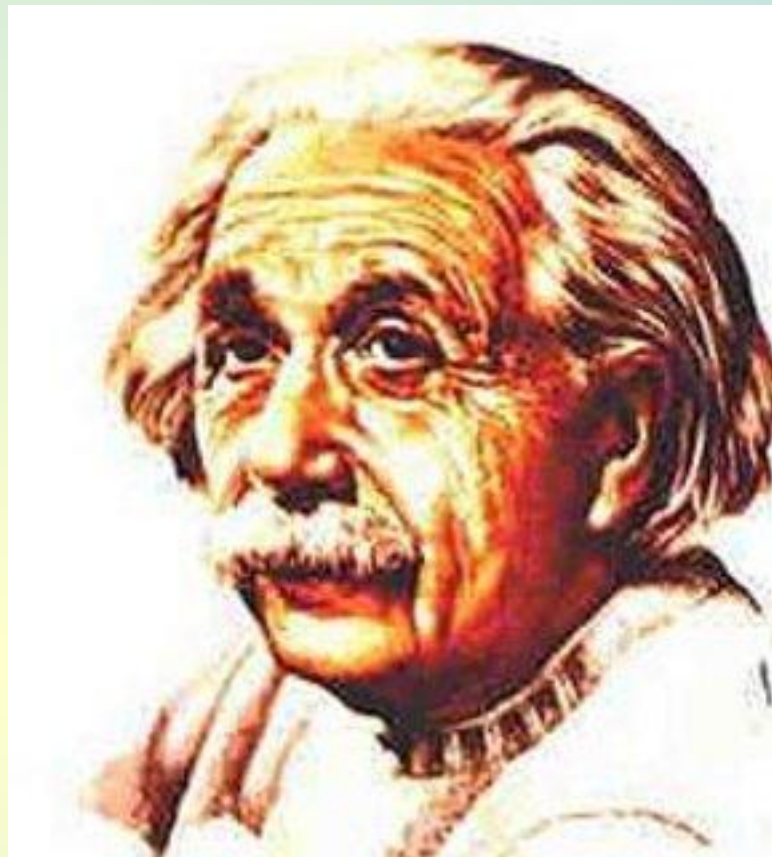


# Решение показательных неравенств



**« Мне приходится делить  
своё время между  
политикой и решением  
уравнений и неравенств .  
Однако решение уравнений  
и неравенств , по-моему,  
гораздо важнее , потому  
что политика существует  
только для данного  
момента , а уравнения и  
неравенства будут  
существовать вечно .»**



**Альберт Эйнштейн**

## Определение 1:

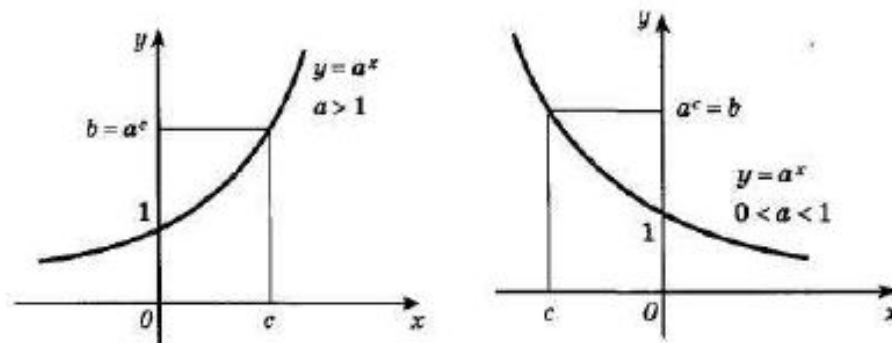
Неравенство, содержащее неизвестную в показателе степени, называется **показательным неравенством**.

## Определение 2:

Неравенство в и д а  $a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$

называется **простейшим показательным неравенством**.

- Решение показательных неравенств основано на строгой монотонности показательной функции. Известно, что
  - при основании, большем единицы, показательная функция возрастает,
  - при положительном основании, меньшем единицы, показательная функция убывает.



- Неравенство вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

в зависимости от основания эквивалентно следующему:

- при  $a > 1$   $f(x) > g(x)$ ;
- при  $0 < a < 1$   $f(x) < g(x)$ .
- Неравенство вида

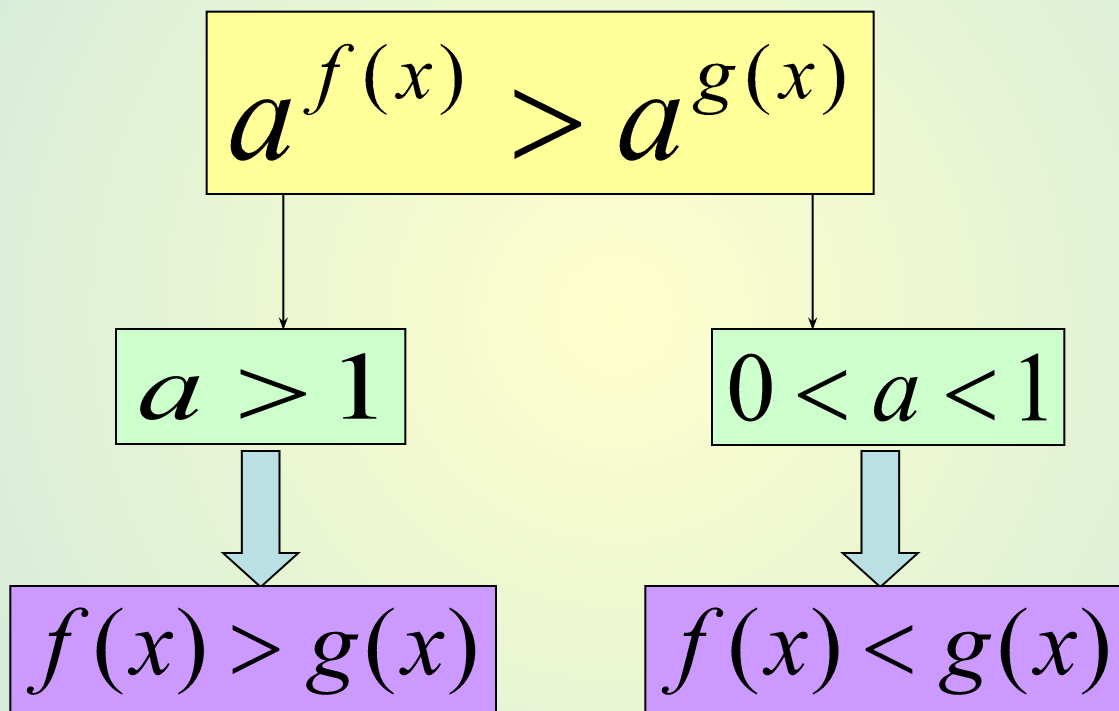
$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

эквивалентно следующему неравенству:

- при  $a > 1$   $f(x) < g(x)$ ;
- при  $0 < a < 1$   $f(x) > g(x)$ .

# Решение простейших показательных неравенств

$$a > 0, a \neq 1$$



Знак неравенства

Сохраняется

Меняется

# Что нужно учесть при решении показательных неравенств ?

**1. Привести основания степени к  
одинаковому основанию**

**2. Использовать свойства монотонной  
функции**



### Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

т.к. функция  $y = 2^t$  монотонно  
возрастает на  $\mathbb{R}$ , то

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

Ответ:  $(5; +\infty)$

### Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

т.к. функция  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

монотонно убывает на  $\mathbb{R}$ , то

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

Ответ:  $(2; +\infty)$



### Пример 3

$$0,5^{x^2-3x} \leq 0,5^{3x-8}$$

т.к. функция  $y = (0,5)^t$

монотонно убывает на  $\mathbb{R}$ , то

$$x^2 - 3x \geq 3x - 8$$

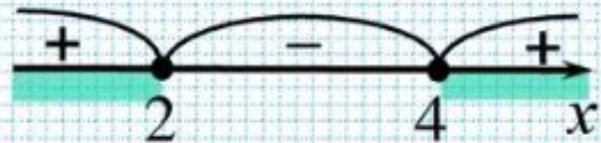
$$x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

н.ф.:  $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

Ответ:  $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$





## Пример 4

Решить неравенство:

$$2^x < \frac{1}{8}$$

**Решение:**

$$2^x < \frac{1}{8}$$

Поскольку  $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ , то

$2^x < 2^{-3}$ , т.к.  $2 > 1$ , функция  $y = 2^t$  - возрастает

$$x < -3$$

## Пример 5

$$2^{x^2} > 2^{x+2}$$

**Решение:**

$$2^{x^2} > 2^{x+2}$$

$x^2 > x + 2$ , т.к.  $2 > 1$  функция  $y = 2^t$  возрастает

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$x < -1, x > 2$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

**Ответ:**  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

## Пример 6

Решить неравенство:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+10} \geq \frac{16}{81}$ .

*Решение.* Неравенство переписывается в виде:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+10} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

Функция  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  монотонно убывает, поэтому неравенство  $\left(\frac{2}{3}\right)^a \geq \left(\frac{2}{3}\right)^b$  эквивалентно неравенству  $a \leq b$ . Основание степени отбрасывается с изменением знака неравенства:

$$x^2 - 5x + 10 \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x \leq 3.$$

*Ответ:*  $[2; 3]$ .



## ***Пример 7***