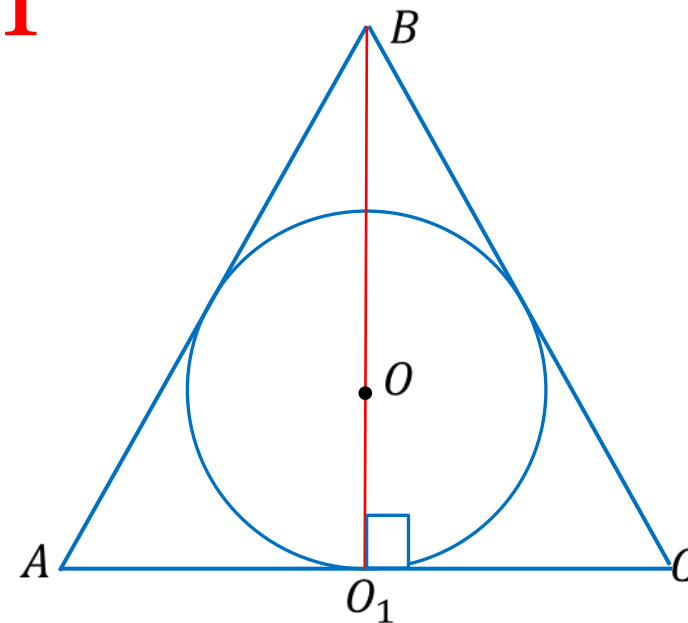
# Примеры ключевых задач

---



## КЛЮЧЕВАЯ ЗАДАЧА №1

*В конус с радиусом основания, равным 3 см, и высотой, равной 4 см, вписан шар. Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади поверхности шара.*



### РЕШЕНИЕ:

1. Проведем осевое сечение конуса. В сечении получим равнобедренный треугольник  $ABC$ , в который вписан большой круг шара с центром  $O$ , лежащим на высоте  $BO_1$  треугольника.

2.  $AB = BC = l$  как образующие,  $O_1C = 3$  см – радиус основания конуса. По

теореме Пифагора  $BC = \sqrt{BO_1^2 + O_1C^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  (см).

3. Для нахождения радиуса вписанного в  $\triangle ABC$  круга воспользуемся формулой  $S = pr$ , где  $p$  – полупериметр треугольника,  $S$  – его площадь.  $p_{ABC} = BC + O_1C = 5 + 3 = 8$  (см).

4.  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO_1 = O_1C \cdot BO_1 = 3 \cdot 4 = 12$  (см<sup>2</sup>). Радиус шара  $r = \frac{S}{p} = \frac{3}{2}$  (см).

5. Площадь поверхности шара  $S_{\text{ш}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$  (см<sup>2</sup>).

6. Площадь боковой поверхности конуса  $S_{\text{бок}} = \pi O_1C \cdot l = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$  (см<sup>2</sup>).

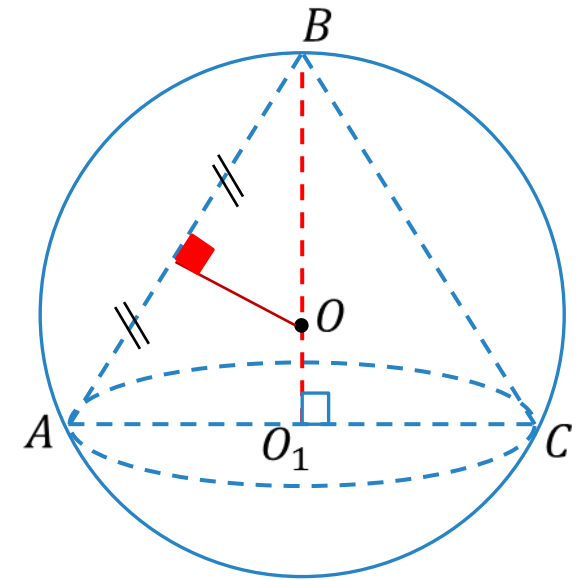
---

$$7. \frac{S_{\text{бок кон}}}{S_{\text{ш}}} = \frac{15\pi}{9\pi} = 5:3.$$

**Ответ:** 5:3.

## КЛЮЧЕВАЯ ЗАДАЧА №2

*Шар радиуса 6 описан около конуса. Высота конуса равна 8. Найдите площадь боковой поверхности конуса.*



### РЕШЕНИЕ:

1. Пусть  $O_1$  — центр основания конуса,  $O$  — центр описанного шара, который лежит на высоте  $BO_1$  конуса. Проведя секущую плоскость через ось конуса, получим в сечении большой круг шара и вписанный в него равнобедренный треугольник  $ABC$  — осевое сечение конуса, где  $AB = BC = l$  как образующие конуса,  $r = O_1C$  — радиус основания конуса. Центр  $O$  описанного круга лежит на высоте  $BO_1$  треугольника.

2. Площадь боковой поверхности конуса  $S_{\text{бок}} = \pi r l$ .

3. Радиус  $R$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен радиусу шара, описанного около конуса.

## КЛЮЧЕВАЯ ЗАДАЧА №2

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров  $MO$  и  $BO_1$  к сторонам треугольника  $ABC$ .  $BO = 6$ ,  $BO_1 = 8$ .

Из подобия прямоугольных треугольников  $BMO$  и  $BO_1A$  (по острому углу)

$$\frac{BM}{BO} = \frac{BO_1}{AB}; \frac{BM}{6} = \frac{8}{2BM}; BM = \sqrt{24}, AB = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}.$$

4. Из  $\triangle BO_1A$   $AO_1 = \sqrt{AB^2 - BO_1^2} = \sqrt{4 \cdot 24 - 64} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ .

5. Радиус конуса  $AO_1 = r = 4\sqrt{2}$ ,  $AB = l = 4\sqrt{6}$ .

6. Площадь боковой поверхности конуса  $S_{бок} = \pi r l = \pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6} = 32\sqrt{3}\pi$ .

**Ответ:**  $32\sqrt{3}\pi$ .