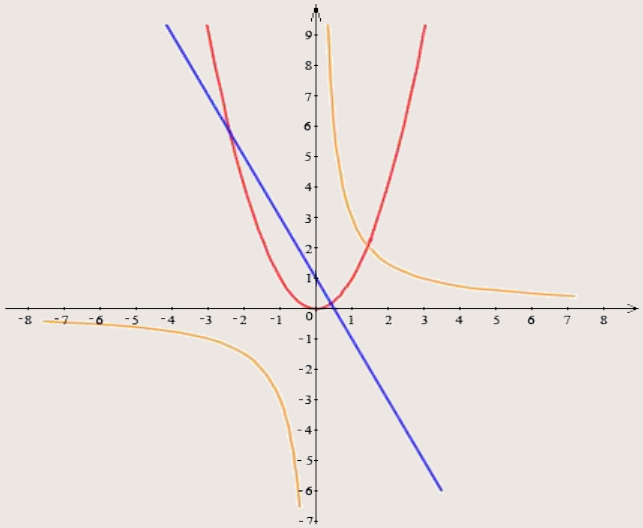
Построение графиков функций



ДЗ

План построения графика функции с помощью производной

1) Найти область определения функции и определить точки разрыва если они существуют
2) Выяснить является ли функция четно или нечетной, проверить её на периодичность
3) Найти точки пересечения графика с осями координат, если это возможно
4) Найти стационарные и критические точки
5) Найти точки экстремума функции и промежутки монотонности
6) Определить промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции
7) Найти координаты ещё нескольких точек (для большей точности)

Как найти промежутки выпуклости, вогнутости и точку перегиба графика функции

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

Теорема. (*признак вогнутости и выпуклости*)

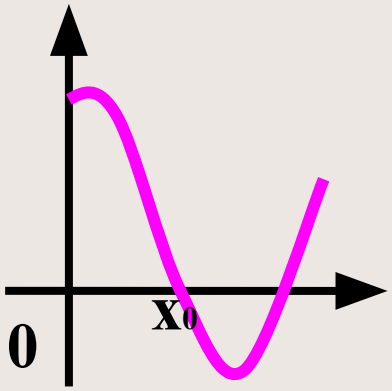
Если **вторая производная** функции **y=f(x)** в данном промежутке **положительна**, то **кривая вогнута** в этом промежутке, а если **отрицательна – выпукла** в этом промежутке.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующий алгоритм:

1) Находят $f'(x)$, а затем $f''(x)$
2) Находят точки, в которых $f''(x) = 0$
3) Отмечают полученные точки на числовой прямой и получают несколько промежутков области определения функции
4) Устанавливают знаки второй производной в каждом из полученных промежутков. Если $f''(x) < 0$, то на этом промежутке кривая выпукла; если

   $f''(x) > 0$ - вогнута

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой её части.



Точкой перегиба кривой графика функции будут те точки, в которых $f''(x) = 0$ и при переходе через неё вторая производная меняет знак.

Найти интервалы выпуклости и точку перегиба функции

Решение. $$y = x^4 - 6x^2 + 4$$

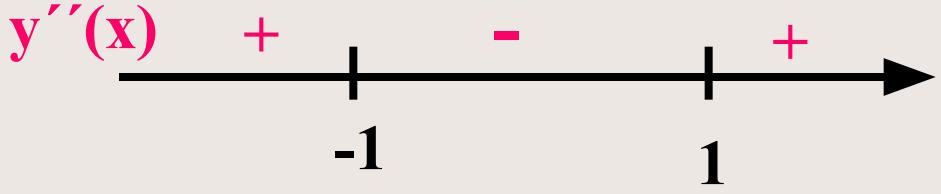
Найдем **y′(x)** и **y′′(x):**

y′(x) = $4x^3-12x$ => **y′′(x)** = $12x^2-12=12(x^2-1)$

Найдём стационарные точки второго порядка,

т.е. **y′′(x)=0** => $12(x^2-1)=0$ => $x^2-1=0$ => $x^2=1$

⇒ **x = ±1**



Значит: при x є (-∞; -1) и (1;+ ∞) функция вогнута, а при x є (-1:1) – выпукла; точки перегиба x= ±1

Например: исследовать функцию $y = 2x^3+3x^2 -1$ и построить её график

Решение. D(y)= (-∞; +∞), четность не определена

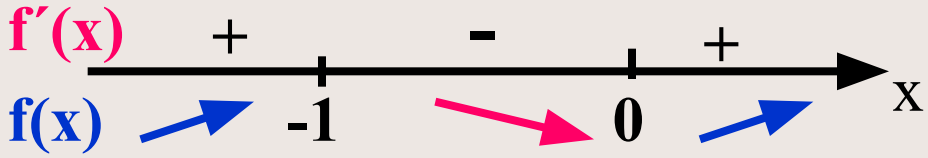
Найдем стационарные точки:

т.к. $y' = 6x^2+6x = 6x(x+1)$ => $6x(x+1)=0$

тогда **x=0** и **x=-1** стационарные точки

Найдем точки экстремума:

т.к.



и **x=-1** – точка максимума

x= 0 – точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

при **x є (-∞; -1] и [0; + ∞) -** функция возрастает

при **x є [-1; 0] -** функция убывает

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

если x=0, то y=-1 => **(0;-1)**

если y=0, то x= -1 => **(-1; 0)**

Найдем ещё некоторые точки (контрольные, дополнительные):

- т.к. **x=-1** – точка максимума, то ymax=0 => **(-1; 0)** -точка локального максимума
- т.к. **x= 0** – точка минимума, ymin=-1 => **(0;-1)** -точка локального минимума
- если x=1, то y=4 => **(1;4)**
- если x=-2, то y=-5 => **(-2;-5)**

Удобнее все эти данные заполнять в виде таблицы.

Составим таблицу:

x	(-∞;-1)	-1	(-1;0)	0	(0;+∞)
f′(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↑	0 (-1;0) max	↓	-1 (0;-1) min	↑

Найдем f ′′(x).

f′′(x) =(6x(x+1))′=12x+6 = 6(2x+1)

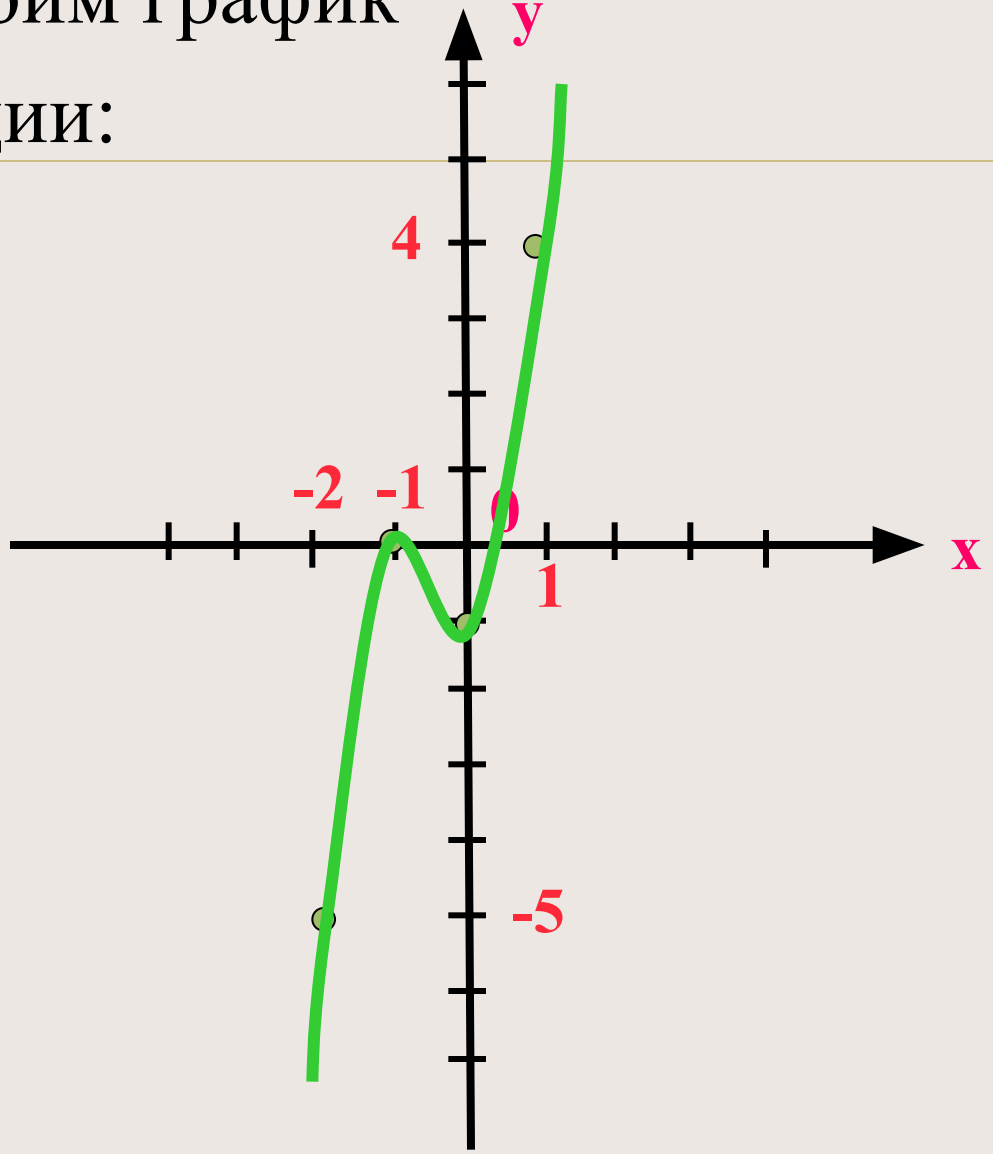
f′′(x)=0 => 6(2x+1)=0 => x = -0,5 - точка перегиба

т.к. при x=-1(левее x=-0,5) f′′(x) <0,

а при x=-0,1(правее x=-0,5) f′′(x) >0

Найдем её координаты: (-0,5; ?), если это не трудно

Построим график функции:



Исследовать функцию и построить её график

1) $y = 3x^2 - x^3$

2) $y = -9x + x^3$

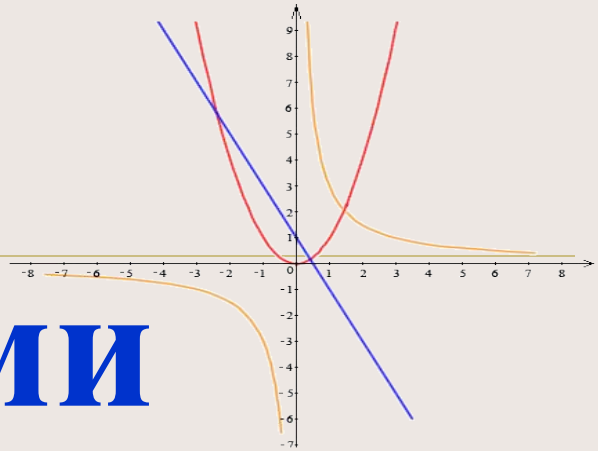
3) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

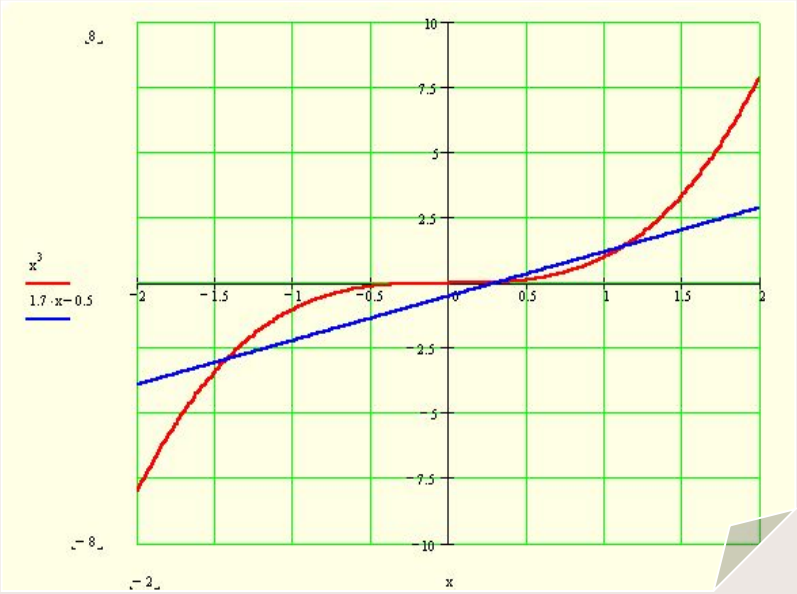
4) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$

5) $y = 3x^3 + x^2 - 8x - 7$

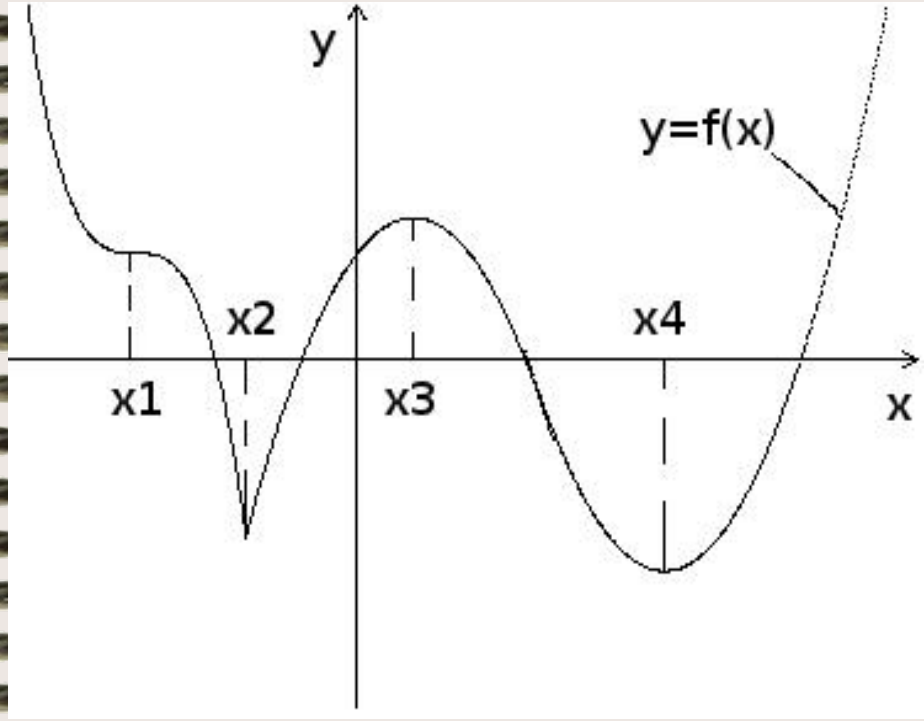
6) $y = (x)/(1+x^2)$

Работа с графиками функций





№ 1. По графику функции ответьте на вопросы



1) Отметьте стационарные точки.

2) Что можно сказать о производной в точке $\mathbf{x_2}$?

3) Назовите точки экстремума.

4) Что можно сказать о производной на $(-\infty; x_2]$?

5) Укажите промежутки возрастания функции.

6) Отметьте критические точки

Проверим ответы

1. x_1, x_3, x_4
2. не существует
3. x_2, x_3, x_4
4. $f'(x) \leq 0$
5. $[x_2; x_3] \cup [x_4; +\infty)$функция возрастает
6. x_2

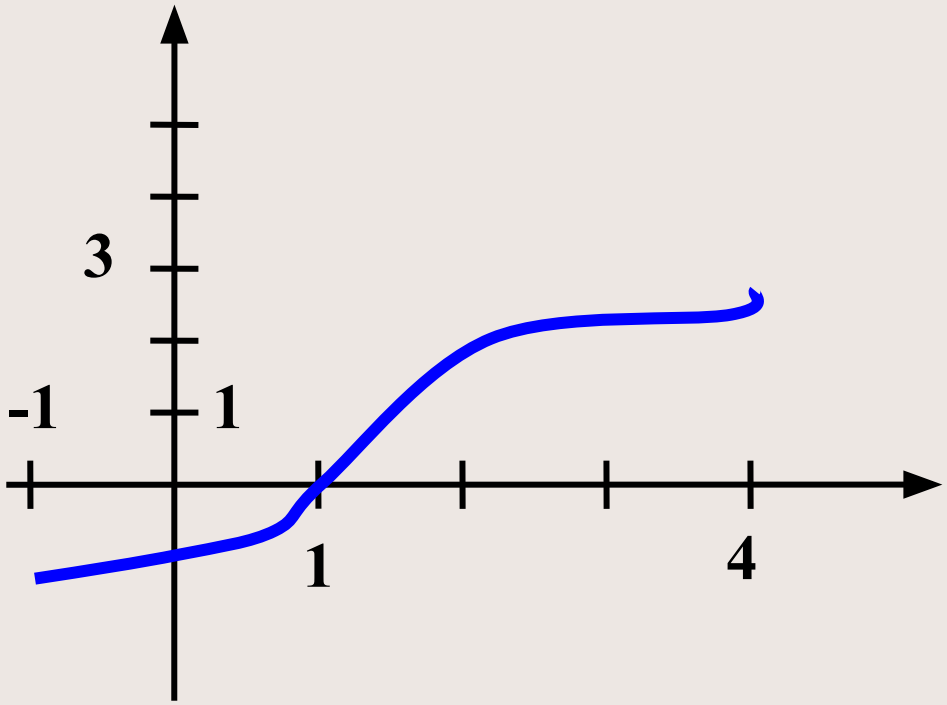
№ 2. Постройте график непрерывной функции y = f(x), определенной на [a;в], удовлетворяющей следующим условиям:

а) а=-1, в=4, f´(x)>0 при -1<x<4, f(1)=0, f(4)=3

б) а=0, в=5, f´(x)<0 при 0<x<5, f(2)=0, f(3)=-2

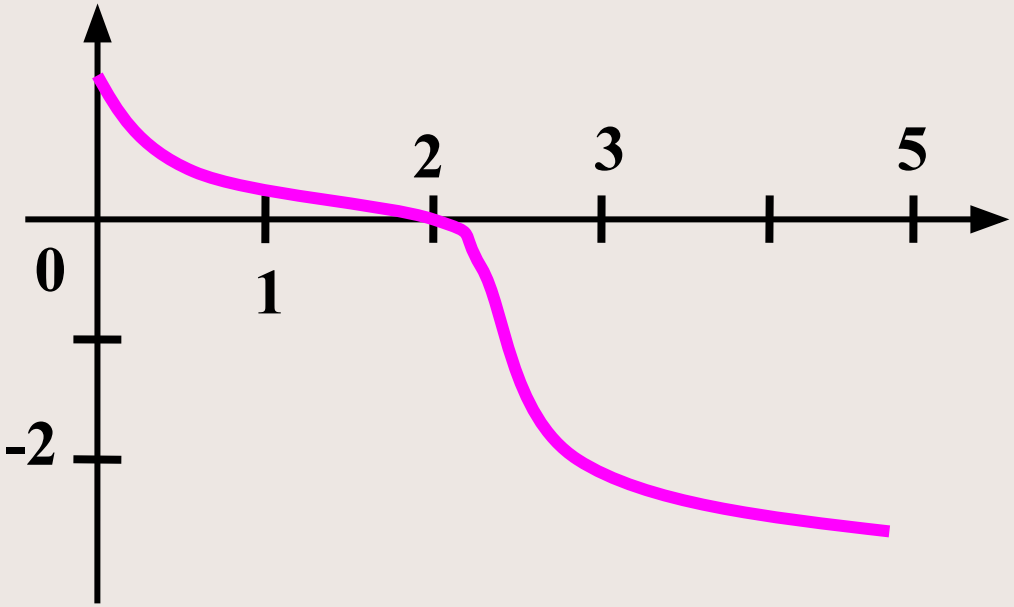
<u>График.</u>

а)

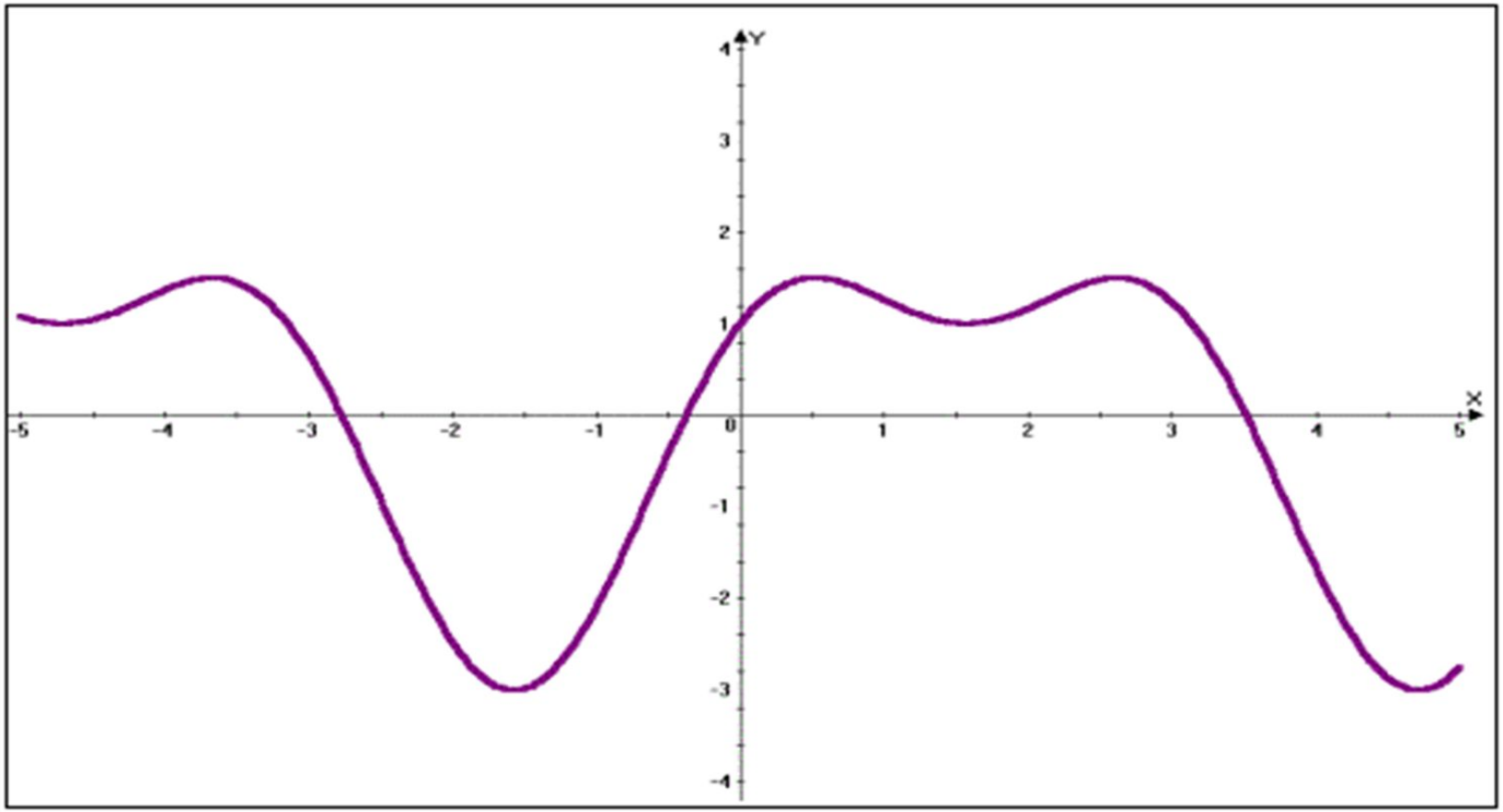


б) а=0, в=5, f′(x)<0 при 0<x<5, f(2)=0, f(3)=-2

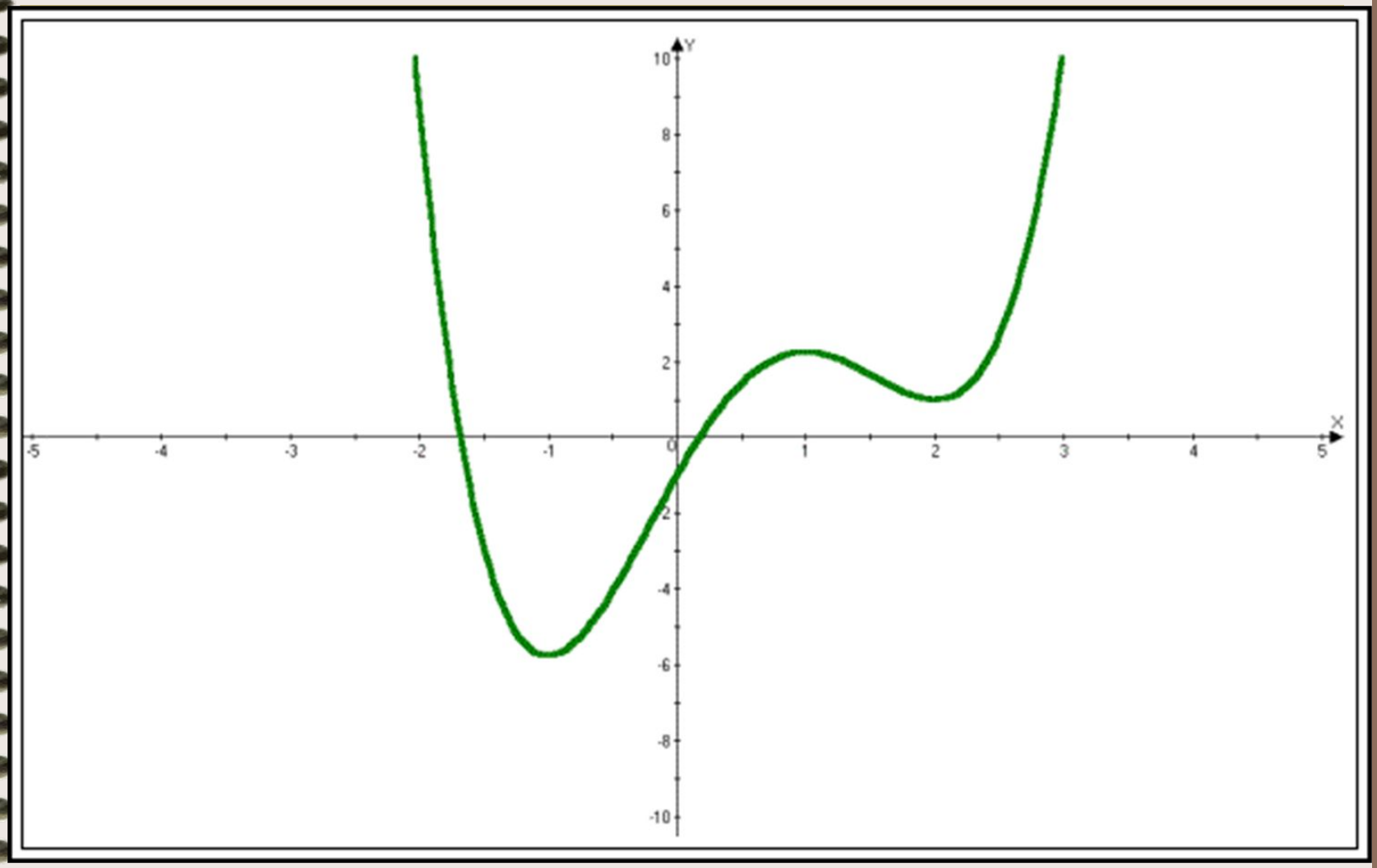
График.



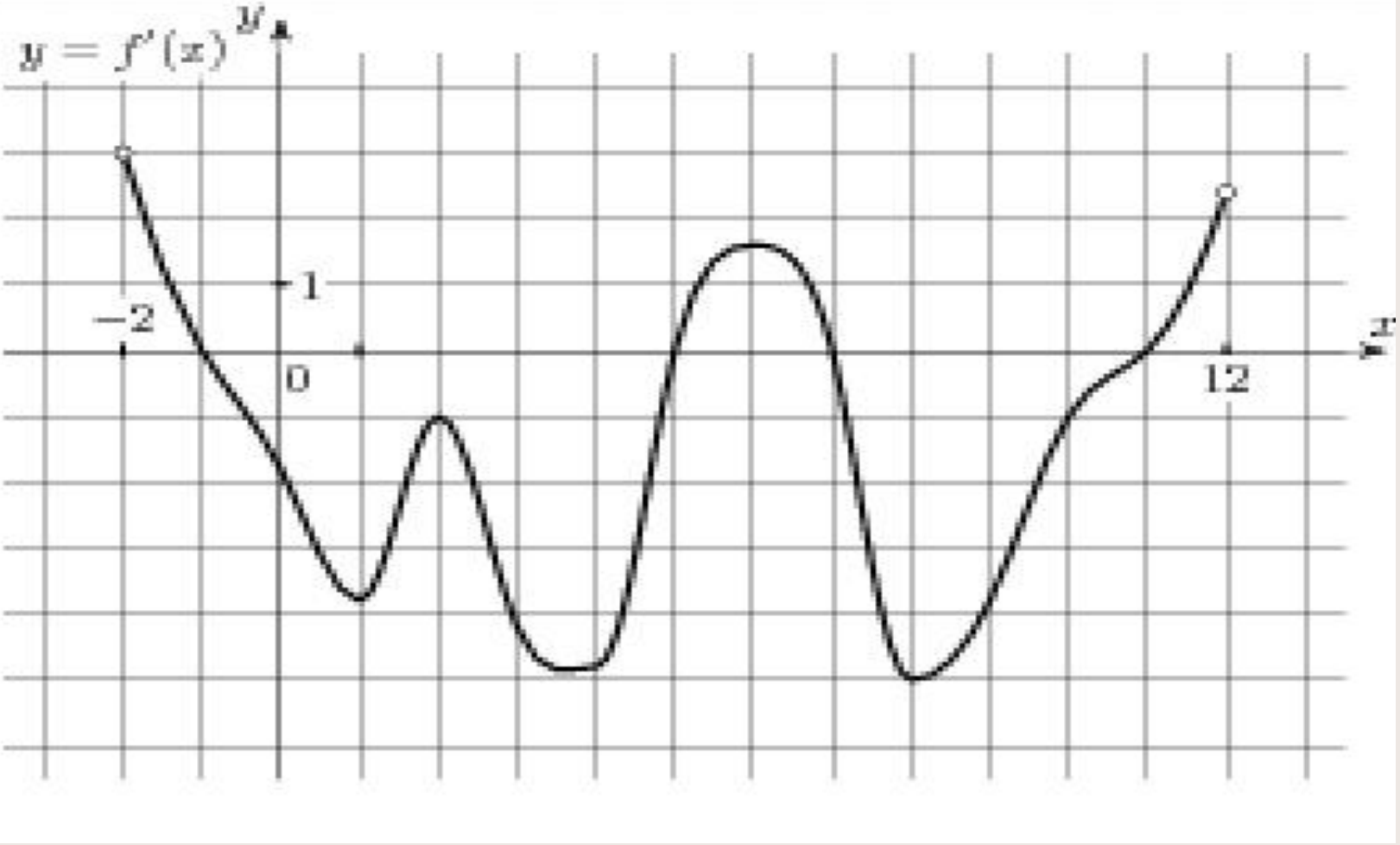
№ 3. **По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум.**



№ 4. **На рисунке изображён график производной функции y=f(x). Сколько точек максимума имеет эта функция?**



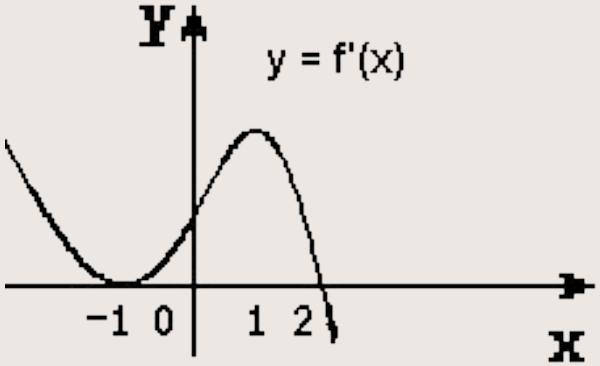
№ 5. **Дан график производной некоторой функции. Определить промежутки, на которых функция убывает?**



Верно или не верно ?

№1

1. График производной. Точки x= -1, x=1, x=2 являются точками максимума.



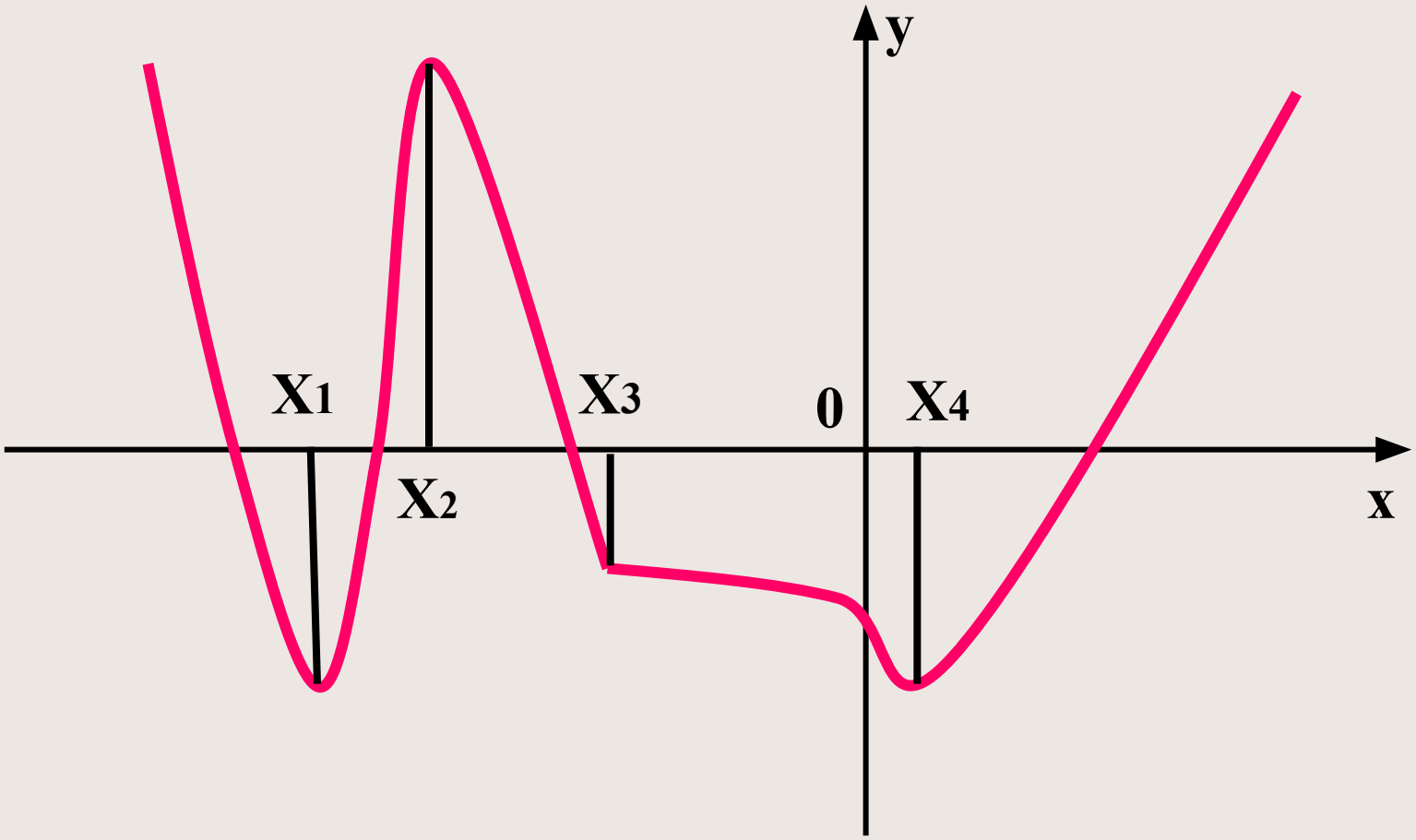
2. Производная функции в точке x_o равна 0, значит x_o - критическая точка.
3. Производная функции не существует в точке x_o, значит x_o - критическая точка.

4. Критическая точка является точкой экстремума.

5. Точка экстремума является критической точкой.

6. Функция $y(x)$ непрерывна в точке $x=4$, причем $y'(x)>0$ на $(1;4)$ и $y'(x)<0$ на $(4;7)$. Точка $x=4$ является точкой минимума.

№ 2. По данному графику функции определить верно или нет высказывание



1)	Точка x_1 – точка минимума.	Да
2)	Точка x_1 – точка перегиба.	Нет
3)	В точках x_2 и x_4 касательная параллельна оси абсцисс	Да
4)	В точке x_3 производной не существует.	Да
5)	Точка x_4 – точка экстремума	Да
6)	Точка x_4 – точка минимума	Да
7)	Точка x_4 – стационарная точка	Да
8)	Точка x_3 – точка экстремума	Нет
9)	Точка x_2 – точка максимума	Да

Используемые ресурсы

- А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс. Учебник,- М., Мнемозина, 2016
- А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс. Задачник,- М., Мнемозина, 2016
- Л.И. Мартышова «Открытые уроки алгебры и начала анализа» 9-11 классы, - М., ВАКО, 2012