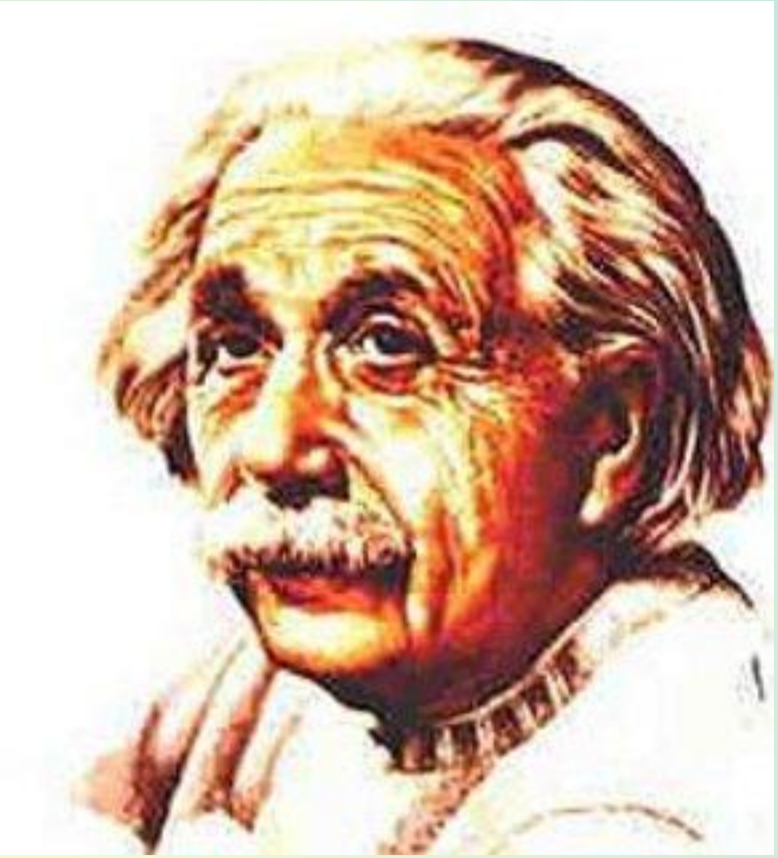
Решение показательных неравенств

« Мне приходится делить своё время между политикой и решением уравнений и неравенств . Однако решение уравнений и неравенств , по-моему, гораздо важнее , потому что политика существует только для данного момента , а уравнения и неравенства будут существовать вечно .»



Альберт Эйнштейн

Определение 1:

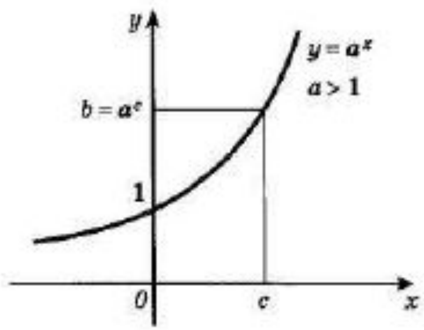
Неравенство, содержащее неизвестную в показателе степени, называется **показательным неравенством.**

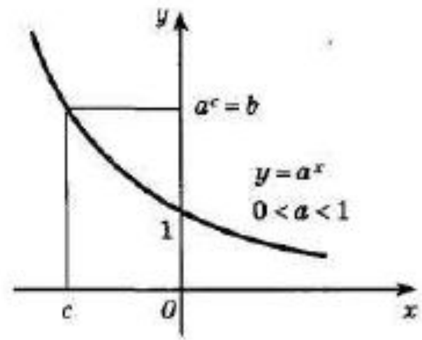
Определение 2:

Неравенство в и д а $a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$

называется **простейшим показательным неравенством.**

- Решение показательных неравенств основано на строгой монотонности показательной функции. Известно, что
  - при основании, большем единицы, показательная функция возрастает,
  - при положительном основании, меньшем единицы, показательная функция убывает.





- Неравенство вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

в зависимости от основания эквивалентно следующему:

  - при $a>1$ $f(x)>g(x)$;
  - при $0<a<1$ $f(x)<g(x)$.

- Неравенство вида

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

эквивалентно следующему неравенству:

  - при $a>1$ $f(x)<g(x)$;
  - при $0<a<1$ $f(x)>g(x)$.

Решение простейших показательных неравенств

$$a > 0,\ \ a \neq 1$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$$a > 1 \qquad\qquad 0 < a < 1$$

$$f(x) > g(x) \qquad\qquad f(x) < g(x)$$

Знак неравенства

<u>Сохраняется</u> <u>Меняется</u>

Что нужно учесть при решении показательных неравенств ?

1. Привести основания степени к одинаковому основанию

2. Использовать свойства монотонной функции

Пример 1

$2^{2x-4} > 64$

$2^{2x-4} > 2^6$

т.к. функция $y = 2^t$ *монотонно возрастает на* R, *то*

$2x - 4 > 6$

$x > 5$

Ответ: $(5; +\infty)$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

т.к. функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ *монотонно убывает на* R, *то*

$2x - 3,5 > 0,5$

$x > 2$

Ответ: $(2; +\infty)$

Пример 3

$$0,5^{x^2-3x} \le 0,5^{3x-8}$$

$$\text{т.к. функция } y = (0,5)^t$$

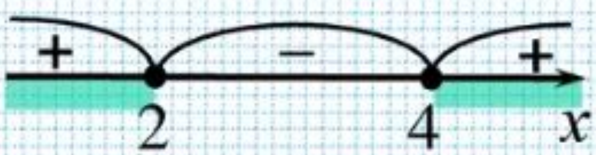
$$\text{монотонно убывает на } R, \text{ то}$$

$$x^2 - 3x \ge 3x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 \ge 0$$

$$\text{н.ф.: } x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$$



$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

Пример 4

Решить неравенство:

$2^x < \frac{1}{8}$

Решение:

$2^x < \frac{1}{8}$

Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то

$2^x < 2^{-3}$, т.к. 2>1, функция $y = 2^t$ - возрастает

$x < -3$

Пример 5

$2^{x^2} > 2^{x+2}$

Решение:

$2^{x^2} > 2^{x+2}$

$x^2 > x + 2$, т.к. 2>1 функция $y = 2^t$ возрастает

$x^2 - x - 2 > 0$

$x < -1, x > 2$

$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Пример 6

Решить неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+10} \geqslant \frac{16}{81}$.

Решение. Неравенство переписывается в виде:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+10} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

Функция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ монотонно убывает, поэтому неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^a \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^b$ эквивалентно неравенству $a \leqslant b$. Основание степени отбрасывается *с изменением* знака неравенства:

$$x^2 - 5x + 10 \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqslant x \leqslant 3.$$

Ответ: $[2; 3]$.

Пример 7