Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет” (ННГАСУ)

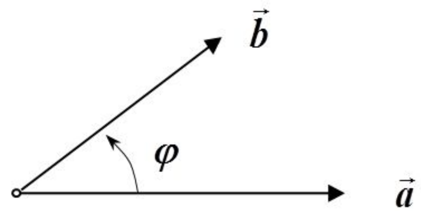
СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Лекция 2

Протасова Людмила Анатольевна
канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры математики ННГАСУ

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$



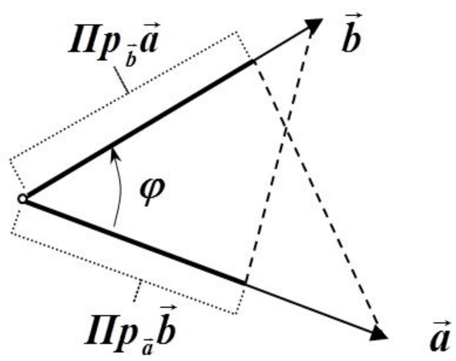
Под углом между двумя векторами будем понимать наименьший из двух углов между ними.

Скалярное произведение обозначается символами $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $<\vec{a}, \vec{b}>$.

Скалярное произведение двух векторов

$$Пр_{\vec a}\vec b = |\vec b|\cos\varphi\ ,\quad Пр_{\vec b}\vec a = |\vec a|\cos\varphi$$

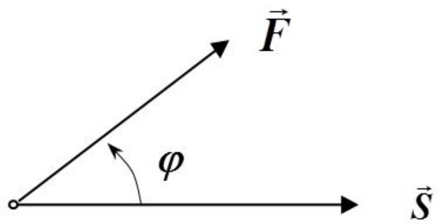
Поэтому $\vec a\cdot\vec b = |\vec a|\cdot Пр_{\vec a}\vec b = |\vec b|\cdot Пр_{\vec b}\vec a$



Связь скалярного произведения с проекцией вектора на вектор

Со скалярным произведением в физике связано вычисление работы силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки по направлению вектора $\vec{S}$. Если сила направлена вдоль перемещения, то работа $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}|$

Если угол между этими векторами равен φ, то работа вычисляется по формуле $A = Пр_{\vec{s}} \vec{F} \cdot |\vec{S}| = \vec{F} \cdot \vec{S}$



В частности, если $\vec{F} \perp \vec{S}$, то $A = 0$. Например, центростремительная сила работы не совершает.

Вычисление работы силы с помощью скалярного произведения

Операция скалярного произведения позволяет выразить проекцию вектора на вектор и угол между векторами следующим образом:

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}, \quad \cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

причем, если скалярное произведение векторов положительно, то угол между ними острый, а если отрицательно – тупой.
В частности, скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны (ортогональны):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}.$$

Скалярное произведение вектора на себя $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|^2$,

поэтому $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. Обозначение $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Некоторые приложения скалярного произведения

Из определения скалярного произведения следует коммутативность этой операции: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{b \cdot a}$.

Из свойств проекций векторов вытекают следующие ее свойства:

$$k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right),$$

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Докажем последнее из них:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = |\vec{a}| \cdot \textit{Пр}_{\vec{a}}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = |\vec{a}| \cdot \left(\textit{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} + \textit{Пр}_{\vec{a}}\vec{c}\right) =$$
$$= |\vec{a}| \cdot \textit{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}| \cdot \textit{Пр}_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Свойства скалярного произведения

Пример. Найти длину вектора $\bar{c} = \bar{a} + 2\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $\widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = 60^\circ$.

Решение.

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c} \cdot \bar{c}} = \sqrt{(\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})} = \sqrt{|\bar{a}|^2 + 4\bar{a}\,\bar{b} + 4|\bar{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 4|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} + 4 \cdot 1^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 4} =$$

$$= \sqrt{8 + 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $|\bar{c}| = 2\sqrt{3}$.

Пример

В **ортонормированном** базисе единичные базисные векторы обозначаются через $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$. Их координаты:

$$\vec{i} = \{1,\ 0,\ 0\},\quad \vec{j} = \{0,\ 1,\ 0\},\quad \vec{k} = \{0,\ 0,\ 1\}\ .$$

Поскольку $\vec{\boldsymbol{i}} \perp \vec{\boldsymbol{j}},\quad \vec{\boldsymbol{j}} \perp \vec{\boldsymbol{k}},\quad \vec{\boldsymbol{i}} \perp \vec{\boldsymbol{k}}$, то

$$\vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}} = 0$$

Так как $\left|\vec{\boldsymbol{i}}\right| = \left|\vec{\boldsymbol{j}}\right| = \left|\vec{\boldsymbol{k}}\right| = 1$, то $\vec{\boldsymbol{i}}^{\,2} = \vec{\boldsymbol{j}}^{\,2} = \vec{\boldsymbol{k}}^{\,2} = 1$

Скалярное произведение ортов декартова базиса

Выразим скалярное произведение через координаты его сомножителей. Пусть задана декартова прямоугольная система координат с ортонормированным базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и два вектора $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$. Тогда, учитывая свойства скалярного произведения, получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \cdot \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= x_1x_2\vec{i} \cdot \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \cdot \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \cdot \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \cdot \vec{i} + y_1y_2\vec{j} \cdot \vec{j} + y_1z_2\vec{j} \cdot \vec{k} +$$

$$+ z_1x_2\vec{k} \cdot \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \cdot \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \cdot \vec{k} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Итак, скалярное произведение равно сумме произведений одноимённых координат сомножителей

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$. Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}},\ |\vec{b}|=\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}$$

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}},$$

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}},$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}},$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

Формулы в координатах

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\bar{a}$ и $(-3\bar{b})$, если $\bar{a}=\{1;2;3\}$ и $\bar{b}=\{0;-1;1\}$.

Решение. Координаты векторов $2\bar{a}$ и $(-3\bar{b})$

$2\bar{a}=2\{1;2;3\}=\{2\cdot 1;2\cdot 2;2\cdot 3\}=\{2;4;6\}$;

$(-3\bar{b})=-3\{0;-1;1\}=\{-3\cdot 0;-3\cdot(-1);-3\cdot 1\}=\{0;3;-3\}$.

Искомое скалярное произведение равно

$2\bar{a}\cdot(-3\bar{b})=2\cdot 0+4\cdot 3+6\cdot(-3)=0+12-18=-6$.

Ответ: -6.

Пример

Пример. Найти угол между векторами $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=-\overline{j}+\overline{k}$.

Решение. Координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}=\{1;2;2\}$ и $\overline{b}=\{0;-1;1\}$.

Тогда косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\cdot0+2\cdot(-1)+2\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{0+(-1)^2+1^2}}=\frac{0-2+2}{3\sqrt{2}}=0,$$

следовательно, $(\widehat{\overline{a}\,\overline{b}})=90^\circ$, то есть $\overline{a}\perp\overline{b}$.

Ответ: 90°.

Пример

Пример. Найти $np_{\bar{a}}\bar{b}$, если $\bar{a} = \bar{i} - \bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

Решение. Координаты векторов $\bar{a} = \{1; 0; -1\}$, $\bar{b} = \{2; 1; 0\}$.

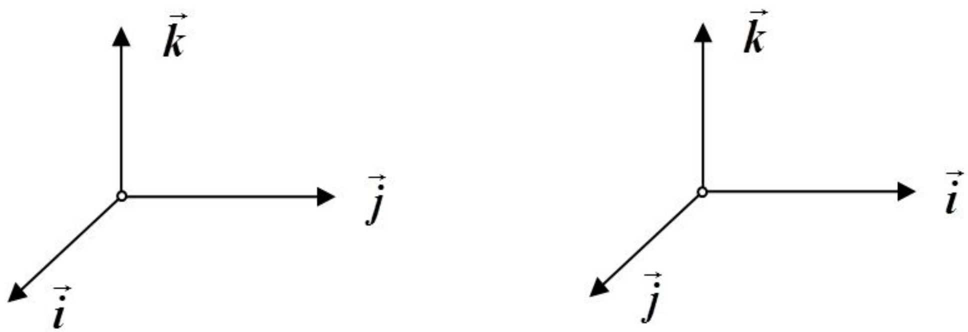
Тогда

$$np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|} = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $np_{\bar{a}}\bar{b} = \sqrt{2}$.

Пример

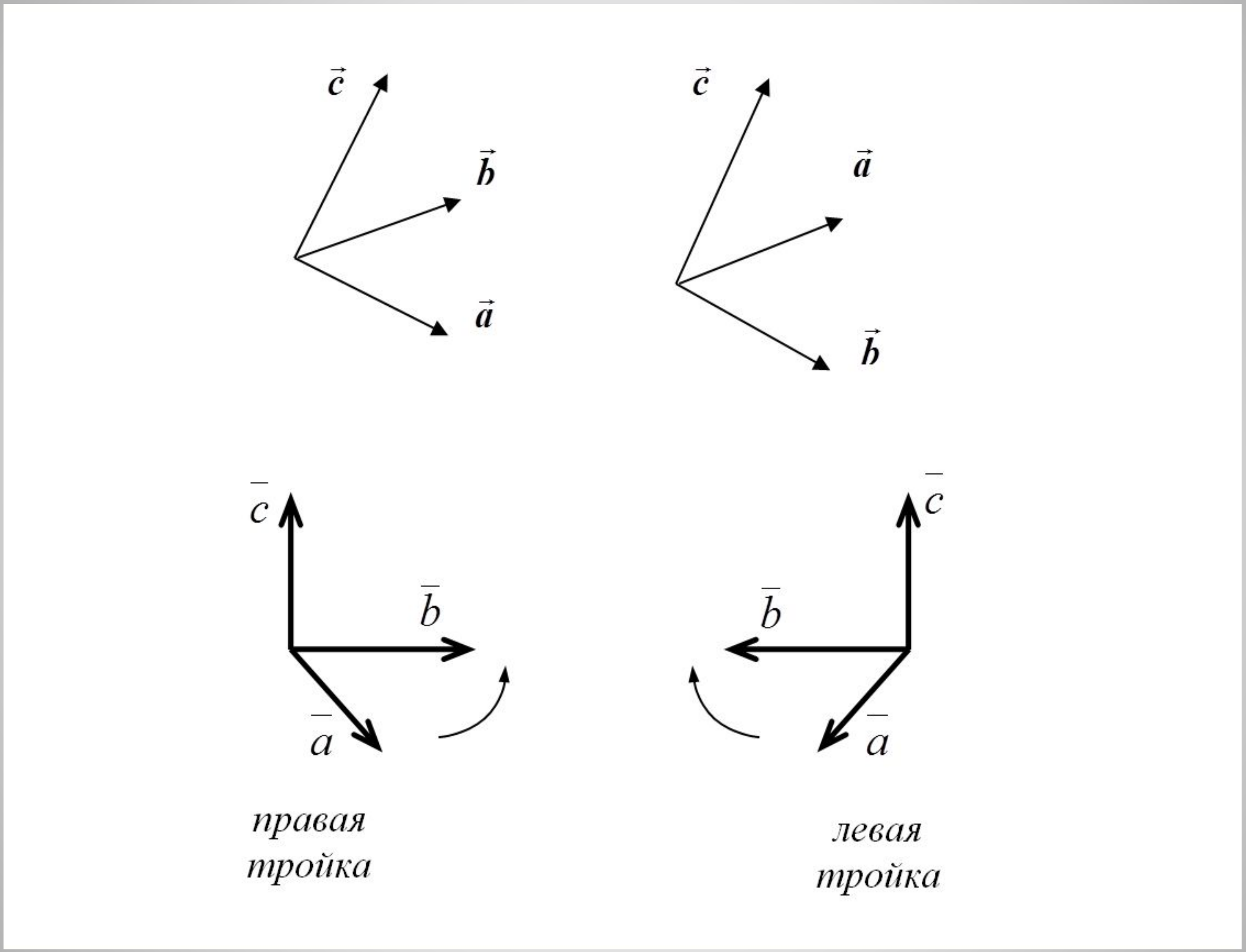
Правоориентированная и левоориентированная
декартовы прямоугольные системы координат



Упорядоченная тройка векторов называется **правоориентированной** или **правой**, если после приведения их к общему началу с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден происходящим против часовой стрелки.

В противном случае – тройка называется **левоориентированной** или **левой**. При перестановке местами любых двух векторов или при замене одного из векторов на противоположный тройка меняет ориентацию.

Понятие об ориентированном базисе



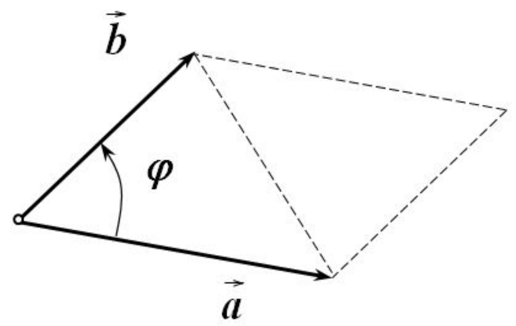
Правая и левая тройки векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ или просто $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ такой, что:

- $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
- упорядоченная тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правоориентированная
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами.

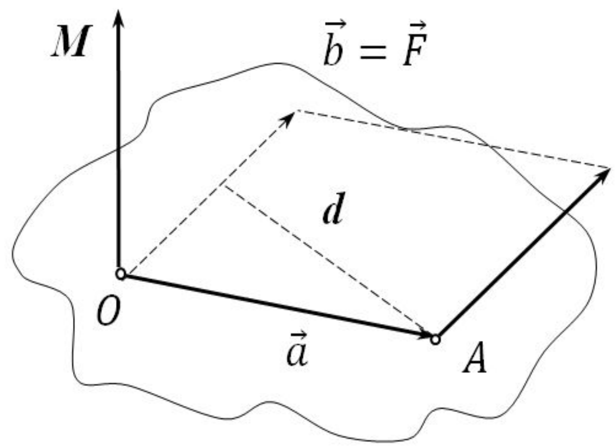
Обратим внимание на то, что значение модуля векторного произведения равно площади параллелограмма, построенного на этих векторах

$$S_{пар} = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



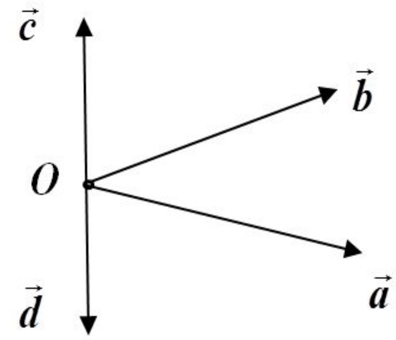
Векторное произведение векторов

В механике с помощью векторного произведения вычисляется момент силы. Пусть, например, $\boldsymbol{O}$ – одна неподвижная точка некоторого тела, к другой точке $\boldsymbol{A}$ которого приложена сила $\vec{\boldsymbol{F}}$. **Момент** этой **силы относительно неподвижной точки** выражается векторным произведением $\vec{\boldsymbol{M}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$, а его модуль равен $\left|\vec{\boldsymbol{M}}\right| = |\vec{\boldsymbol{F}}| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}| \, \boldsymbol{\sin\varphi} = |\vec{\boldsymbol{F}}| \boldsymbol{d}$ – «произведению силы $|\vec{\boldsymbol{F}}|$ на плечо $\boldsymbol{d} = |\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}| \sin\boldsymbol{\varphi}$».



Момент силы относительно точки

Если в векторном произведении $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ переставить местами сомножители, то вектор $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$, очевидно, будет перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, его модуль останется равен модулю вектора $\vec{c}$, но тройка $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ станет левой. Значит, тройка $\{\vec{b}, \vec{a}, -\vec{c}\}$ будет правой. Таким образом, $\vec{d} = -\vec{c}$ или $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$.



Умножение одного из сомножителей векторного произведения на число приводит к умножению результата на это число, т.е.

$$[k\vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \times k\vec{b}] = k[\vec{a} \times \vec{b}].$$

В выражениях, содержащих векторное произведение и сложение, скобки «раскрываются» так же, как и при обычном умножении и сложении, т.е.

$$[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = [\vec{a} \times \vec{c}] + [\vec{b} \times \vec{c}].$$

Свойства векторного произведения векторов

Векторное произведение векторов позволяет выяснить, коллинеарны или нет два заданных вектора. А именно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю

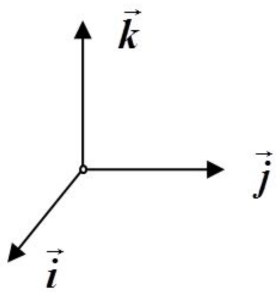
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{0}.$$

Действительно, это следует из равенства $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin 0 = 0$.

Отметим также, что векторное произведение любого вектора на себя равно нулю: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

В частности, для ортов декартова базиса $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$.

Условие коллинеарности векторов



$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$$

$$\underset{-\ \longleftarrow}{\overset{\longrightarrow\ +}{i\ j\ k\ i\ j}}$$

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Векторное произведение ортов декартова базиса

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$

$$=x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\times\vec{j}+y_1z_2\vec{j}\times\vec{k}+$$

$$+z_1x_2\vec{k}\times\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}=x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+y_1z_2\vec{i}+$$

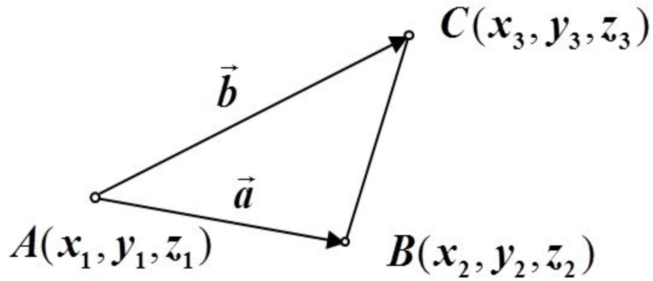
$$+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\vec{i}-\left(x_1z_2-z_1x_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Выражение векторного произведения через координаты

Полученное выражение векторного произведения через координаты сомножителей дает возможность вычислить площадь треугольника по координатам его вершин



Образуя какую-нибудь пару векторов, например,

$$\vec{a} = \overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \text{и}$$

$$\vec{b} = \overline{AC} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

найдём

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right|$$

Вычисление площади треугольника

Пример. Найти векторное произведение векторов $\bar{a} = \{1;2;3\}$ и $\bar{b} = \{0;1;-1\}$.

Решение.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= (-2-3) \cdot \bar{i} - (-1-0) \cdot \bar{j} + (1-0) \cdot \bar{k} = -5\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}.$$

Ответ: $\bar{a} \times \bar{b} = -5\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

Пример

Пример. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{j} - \overline{k}$.

Решение. $\overline{a} = \{2;0-1\}$ и $\overline{b} = \{0;1;-1\}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} =$$

$$= (0-(-1)) \cdot \overline{i} - (-2-0) \cdot \overline{j} + (2-0) \cdot \overline{k} = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k};$$

$$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \Rightarrow S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 1,5 кв. ед.

Пример

1. Что такое скалярное произведение векторов?
2. Сформулируйте условие ортогональности векторов
3. Сформулируйте и докажите свойства скалярного произведения векторов
4. Выведите выражение скалярного произведения через координаты
5. Что называется правой тройкой векторов?
6. Что называется векторным произведением векторов?
7. Сформулируйте свойства векторного произведения
8. Запишите условие коллинеарности векторов
9. Выведите выражение векторного произведения через координаты
10. Какие приложения скалярного и векторного произведений векторов к задачам механики Вы знаете?
11. Как находить угол между векторами?
12. Как находить площади параллелограмма и треугольника с помощью произведения векторов?
13. Запишите формулу нахождения проекции одного вектора на другой.

Теоретические вопросы