Комбинации многогранников и тел вращения

ШАР И МНОГОГРАННИК

Определение 1. Шар называется ***вписанным*** в многогранник, если он ***касается*** *всех его* ***граней***.

Определение 2. Шар называется ***описанным*** около многогранника, если ***все вершины*** многогранника ***лежат*** *на поверхности шара*.

!!!ЗАПОМНИ Если ***шар*** можно ***вписать*** в параллелепипед или ***описать*** около него, то центр шара находится в точке пересечения диагоналей параллелепипеда.

Определение 3. Шар (сфера) называется ***вписанным*** в цилиндр, если он ***касается*** оснований цилиндра и всех его образующих по окружности ***большого*** круга.

ШАР И МНОГОГРАННИК

Определение 4. Шар (сфера) называется ***описанным*** около цилиндра, если окружности оснований цилиндра касаются поверхности шара (сферы).

ЗАМЕЧЕНИЕ. И в том и в другом случае ось цилиндра проходит через центр шара.

Определение 5. Шар (сфера) называется ***вписанным*** в конус, если он касается основания конуса и всех его образующих.

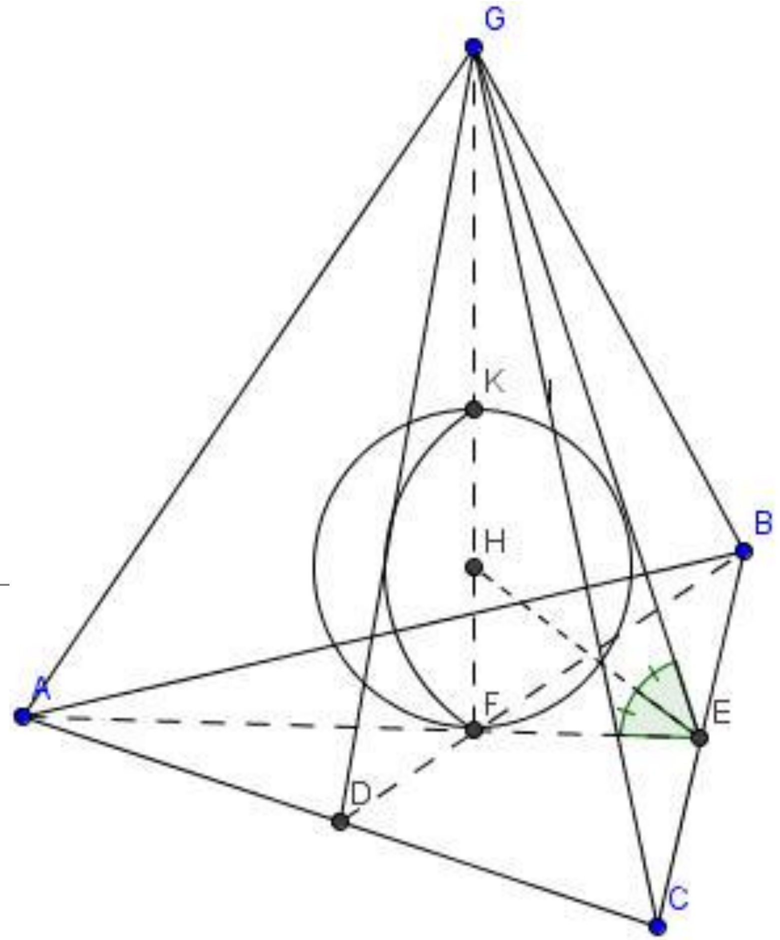
Определение 6. Шар (сфера) называется ***описанным*** около конуса, если окружность основания конуса и его вершина лежат на поверхности шара (на сфере).

ЗАМЕЧЕНИЕ. И в том и в другом случае ось конуса проходит через центр шара (сферы).

Правильная треугольная пирамида и сфера, шар

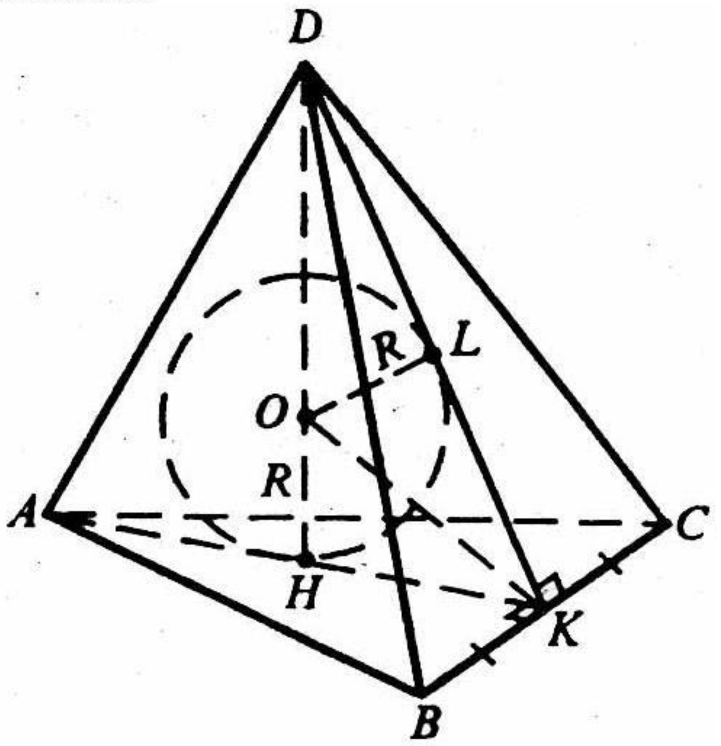
1. В **любую** правильную пирамиду можно **вписать** шар.

2. Шар касается основания в его центре, а боковых граней – в точках, лежащих на **апофемах**.



Правильная треугольная пирамида и сфера, шар

3. Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит **на пересечении *высоты пирамиды*** и ***биссектрисы угла***, образованного *апофемой* и ее *проекцией* на основание.



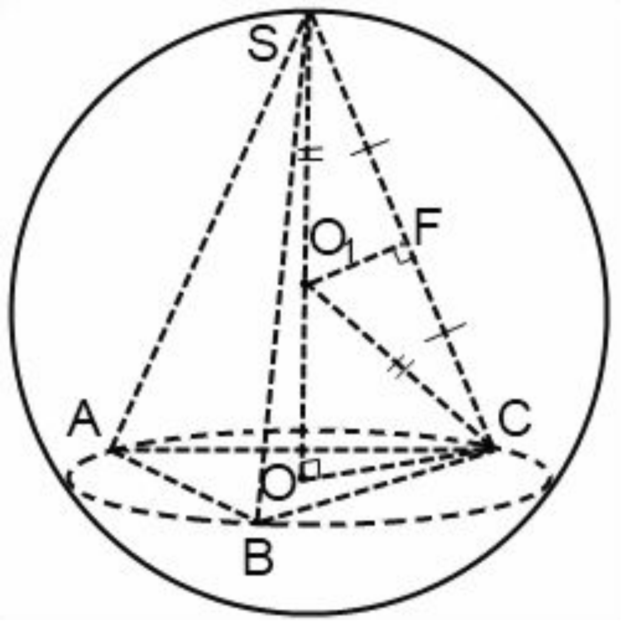
Ключевая пропорция:

$$\boxed{\frac{r_{\text{шара}}}{h_{\text{пир-ды}} - r_{\text{шара}}} = \frac{HK}{DK},}$$

$HK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, где a – сторона основания пирамиды, DK – апофема пирамиды. *HK - проекция апофемы, равная $\frac{1}{3}$ высоты основания пирамиды.*

Правильная треугольная пирамида и сфера, шар

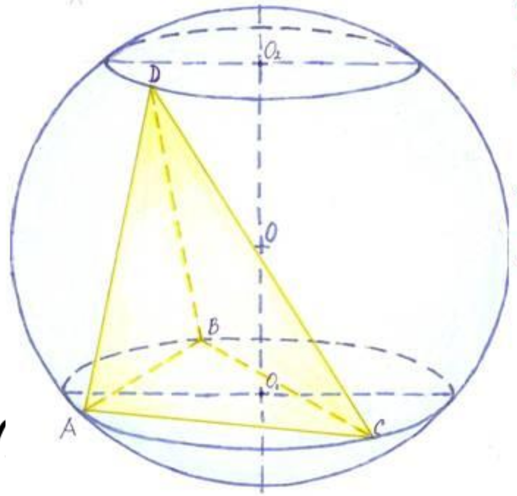
1. Основание высоты правильной пирамиды **совпадает** с центром ***описанной около основания окружности***.



2. Центр шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, лежит **на пересечении *высоты пирамиды*** (или ее продолжении) и ***серединного перпендикуляра к ребру пирамиды***, проведенного в плоскости, образованной этим ребром и высотой пирамиды.

Правильная треугольная пирамида и сфера, шар

3. Найдя центр шара, рассматриваем *подобие прямоугольных треугольников*.



Ключевая пропорция:

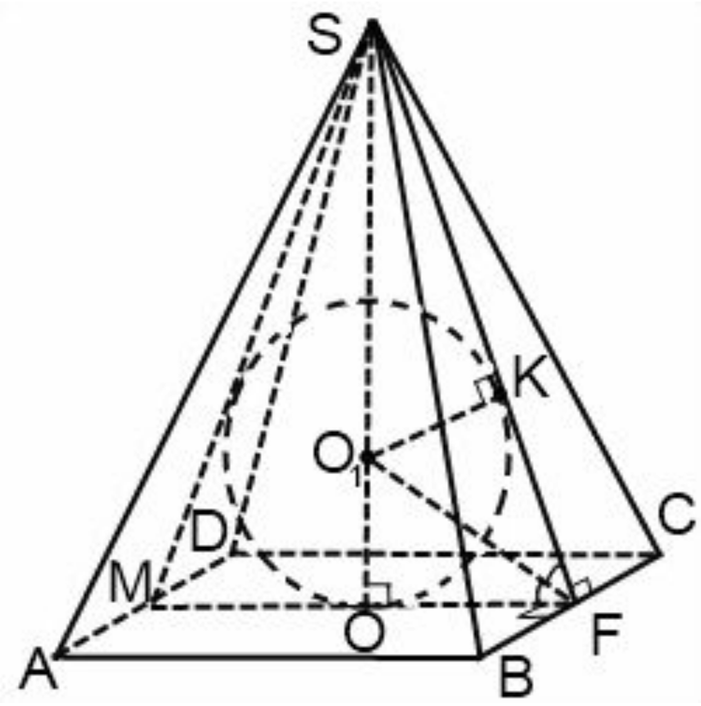
$$\frac{\frac{b_{\text{бок ребр пир}}}{2}}{R_{\text{шара}}} = \frac{h_{\text{пир-ды}}}{b_{\text{бок ребр пир}}},$$

Если боковое ребро ***правильной треугол*** ***пирамиды*** равно b, а сторона основания пирамиды – a, тогда радиус описанного шара можно найти по формуле:

$$\boxed{R = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{3}}}}$$

Правильная четырехугольная пирамида и сфера, шар

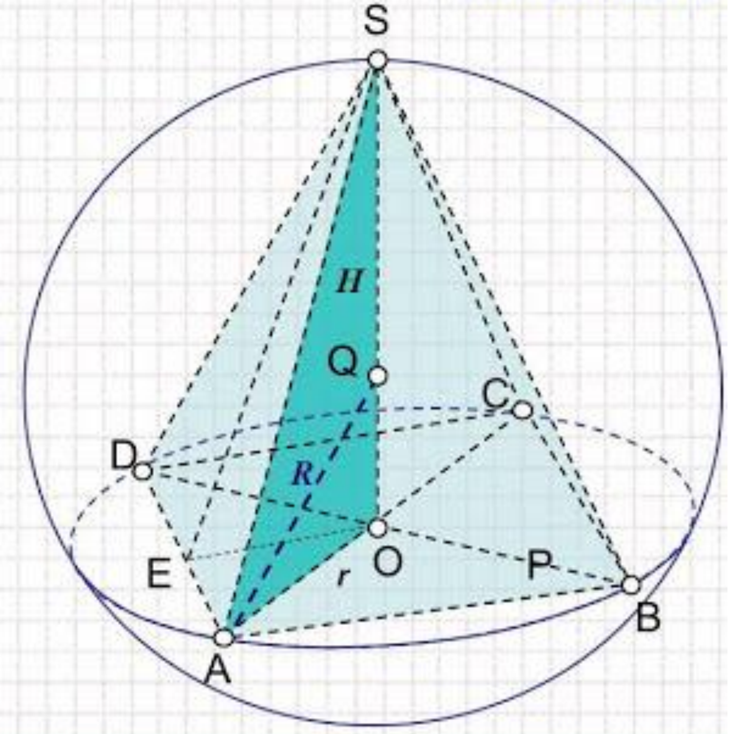
1. **Радиус шара**, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, **равен радиусу окружности**, вписанной в ***равнобедренный треугольник***, где боковые стороны – апофемы пирамиды, а основание – сторона основания пирамиды.



2. Для нахождения радиуса сферы можно воспользоваться следующая формула: $\boxed{S = pr}$

Правильная четырехугольная пирамида и сфера, шар

1. ***Радиус сферы***, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, ***равен радиусу окружности***, описанной около ее ***диагонального сечения***.



2. ***Диагональное сечение*** четырехугольной пирамиды – **РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК**, где основание – диагональ квадрата, а боковые стороны – боковые ребра пирамиды.

Правильная четырехугольная пирамида и сфера, шар

3. Для нахождения радиуса **сферы**, равного радиусу окружности, описанного около диагонального сечения можно воспользоваться следующими формулами:

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R,$$

где b – любая сторона треугольника, β – противолежащий этой стороне угол.

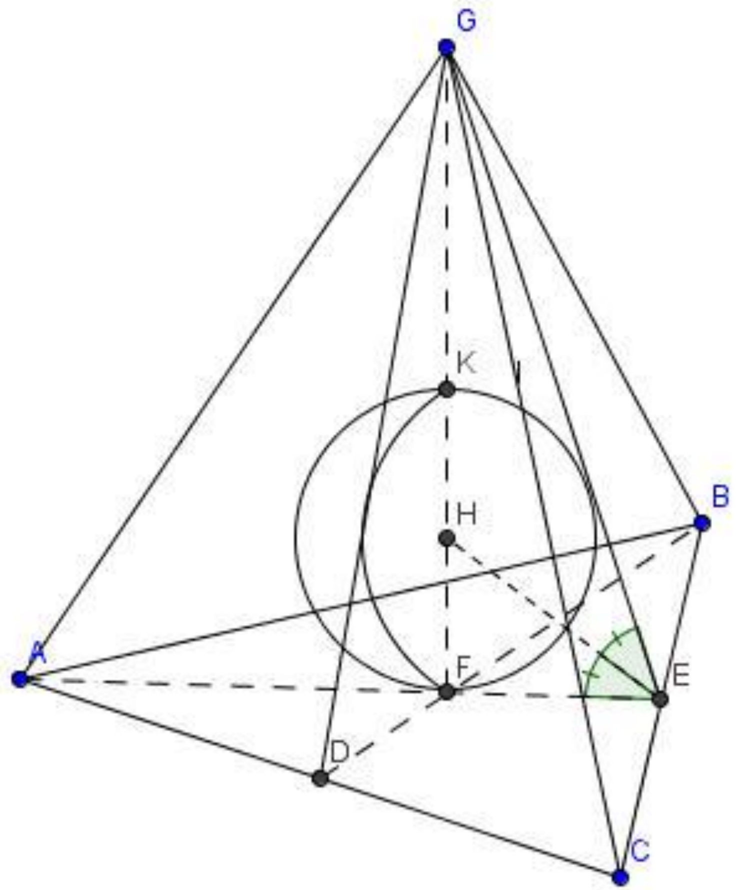
$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

ИЛИ можно провести серединный перпендикуляр к боковой стороне до пересечения с высотой равнобедренного треугольника и воспользоваться подобием прямоугольных треугольников (малого с гипотенузой R и большого с гипотенузой = боковой стороне равнобедренного треугольника).

Произвольная пирамида и сфера, шар

1. Шар, вписанный в многогранник, касается ***граней всех двугранных углов*** этого многогранника.

2. Центр шара, вписанного в пирамиду лежит на пересечении биссекторных полуплоскостей всех ее двугранных углов.



$$\boxed{r = \frac{3V}{S},}$$

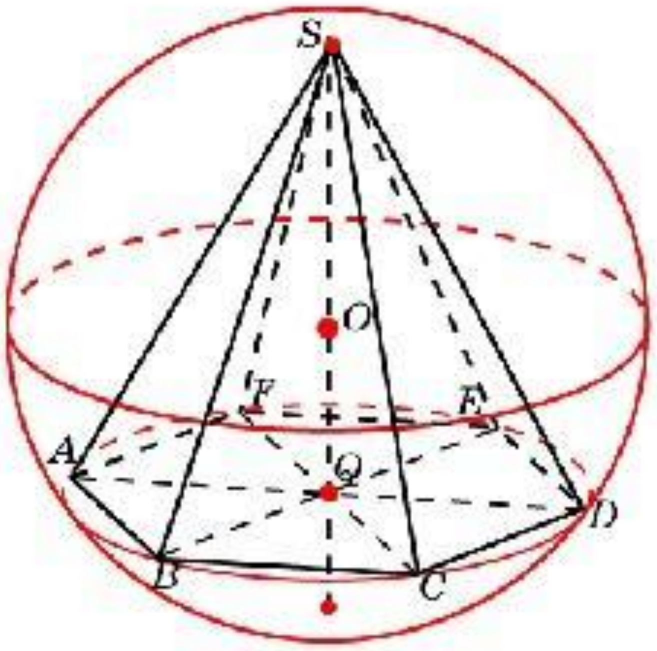
где V – объем данной пирамиды, S – площадь полной поверхности пирамиды.

Произвольная пирамида и сфера, шар

1. Около ***любой треугольной*** пирамиды (тетраэдра) можно описать шар (сферу).

2. Около произвольной n- угольной пирамиды можно описать шар, **если** ***около ее основания*** можно ***описать окружность*** и наоборот.

3. Центр шара, описанного около пирамиды, лежат на прямой, ***перпендикулярной*** основанию и проходящей через центр окружности, описанной около основания.



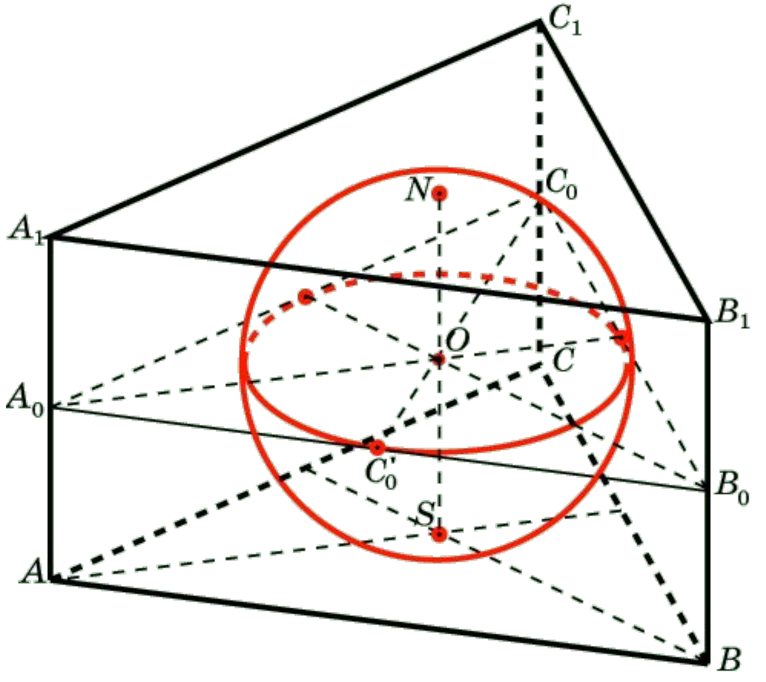
4. Около произвольной n- угольной пирамиды можно описать шар, если ее боковые ребра равны.

5. Около произвольной n- угольной пирамиды можно описать шар, если ее боковые ребра равно наклонены к основанию.

Призма и сфера, шар

1. Шар можно вписать в прямую призму, ЕСЛИ ее основания являются многоугольниками, описанными около окружности, а ***высота призмы равна диаметру*** этой окружности.

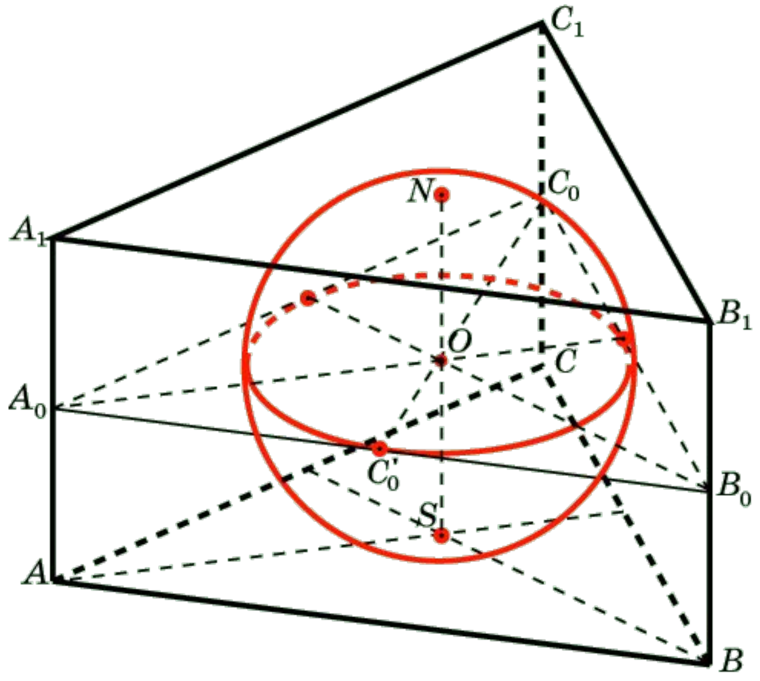
2. ***Радиус вписанного шара равен радиусу*** этой ***окружности***.



3. Центр шара лежит на середине высоты призмы, соединяющей центры окружностей, вписанных с основания призмы.

Призма и сфера, шар

4. Для решения задач рассматривают *сечение полуплоскостью, перпендикулярной боковой грани призмы и проходящей через высоту призмы, соединяющую центры окружностей, вписанных в основания*.

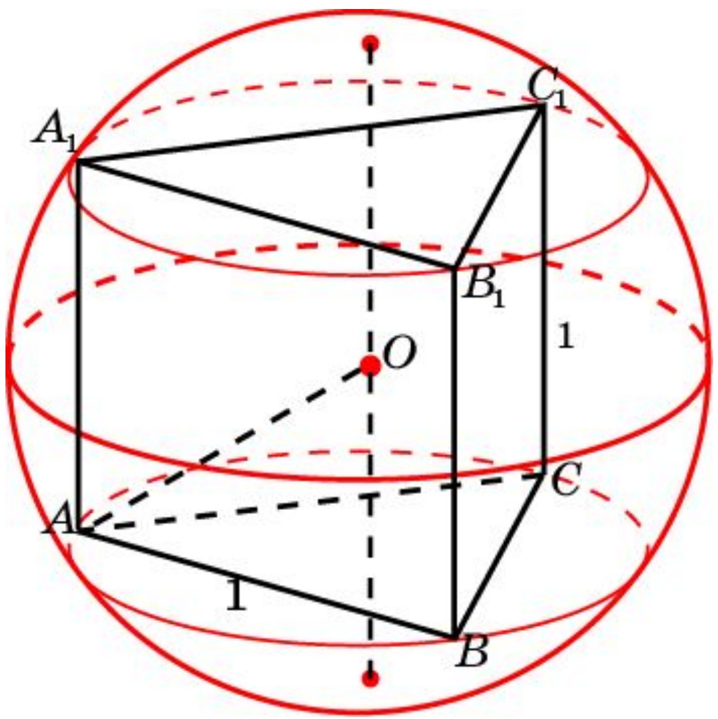


Радиус шара $R_{\text{шара}}$, высота призмы $h_{\text{пр}}$ и радиус окружности $r_{\text{окр}}$, вписанной в основание призмы, связаны соотношением:

$$\boldsymbol{R_{\text{шара}} = r_{\text{окр}} = \frac{h_{\text{пр}}}{2}}$$

Призма и сфера, шар

1. Шар можно описать около призмы, если она прямая и ее основания являются многоугольниками, в писанными в окружность.



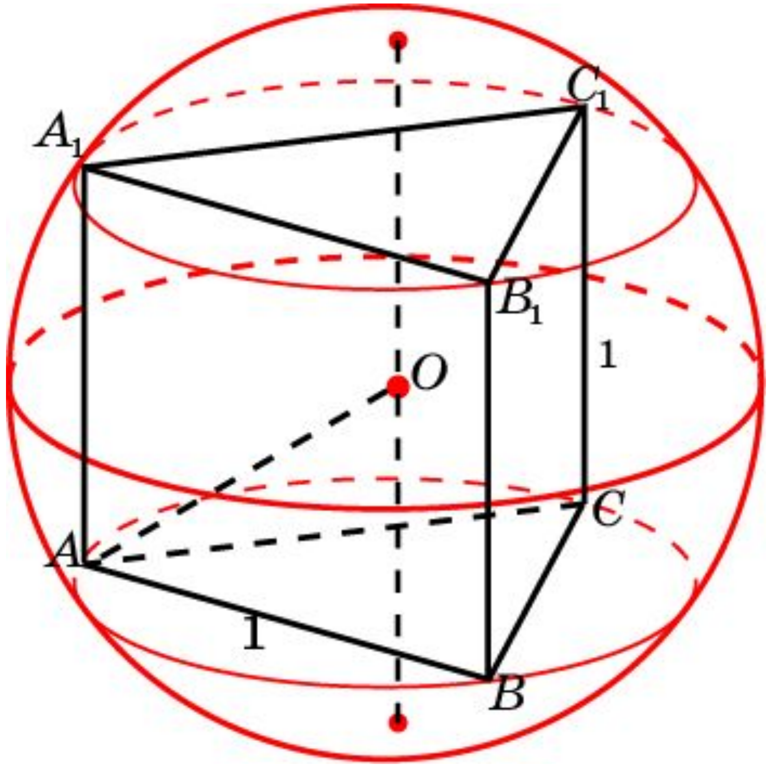
2. ***Центр шара*** лежит ***на середине высоты призмы***, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы.

3. Для решения задач рассматривают *сечение полуплоскостью, проходящей через центр шара и боковое ребро* призмы.

Призма и сфера, шар

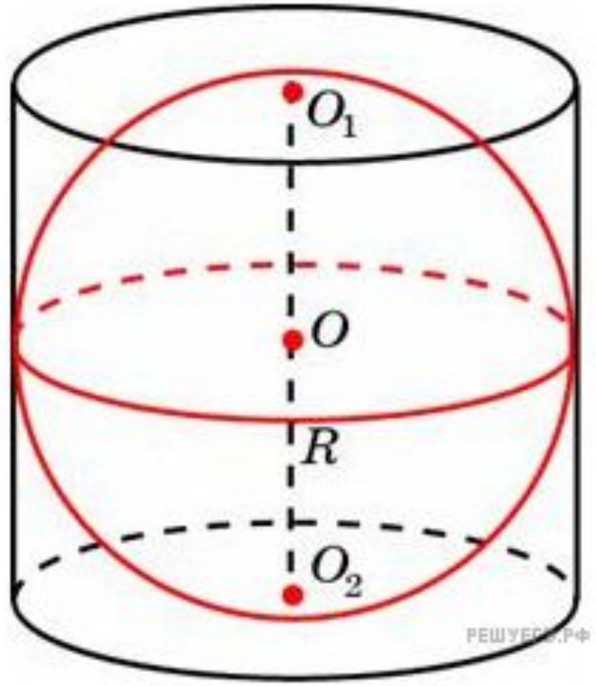
Радиус шара $R_{\text{шара}}$, радиус окружности $r_{\text{окр}}$ и высота призмы $h_{\text{пр}}$ связаны соотношением:

$$\boldsymbol{R}_{\text{шара}}^2 = \left(\frac{\boldsymbol{h}_{\text{пр}}}{2}\right)^2 + \boldsymbol{r}_{\text{окр}}^2$$



Цилиндр и сфера, шар

1. Шар можно вписать **ТОЛЬКО** в такой цилиндр , ***высота которого равна диаметру основания*** *(т.е. цилиндр – равносторонний).*



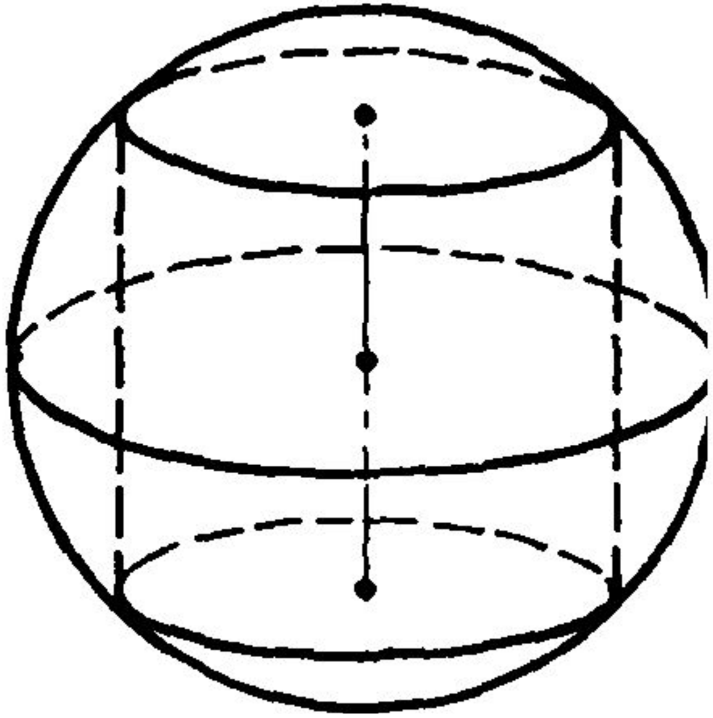
2. Шар касается оснований цилиндра в ***их центрах*** и боковой поверхности цилиндра по окружности большого круга шара, параллельной основаниям цилиндра.

3. ***Большой круг шара вписан в осевое сечение цилиндра*** (т.е. в квадрат).

$$R_{\text{шара}} = r_{\text{цилиндра}}$$

$$2R_{\text{шара}} = h_{\text{цилиндр}}$$

Цилиндр и сфера, шар



1. Шар можно описать около любого (***прямого кругового***) цилиндра.

2. Окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.

3. Центр шара лежит ***на середине высоты***, проходящей через ось цилиндра.

!!!4. ***Осевое сечение цилиндра*** (прямоугольник) ***вписано в окружность с радиусом***, равным радиусу шара.

5. Радиус шара $R_{\text{шара}}$, радиус цилиндра $r_{\text{цил}}$ и высота цилиндра $h_{\text{цил}}$ связаны соотношением:

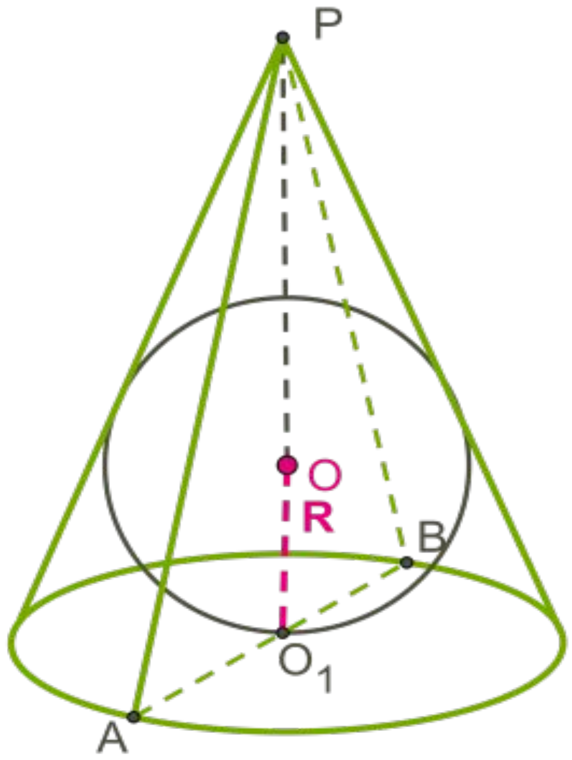
$$\boxed{R_{\text{шара}}^2 = \left(\frac{h_{\text{цил}}}{2}\right)^2 + r_{\text{цил}}^2}$$

Конус и сфера, шар

1. Шар можно вписать в любой конус.

2. Шар касается основания конуса в его центре и боковой поверхности конуса по окружности лежащей в плоскости, параллельной основанию конуса.

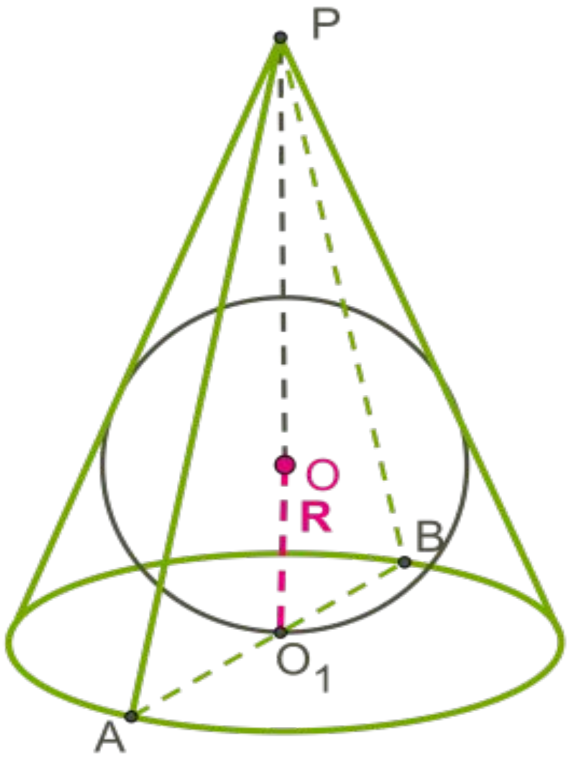
3. Центр шара лежит на оси конуса и ***совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник***, являющийся **ОСЕВЫМ СЕЧЕНИЕМ** конуса.



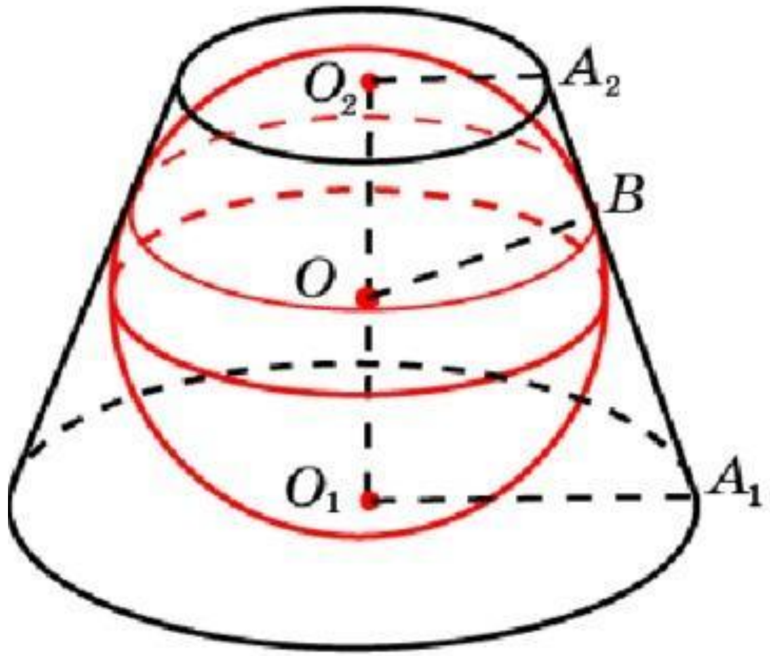
Конус и сфера, шар

Радиус шара $R_{\text{шара}}$, радиус конуса $r_{\text{кон}}$ и высота конуса $h_{\text{кон}}$ связаны соотношением:

$$\frac{R_{\text{шара}}}{h_{\text{кон}} - R_{\text{шара}}} = \frac{r_{\text{кон}}}{\sqrt{h_{\text{кон}}^2 + r_{\text{кон}}^2}}$$



Конус и сфера, шар



!!!4. В **усеченный конус** можно ***вписать сферу*** тогда и только тогда, когда сумма диаметров оснований равна удвоенной образующей конуса.

Ее **ЦЕНТР СОВПАДАЕТ** с центром окружности, ***вписанной в осевое сечение*** усеченного конуса.

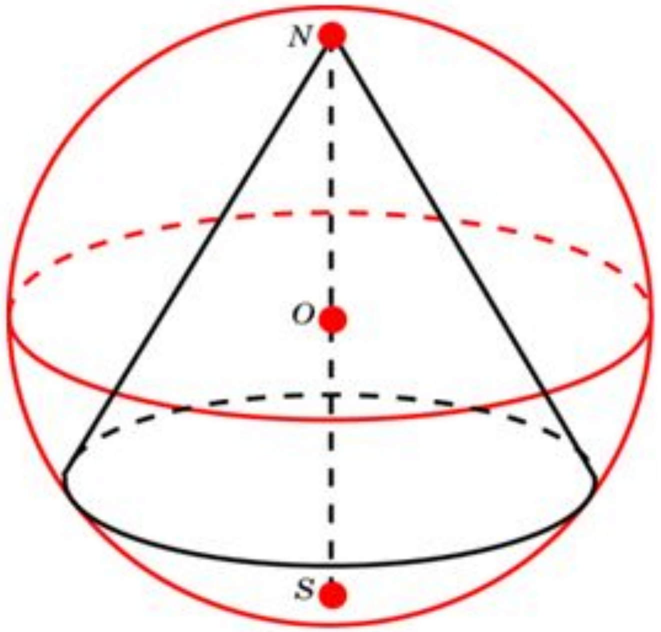
Радиус сферы равен радиусу этой окружности

Конус и сфера, шар

1. Шар можно описать около ***любого конуса.***

2. ***Окружность основания конуса и вершина конуса*** лежат на поверхности шара.

3. ***Центр шара*** лежит ***на оси конуса и совпадает с центром окружности***, описанной около треугольника, являющегося **ОСЕВЫМ СЕЧЕНИЕМ** конуса.

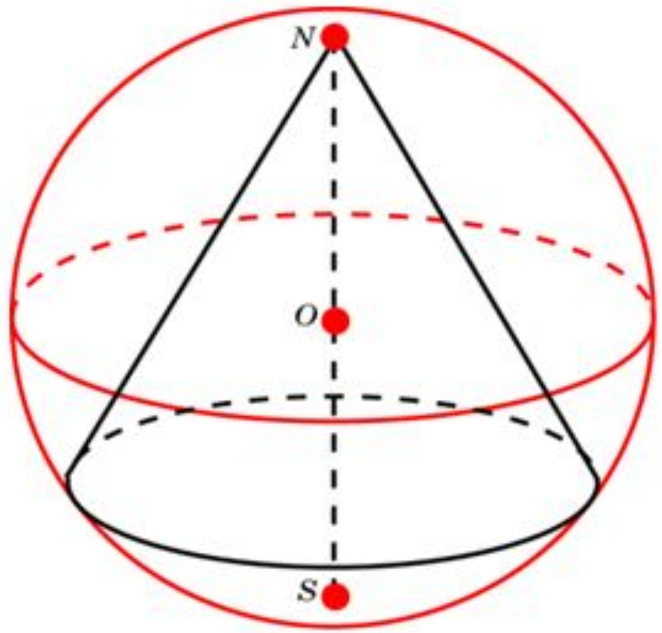


Конус и сфера, шар

Радиус шара $R_{\text{шара}}$, радиус конуса $r_{\text{кон}}$ и высота конуса $h_{\text{кон}}$ связаны соотношением:

$$\boxed{R_{\text{шара}}^2 = \left(h_{\text{кон}} - R_{\text{шара}}\right)^2 + r_{\text{кон}}^2}$$

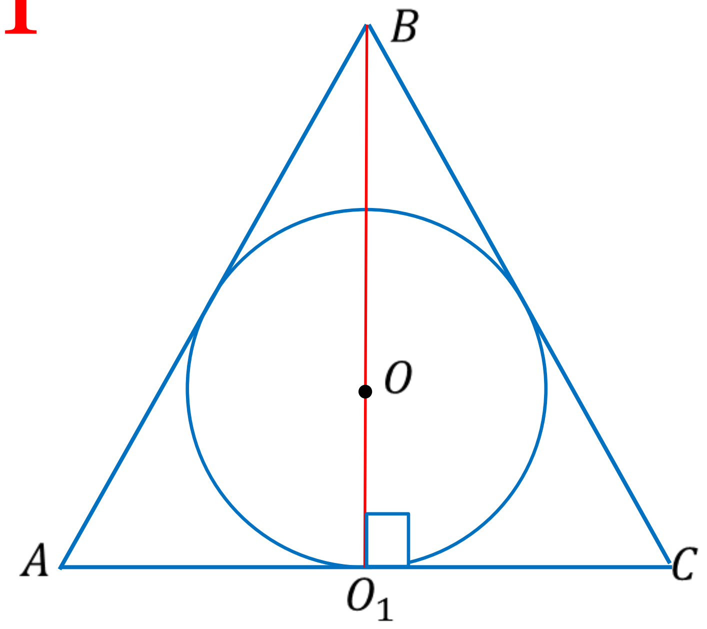
!!! Это соотношение справедливо и в том случае, когда $h_{\text{кон}} \leq R_{\text{шара}}$



Примеры ключевых задач

КЛЮЧЕВАЯ ЗАДАЧА №1

В конус с радиусом основания, равным 3 см, и высотой, равной 4 см, вписан шар. Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади поверхности шара.



РЕШЕНИЕ:

1. Проведем осевое сечение конуса. В сечении получим равнобедренный треугольник ABC, в который вписан большой круг шара с центром O, лежащим на высоте BO_1 треугольника.
2. $AB = BC = l$ как образующие, $O_1C = 3$ см – радиус основания конуса. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{{BO_1}^2 + O_1C^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

3. Для нахождения радиуса вписанного в $\triangle ABC$ круга воспользуемся формулой $S = pr$, где $p -$ полупериметр треугольника, $S -$ его площадь. $p_{ABC} = BC + O_1C = 5 + 3 = 8$ (см).

4. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO_1 = O_1C \cdot BO_1 = 3 \cdot 4 = 12$ (см^2). Радиус шара $r = \frac{S}{p} = \frac{3}{2}$ (см).

5. Площадь поверхности шара $S_ш = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$ (см^2).

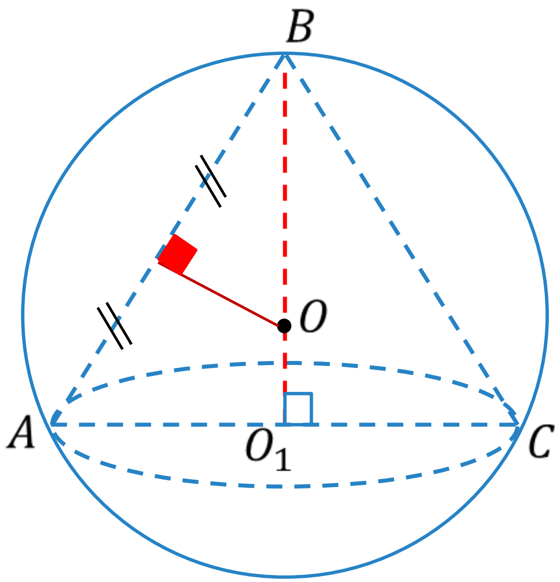
6. Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок} = \pi O_1C \cdot l = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$ (см^2).

7. $\frac{S_{бок\ кон}}{S_ш} = \frac{15\pi}{9\pi} = 5:3.$

Ответ: $5:3$.

КЛЮЧЕВАЯ ЗАДАЧА №2

Шар радиуса 6 описан около конуса. Высота конуса равна 8. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



РЕШЕНИЕ:

1. Пусть $O_1 -$ центр основания конуса, $O -$ центр описанного шара, который лежит на высоте BO_1 конуса. Проведя секущую плоскость через ось конуса, получим в сечении большой круг шара и вписанный в него равнобедренный треугольник $ABC -$ осевое сечение конуса, где $AB = BC = l$ как образующие конуса, $r = O_1C -$ радиус основания конуса. Центр O описанного круга лежит на высоте BO_1 треугольника.

2. Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок} = \pi rl$.

3. Радиус R окружности, описанной около треугольника ABC, равен радиусу шара, описанного около конуса.

КЛЮЧЕВАЯ ЗАДАЧА №2

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров MO и BO_1 к сторонам треугольника $ABC. BO = 6, BO_1 = 8$.

Из подобия прямоугольных треугольников BMO и BO_1A (по острому углу)

$\frac{BM}{BO} = \frac{BO_1}{AB}$; $\frac{BM}{6} = \frac{8}{2BM}$; $BM = \sqrt{24}, AB = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$.

4. Из ΔBO_1A $AO_1 = \sqrt{AB^2 - {BO_1}^2} = \sqrt{4 \cdot 24 - 64} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

5. Радиус конуса $AO_1 = r = 4\sqrt{2}, AB = l = 4\sqrt{6}$.

6. Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок} = \pi r l = \pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6} = 32\sqrt{3}\pi$.

Ответ: $32\sqrt{3}\pi$.