Семинар 6

доцент Волков Н.П.

Занятие 6

Прямая на плоскости

301 $l \ni M_1(3;-7)$, $l: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$a=b$

Решение. $\begin{cases} \frac{3}{a}+\frac{-7}{b}=1 \\ a=b \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{b}-\frac{7}{b}=1$

$\Rightarrow -\frac{4}{b}=1 \Rightarrow b=a=-4$

$\Rightarrow \boxed{l: \frac{x}{-4}+\frac{y}{-4}=1}$ или $\boxed{l: x+y+4=0}$

309 1) $l: \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$

$\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=-\frac{4}{5} \Rightarrow \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$

$p=3$. Уравнение нормальное.

2) $l: \frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$

$\cos\varphi=\frac{2}{5}$, $\sin\varphi=-\frac{3}{5} \Rightarrow \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{4}{25}+\frac{9}{25}\neq 1$

Не является нормальным уравнением.

3) $l: \frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$

$\cos\varphi=\frac{5}{13}$, $\sin\varphi=-\frac{12}{13} \Rightarrow \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{25}{169}+\frac{144}{169}=1$

но $p=-2$ - противоречие.

не является нормальным уравнением.

310 | 1) $\ell: 4x-3y-10=0$

<u>Решение:</u> $\mu=\frac{1}{\sqrt{16+9}}=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \boxed{\ell: \frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0}$

2) $\ell: \frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$

<u>Решение:</u> $\mu=\frac{-1}{\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{9}{25}}}=\frac{-1}{1}=-1$

$\boxed{\ell: -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0}$

312 | 1) $A(2;-1)$ $\ell: 4x+3y+10=0$

$\delta(A,\ell)=?$ $\rho(A,\ell)=?$

<u>Решение</u> $\mu=\frac{-1}{\sqrt{16+9}}=-\frac{1}{5}$

$\ell: -\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$

$\Rightarrow \delta(A,\ell)=-\frac{4}{5}\cdot 2-\frac{3}{5}\cdot(-1)-2=-1-2=\boxed{-3}$

$\rho(A,\ell)=\boxed{3}$

313 | $M(1;-3)$, $O(0,0)$

1) $\ell_1: 2x-y+5=0$

<u>Решение</u> $\mu=\frac{-1}{\sqrt{4+1}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\ell_1: \frac{-2x}{\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}=0 \Rightarrow \delta(M,\ell_1)=-\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}<0$

$\Rightarrow$ <u>M и O по одну сторону от ℓ_1.</u>

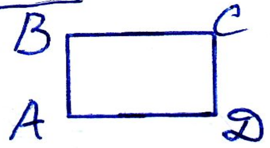
2) $l_2: x-3y-5=0$

<u>Решение</u> $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow l_2: \frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0 \Rightarrow \delta(M,l_2) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1+9-5)>0$

$\Rightarrow$ <u>M и O по разные стороны от l_2.</u>

<u>315|</u> ABCD – прямоугольник, $A(-2;1)$



$l_1: 3x-2y-5=0$

$l_2: 2x+3y+7=0$

<u>Решение</u> $A \notin l_1$ и $A \notin l_2$ и $l_1 \perp l_2$

Пусть $BC \in l_1$, $CD \in l_2$.

$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{9+4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow l_1: \frac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y-5)=0$

$\Rightarrow \delta(A,l_1) = \frac{1}{\sqrt{13}}(3(-2)-2(1)-5) = -\frac{13}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}$

$\Rightarrow \rho(A,l_1) = \sqrt{13}$

$\rho(A,l_2) = \frac{|2\cdot(-2)+3\cdot 1+7|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \rho(A,l_1)\cdot\rho(A,l_2) = \sqrt{13}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}} = \boxed{6}$

<u>317|</u> $l: 2x-3y+6=0$ $M_1(-2;-3)$, $M_2(1;-2)$

$l: \frac{-1}{\sqrt{13}}(2x-3y+6)=0$ $\delta(M_1,l) = \frac{2\cdot 2-3\cdot 3-6}{\sqrt{13}} < 0$

$\delta(M_2,l) = \frac{-2\cdot 1+3(-2)-6}{\sqrt{13}} < 0$ Итак, M_1 и M_2 по одну сторону от l. значит пересечения нет.

325
$l_1: 10x+15y-3=0$
$l_2: 2x+3y+5=0$ $\quad l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$
$l_3: 2x+3y-9=0$

Решение. Найдем точку $M_1 \in l_1$, положим $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{5} \Rightarrow M_1(0;\frac{1}{5})$, $M_2(0;-\frac{5}{3})$, $M_3(0;3)$

$$\mu_2=\frac{-1}{\sqrt{4+9}}=\frac{-1}{\sqrt{13}} \Rightarrow l_2: \frac{1}{\sqrt{13}}(-2x-3y-5)=0$$

$$\mu_3=\frac{1}{\sqrt{4+9}}=\frac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow l_3: \frac{1}{\sqrt{13}}(2x+3y-9)=0$$

$$\delta(M_1,l_2)=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(-\frac{3}{5}-5\right)=-\frac{28}{5\sqrt{13}}<0 \Rightarrow \rho(M_1,l_2)=\frac{28}{5\sqrt{13}}$$

$$\delta(M_1,l_3)=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{3}{5}-9\right)=-\frac{42}{5\sqrt{13}}<0 \Rightarrow \rho(M_1,l_3)=\frac{42}{5\sqrt{13}}$$

$$\frac{\rho(M_1,l_3)}{\rho(M_1,l_2)}=\frac{42}{28}=\frac{3}{2}$$

331 $l: 3x-4y-10=0$

$l_1-?$, $l_2-?$: $\rho(l,l_1)=3$, $\rho(l,l_2)=3$

Решение $\quad \mu=\frac{1}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}$

$$l: \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-2=0$$

$$l_1: \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-2=3 \Rightarrow l_1: 3x-4y-25=0$$

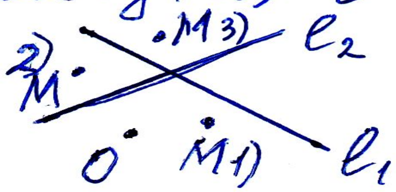
$$l_2: \frac{3x-4y-10}{5}=-3 \Rightarrow l_2: 3x-4y+5=0$$

341 $M(1;-2)$

1) $l_1: 2x-y-5=0$
$l_2: 3x+y+10=0$

$l_1: \frac{1}{\sqrt5}(2x-y-5)=0$
$l_2: \frac{-1}{\sqrt{10}}(3x+y+10)=0$

$\delta(M,l_1)=\frac{1}{\sqrt5}(2+2-5)<0$
$\delta(M,l_2)=\frac{1}{\sqrt{10}}(-3+2-10)<0$ $\Rightarrow$

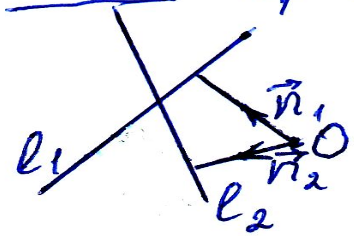


2) $l_1: 4x+3y-10=0$
$l_2: 12x-5y-5=0$
$l_1: \frac{1}{5}(4x+3y-10)=0$
$l_2: \frac{1}{13}(12x-5y-5)=0$ $\Rightarrow$ $\delta(M,l_1)=\frac{1}{5}(4-6-10)<0$
$\delta(M,l_2)=\frac{1}{13}(12+10-5)>0$

3) $l_1: x-2y-1=0$
$l_2: 3x-y-2=0$ $\Rightarrow$ $l_1: \frac{1}{\sqrt5}(x-2y-1)=0$
$l_2: \frac{1}{\sqrt{10}}(3x-y-2)=0$

$\Rightarrow \delta(M,l_1)=\frac{1}{\sqrt5}(1+4-1)>0$
$\delta(M,l_2)=\frac{1}{\sqrt{10}}(3+2-2)>0$

345 $l_1: 3x-2y+5=0$, $l_2: 2x+y-3=0$



какой угол тупой или острый содержит $O(0,0)$

$l_1: -\frac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y+5)=0 \Rightarrow \vec n_1=\left\{\frac{-3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$
$l_2: \frac{1}{\sqrt5}(2x+y-3)=0 \Rightarrow \vec n_2=\left\{\frac{2}{\sqrt5};\frac{1}{\sqrt5}\right\}$

$\Rightarrow \vec n_1\cdot\vec n_2=\frac{-6}{\sqrt{65}}+\frac{2}{\sqrt{65}}=\frac{-4}{\sqrt{65}}<0$ $(\widehat{n_1,n_2})$ – тупой

$\Rightarrow (\widehat{l_1,l_2})$ – острый

349 $\ell_1: x+2y-11=0, \quad \ell_2: 3x-6y-5=0$

$M_0(1;-3) \quad \ell_б - ?$

Решение $\quad \ell_1: \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-11)=0$

$\ell_2: \frac{1}{3\sqrt{5}}(3x-6y-5)=0$

$\delta(M_0,\ell_1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-6-11)<0$

$\delta(M_0,\ell_2)=\frac{1}{3\sqrt{5}}(3+18-5)>0 \Rightarrow M_0 \in$ смежному углу

1) $\forall$ точки $M(x,y) \in$ смежному углу $\Rightarrow$

$\delta(M,\ell_1)>0$, а $\delta(M,\ell_2)<0$

или $\delta(M,\ell_1)<0$, а $\delta(M,\ell_2)>0$, т.е. $\delta(M,\ell_1)\cdot\delta(M,\ell_2)<0$

2) $\forall$ точки $M(x,y) \in$ биссектрисе $\Rightarrow$

$|\delta(M,\ell_1)|=|\delta(M,\ell_2)|$

Из 1) и 2) $\Rightarrow \delta(M,\ell_1)=-\delta(M,\ell_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-11)=-\frac{1}{3\sqrt{5}}(3x-6y-5)$

$\Rightarrow (3+3)x+(6-6)y+(-33-5)=0$

$\boxed{\ell_б: 3x-19=0}$

351) $l_1: 3x+4y-5=0$, $l_2: 5x-12y+3=0$

l_δ - ? острого угла

Решение $l_1: \frac{1}{5}(3x+4y-5)=0$, $l_2: \frac{-1}{13}(5x-12y+3)=0$

$\Rightarrow \vec{n}_1=\left\{\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right\}$, $\vec{n}_2=\left\{-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right\}$

$\Rightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = -\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{33}{65}>0$ $(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})$ - острый

$\Rightarrow$ $O \in$ тупому углу

$\Rightarrow$ $l_\delta \in$ смежному углу

В силу N 349 $\Rightarrow \forall$ точки $M(x,y)\in l_\delta$

$\Rightarrow \delta(M,l_1)=-\delta(M,l_2)$

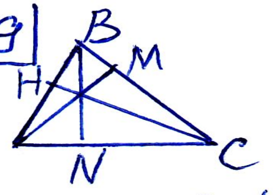
$\Rightarrow \frac{1}{5}(3x+4y-5)=+\frac{1}{13}(5x-12y+3)$

$\Rightarrow 39x+52y-65=25x-60y+15$

$\Rightarrow l_\delta: 14x+112y-80=0$

$\Rightarrow \boxed{l_\delta: 7x+56y-40=0}$

359)



$AB: x+2y-1=0$

$BC: 5x+4y-17=0$

$AC: x-4y+11=0$

AM - ?, BN - ?, CH - ? - высоты

1) $AM: \alpha(x+2y-1)+\beta(x-4y+11)=0$ $AM\perp BC$

$AM: (\alpha+\beta)x+(2\alpha-4\beta)y+(11\beta-\alpha)=0$

$\vec{n}_{AM}\perp\vec{n}_{BC} \Rightarrow 5(\alpha+\beta)+4(2\alpha-4\beta)=0 \Rightarrow 13\alpha=11\beta$

Положим $\beta=13 \Rightarrow \alpha=11$

$\Rightarrow AM: 24x-30y+132=0$

$\boxed{AM: 4x-5y+22=0}$

2) $BN: \alpha(x+2y-1)+\beta(5x+4y-17)=0$

$BN \perp AC$

$BN: (\alpha+5\beta)x+(2\alpha+4\beta)y+(-\alpha-17\beta)=0$

$\vec{n}_{AC} \perp \vec{n}_{BN} \Rightarrow (\alpha+5\beta)-4(2\alpha+4\beta)=0$

$\Rightarrow -7\alpha-11\beta=0 \qquad 7\alpha=-11\beta$

$\beta:=7 \Rightarrow \alpha=-11$

$BN: 24x+6y-108=0$

$\Rightarrow \boxed{BN: 4x+y-18=0}$

3) $CH: \alpha(5x+4y-17)+\beta(x-4y+11)=0$

$AB \perp CH \qquad CH: (5\alpha+\beta)x+(4\alpha-4\beta)y+(11\beta-17\alpha)=0$

$(5\alpha+\beta)+2(4\alpha-4\beta)=0$

$13\alpha-7\beta=0 \Rightarrow 13\alpha=7\beta$

$\beta:=13 \Rightarrow \alpha=7$

$CH: 48x-24y+24=0$

$\boxed{CH: 2x-y+1=0}$

Дома К. 305, 309(4,5,6), 310(3,4,5), 312(3), 313(3,5), 318, 323, 335, 342, 346, 350, 352, 361.