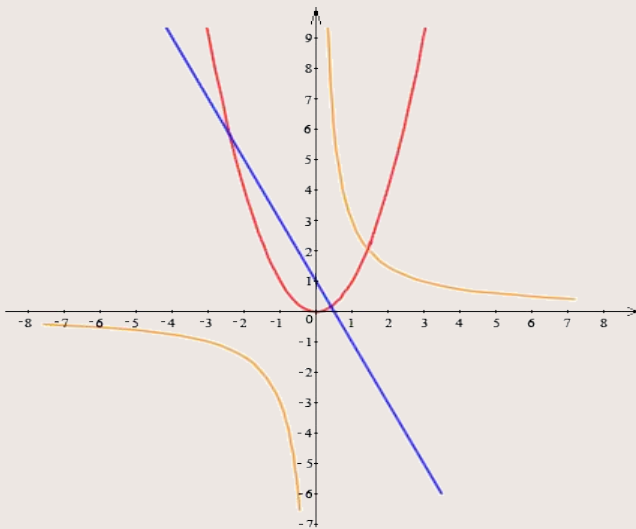


Построение

графиков

функций



ДЗ

План построения графика функции с помощью производной

- 1) Найти область определения функции и определить точки разрыва если они существуют**
- 2) Выяснить является ли функция чётно или нечётной, проверить её на периодичность**
- 3) Найти точки пересечения графика с осями координат, если это возможно**
- 4) Найти стационарные и критические точки**
- 5) Найти точки экстремума функции и промежутки монотонности**
- 6) Определить промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции**
- 7) Найти координаты ещё нескольких точек (для большей точности)**

Как найти промежутки выпуклости, вогнутости и точку перегиба графика функции

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

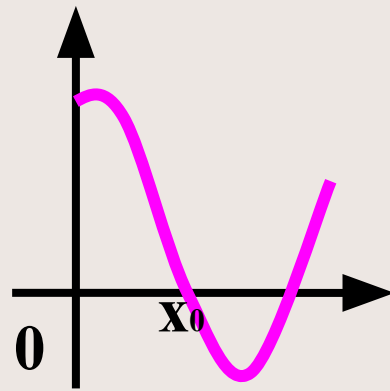
Теорема. (признак вогнутости и выпуклости)

Если вторая производная функции $y=f(x)$ в данном промежутке **положительна**, то кривая **вогнута** в этом промежутке, а если **отрицательна** – **выпукла** в этом промежутке.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующий алгоритм:

- 1) Находят $f'(x)$, а затем $f''(x)$
- 2) Находят точки, в которых $f''(x) = 0$
- 3) Отмечают полученные точки на числовой прямой и получают несколько промежутков области определения функции
- 4) Устанавливают знаки второй производной в каждом из полученных промежутков. Если $f''(x) < 0$, то на этом промежутке кривая выпукла; если $f''(x) > 0$ - вогнута

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой её части.



Точкой перегиба кривой графика функции будут те точки, в которых $f''(x) = 0$ и при переходе через неё вторая производная меняет знак.

Найти интервалы выпуклости и точку перегиба функции

Решение. $y = x^4 - 6x^2 + 4$

Найдем $y'(x)$ и $y''(x)$:

$$y'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow y''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

Найдём стационарные точки второго порядка,

$$\text{т.е. } y''(x) = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$



Значит: при $x \in (-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция вогнута, а при $x \in (-1; 1)$ – выпукла; точки перегиба $x = \pm 1$

Например: исследовать функцию
 $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ и построить её график

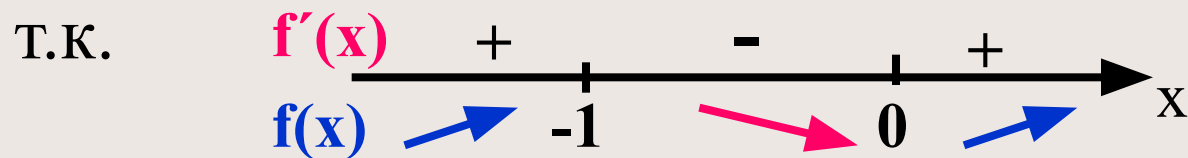
Решение. $D(y) = (-\infty; +\infty)$, четность не определена

Найдем стационарные точки:

т.к. $y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \Rightarrow 6x(x+1) = 0$

тогда $x=0$ и $x=-1$ стационарные точки

Найдем точки экстремума:



и $x=-1$ – точка максимума

$x=0$ – точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

при $x \in (-\infty; -1]$ и $[0; +\infty)$ - функция

возрастает

при $x \in [-1; 0]$ - функция убывает

Найдем точки пересечения графика с

осями координат:

если $x=0$, то $y=-1 \Rightarrow (0; -1)$

если $y=0$, то $x=-1 \Rightarrow (-1; 0)$

Найдем ещё некоторые точки

(контрольные, дополнительные):

- т.к. $x=-1$ – точка максимума, то $u_{\max}=0$
 $\Rightarrow (-1; 0)$ -точка локального максимума
- т.к. $x=0$ – точка минимума, $u_{\min}=-1$
 $\Rightarrow (0; -1)$ -точка локального минимума
- если $x=1$, то $y=4 \Rightarrow (1; 4)$
- если $x=-2$, то $y=-5 \Rightarrow (-2; -5)$

Удобнее все эти данные заполнять в виде таблицы.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↑	0 $(-1; 0)$ max	↓	-1 $(0; -1)$ min	↑

Найдем $f''(x)$.

$$f''(x) = (6x(x+1))' = 12x + 6 = 6(2x+1)$$

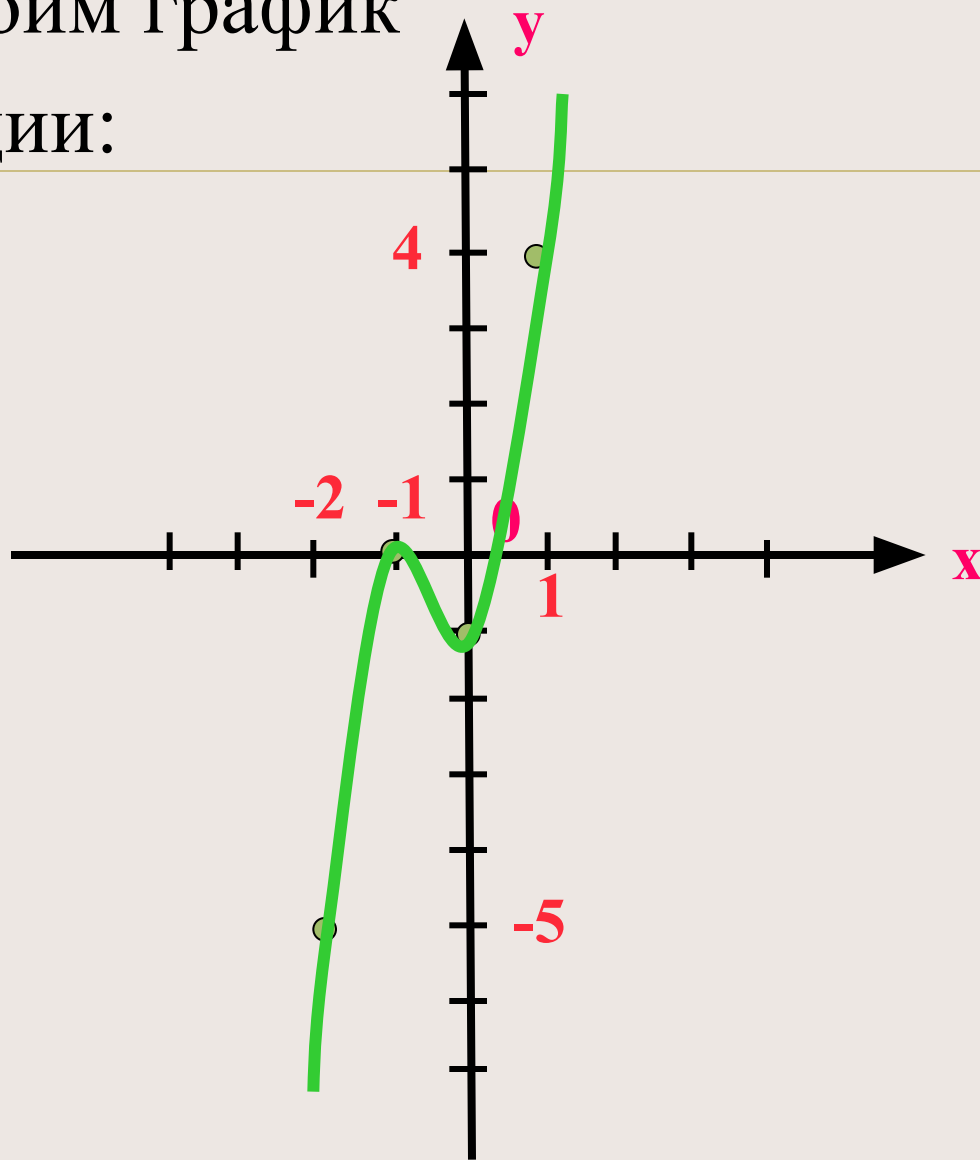
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -0,5 - \text{точка перегиба}$$

т.к. при $x = -1$ (левее $x = -0,5$) $f''(x) < 0$,

а при $x = -0,1$ (правее $x = -0,5$) $f''(x) > 0$

Найдем её координаты: $(-0,5; ?)$, если это не трудно

Построим график
функции:



Исследовать функцию и построить её график

1) $y = 3x^2 - x^3$

2) $y = -9x + x^3$

3) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

4) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$

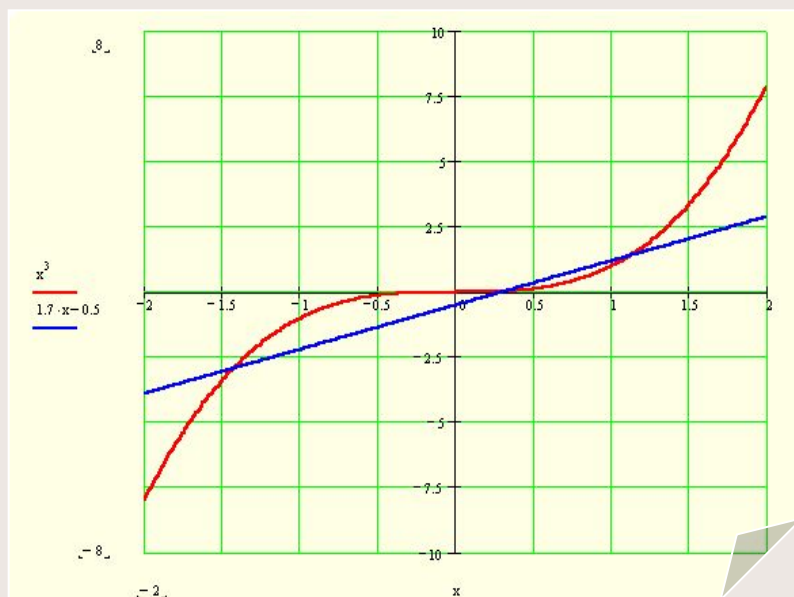
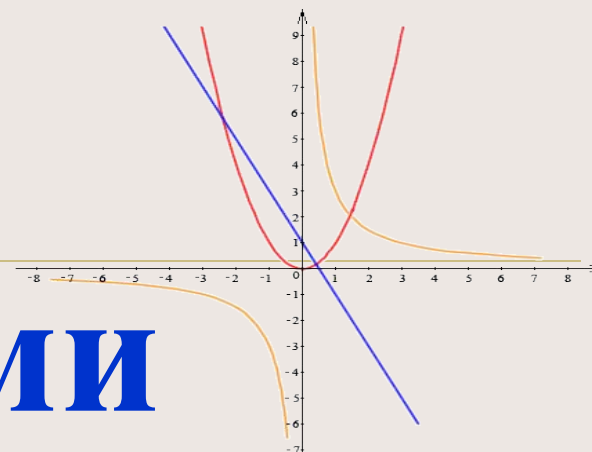
5) $y = 3x^3 + x^2 - 8x - 7$

6) $y = (x)/(1+x^2)$

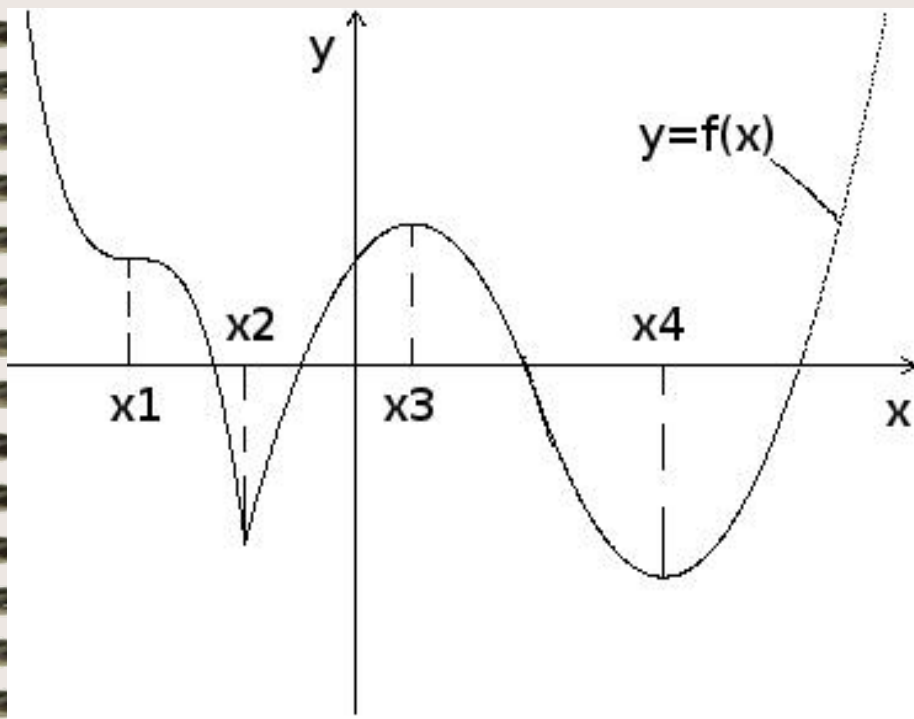
Работа

с графиками

функций



№ 1. По графику функции ответьте на вопросы



- 1) Отметьте стационарные точки.
- 2) Что можно сказать о производной в точке x_2 ?
- 3) Назовите точки экстремума.
- 4) Что можно сказать о производной на $(-\infty; x_2]$?
- 5) Укажите промежутки возрастания функции.
- 6) Отметьте критические точки

Проверим ответы

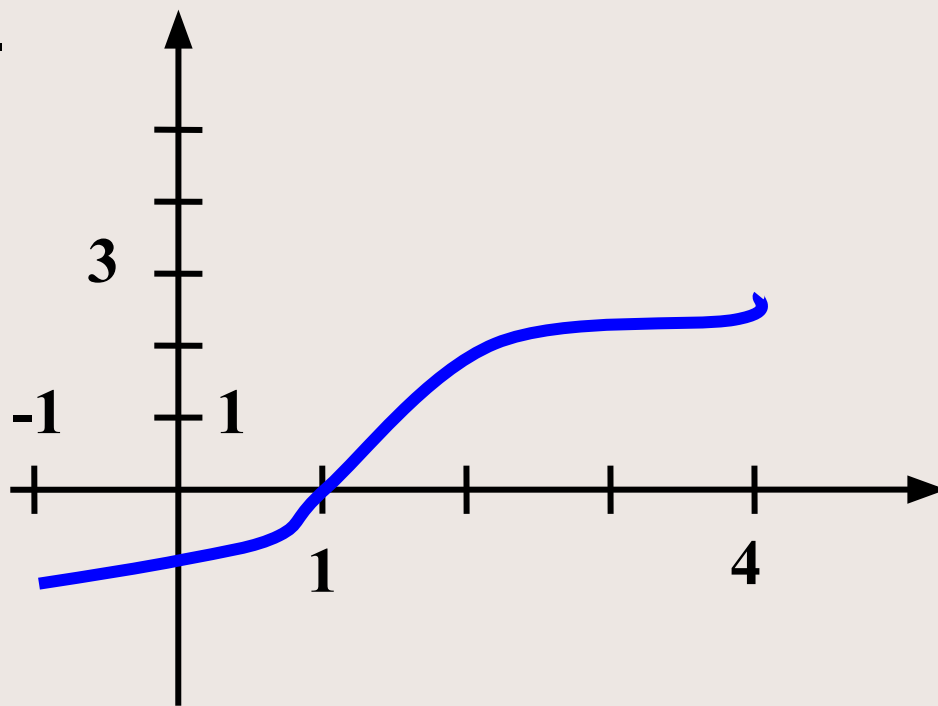
1. x_1, x_3, x_4
2. не существует
3. x_2, x_3, x_4
4. $f'(x) \leq 0$
5. $[x_2; x_3] \cup [x_4; +\infty)$ функция возрастает
6. x_2

№ 2. Постройте график непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на $[a; b]$, удовлетворяющей следующим условиям:

- а)** $a = -1$, $b = 4$, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 4$, $f(1) = 0$, $f(4) = 3$
б) $a = 0$, $b = 5$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < 5$, $f(2) = 0$, $f(3) = -2$

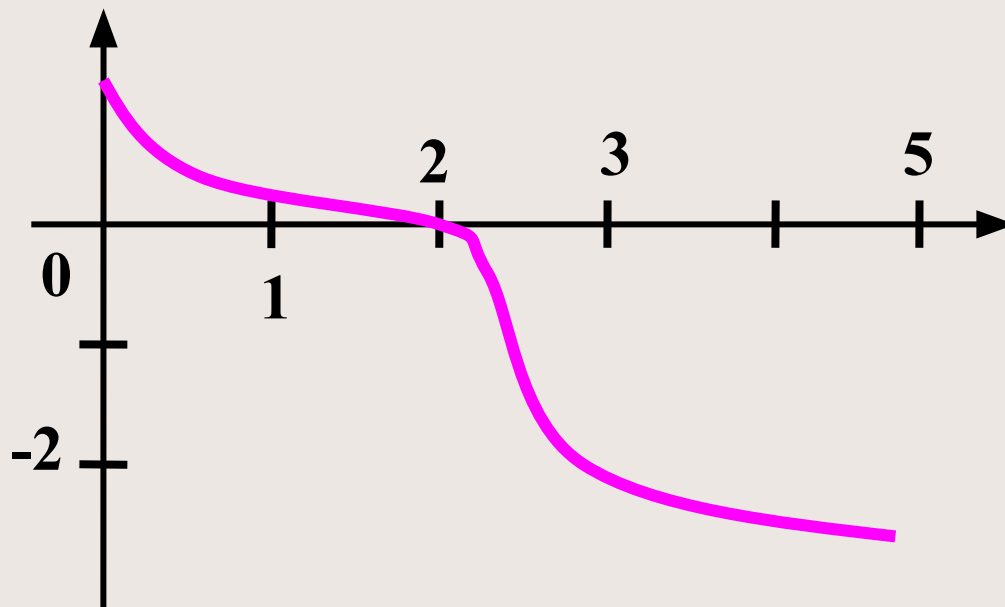
График.

а)

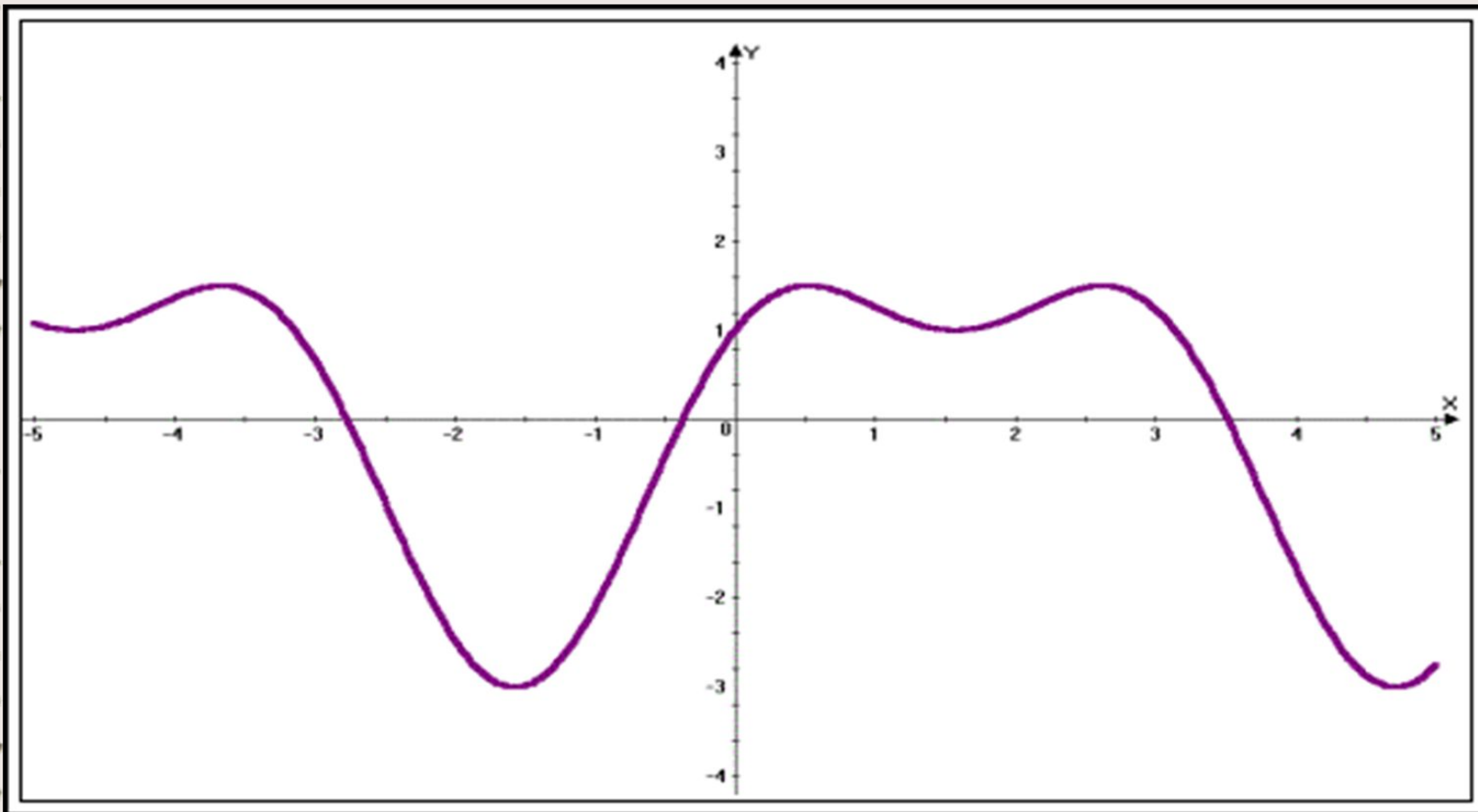


б) $a=0$, $b=5$, $f'(x)<0$ при $0<x<5$, $f(2)=0$, $f(3)=-2$

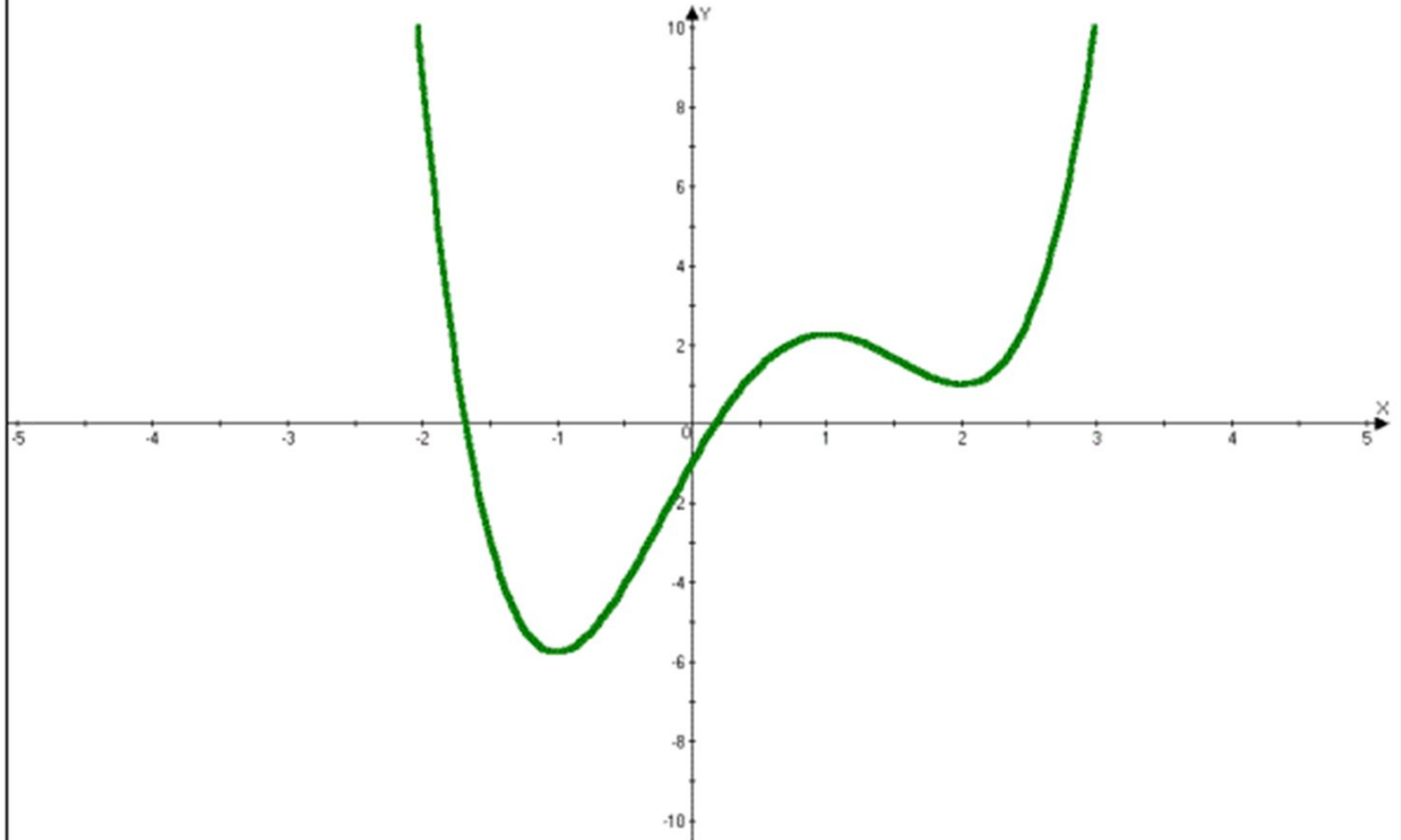
График.



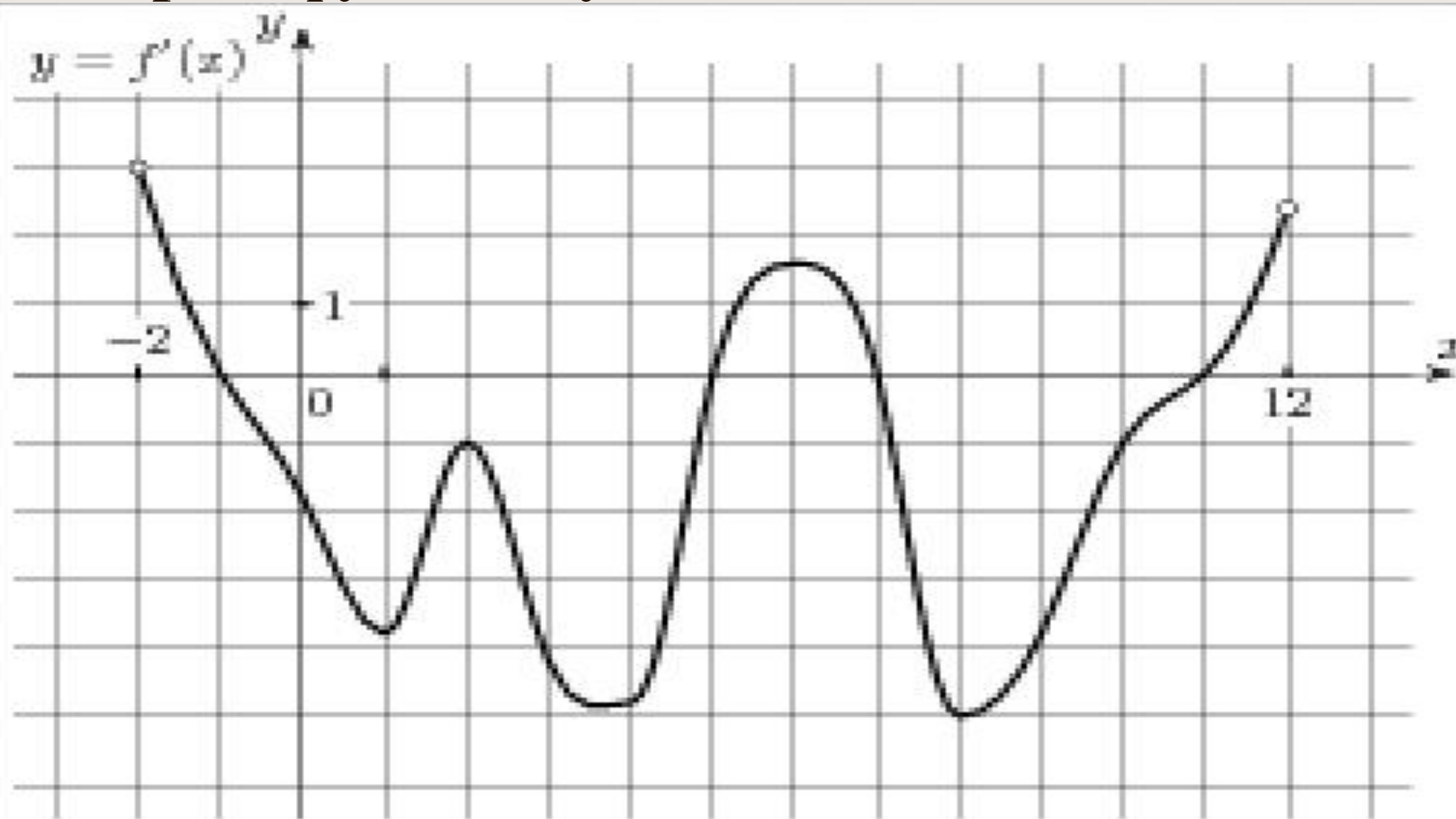
№ 3. По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум.



№ 4. На рисунке изображён график производной функции $y=f(x)$. Сколько точек максимума имеет эта функция?



№ 5. Дан график производной некоторой функции. Определить промежутки, на которых функция убывает?



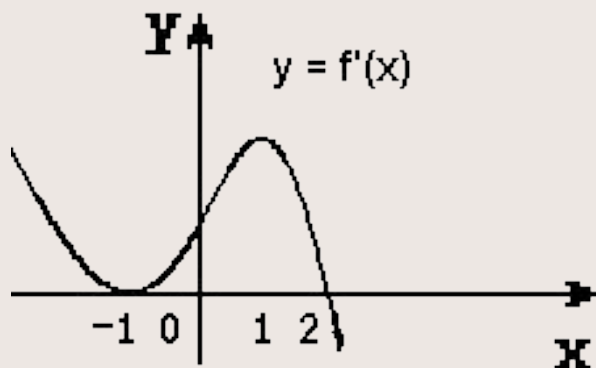


Верно или не верно ?



№1

1. График производной. Точки $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ являются точками максимума.



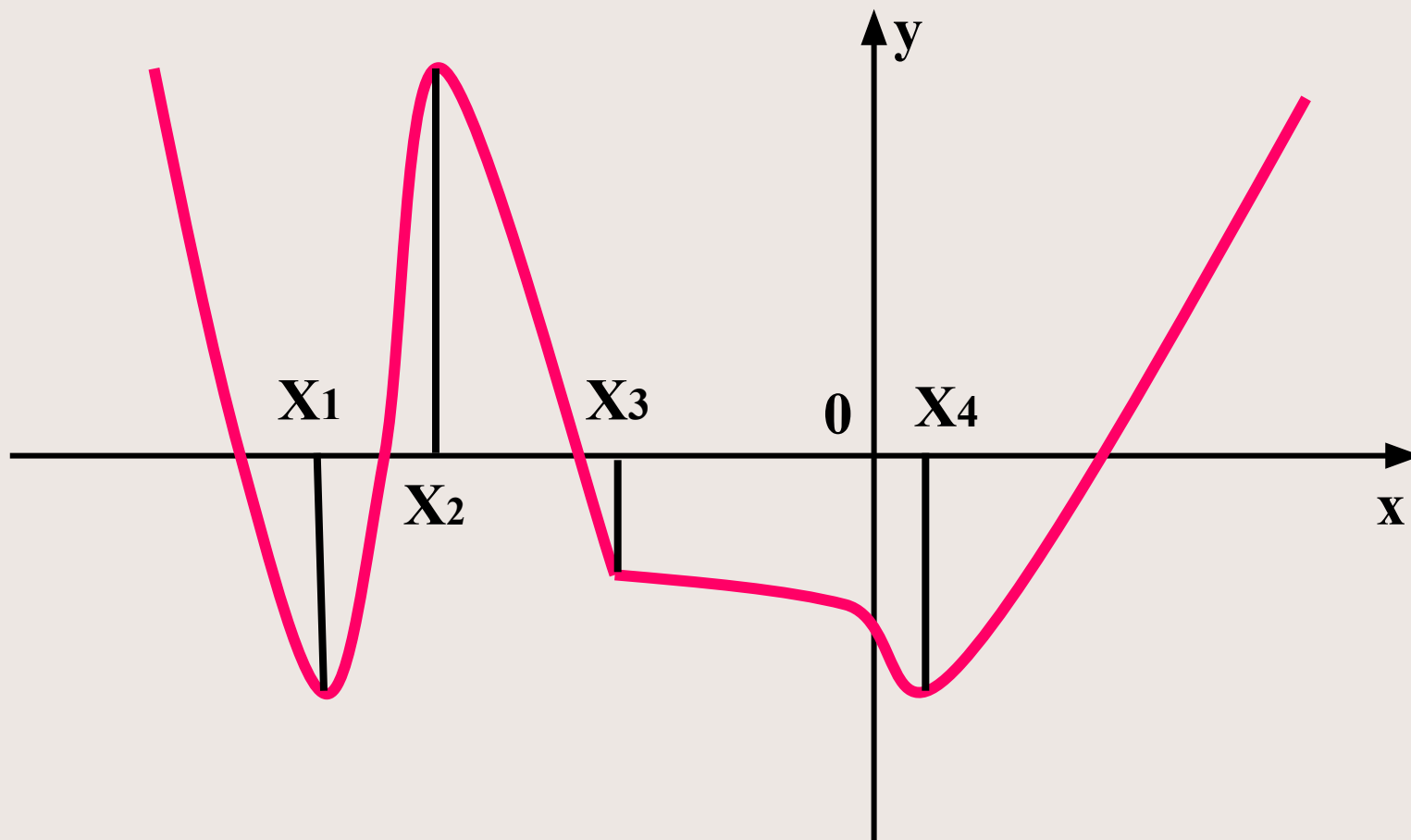
2. Производная функции в точке x_0 равна 0, значит x_0 - критическая точка.
3. Производная функции не существует в точке x_0 , значит x_0 - критическая точка.

4. Критическая точка является точкой экстремума.

5. Точка экстремума является критической точкой.

6. Функция $y(x)$ непрерывна в точке $x=4$, причем $y'(x) > 0$ на $(1;4)$ и $y'(x) < 0$ на $(4;7)$. Точка $x=4$ является точкой минимума.

№ 2. По данному графику функции определить верно или нет высказывание



- 1) Точка x_1 – точка минимума. Да
- 2) Точка x_1 – точка перегиба. Нет

- 3) В точках x_2 и x_4 касательная параллельна оси абсцисс Да
- 4) В точке x_3 производной не существует. Да
- 5) Точка x_4 – точка экстремума Да
- 6) Точка x_4 – точка минимума Да
- 7) Точка x_4 – стационарная точка Да
- 8) Точка x_3 – точка экстремума Нет
- 9) Точка x_2 – точка максимума Да

Используемые ресурсы

- А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс. Учебник,- М., Мнемозина, 2016
- А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс. Задачник,- М., Мнемозина, 2016
- Л.И. Мартышова «Открытые уроки алгебры и начала анализа» 9-11 классы, - М., ВАКО, 2012