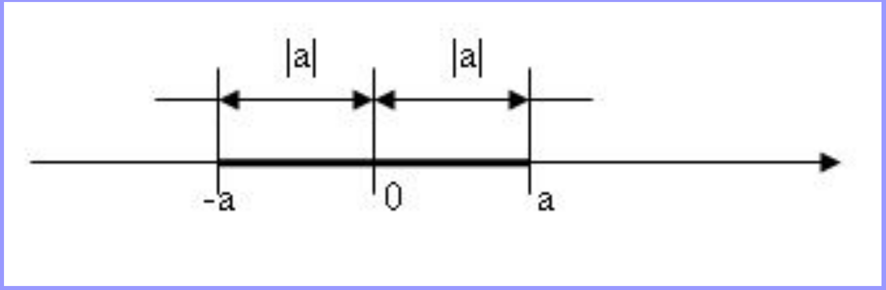
Определение

Модуль числа **а** или абсолютная величина числа **а** равна **а**, если **а** больше или равно нулю и равна – **а**, если **а** меньше нуля:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a<0 \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация

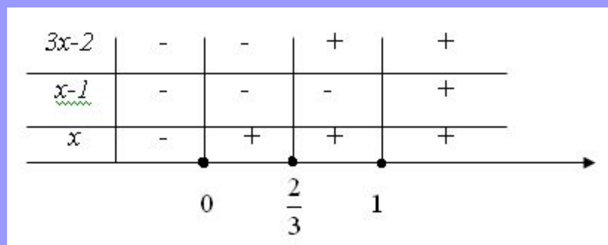
- |a| означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число a, до начала отсчета.
- Если a $\neq$0, то на координатной прямой существует две точки a и –a, равноудаленные от нуля, модули которых равны.
- Если a=0, то на координатной прямой |a| изображается точкой 0.



Пример 1. Решить неравенство:

$$|3x-2|-2|x-1|\le 2|x|-1$$

Решение.



Рассмотрим четыре случая.

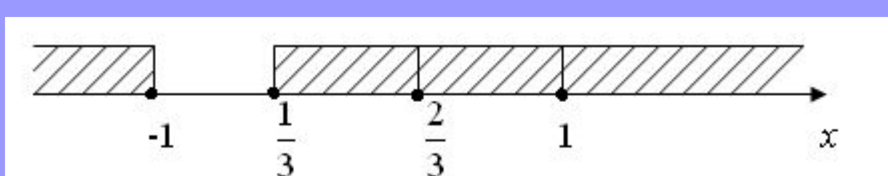
1) $\begin{cases} x\ge 1, \\ 3x-2-2x+2\le 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$

2) $\begin{cases} \frac{2}{3}\le x<1, \\ 3x-2+2x-2\le 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\le x<1, \\ x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x<1$

3) $\begin{cases} 0\le x<\frac{2}{3} \\ -3x+2+2x-2\le 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<\frac{2}{3}, \\ x\ge \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}$

4) $\begin{cases} x<0, \\ -3x+2+2x-2\le -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\le -1$

Объединим эти решения:



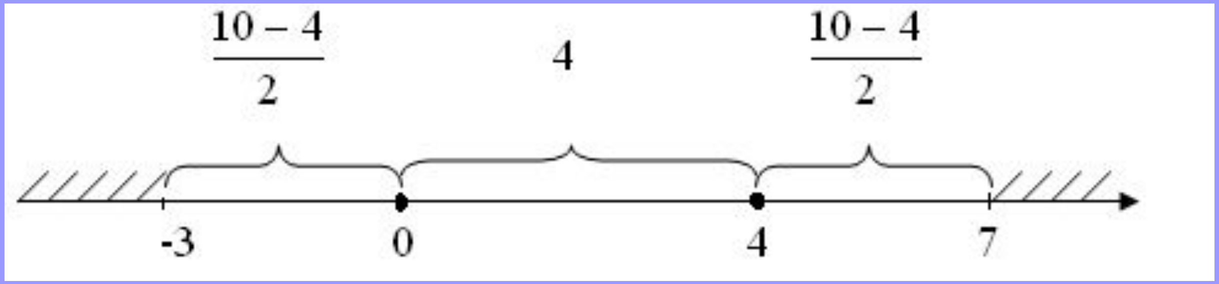
Ответ:

$$(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{3};\infty\right)$$

Пример 2. Решить уравнение:

$$\left|x^2+x-5\right|+\left|x^2+x-9\right|=10.$$

Решение. Пусть x^2+x-5. Тогда уравнение примет вид $|a|+|a-4|=10.$. Воспользуемся геометрическим смыслом модуля: найдем все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 4 равна 10.



$$|a|+|a-4|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3, \\ a=7; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x-5=-3, \\ x^2+x-5=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0, \\ x^2+x-12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-2, \\ x=-4, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: {-4, -2, 1, 3}

Пример 3: Решить уравнение:

$$x^2 + |x-2| = 2(2x-1).$$

Решение: Уравнение равносильно следующему:

$$x^2 - 4x + 2 + |x-2| \Leftrightarrow (x-2)^2 + |x-2| - 2 = 0.$$

Пусть $t = |x\text{-}2|$, $t \geq 0$. Тогда $(x-2)^2 = t^2$, и уравнение примет вид: $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -2. \end{array}\right.$

Но $t \geq 0$, поэтому $t = 1$, откуда $|x-2| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Ответ: {1, 3}

Пример 4. Решить уравнение (неравенство):

а) $|x^2+3x-20| \le |x^2-3x+2|;$

б) $|x^2-3x-2| = 3x-2;$

в) $|x^3-2x-1| \ge x^3+1;$

г) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \le 1;$

д) $|3x^2-2x-1| + |2x^2-x-1| = |x^2-x|.$

Решение: а) Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведение в квадрат является равносильным преобразование:

а)

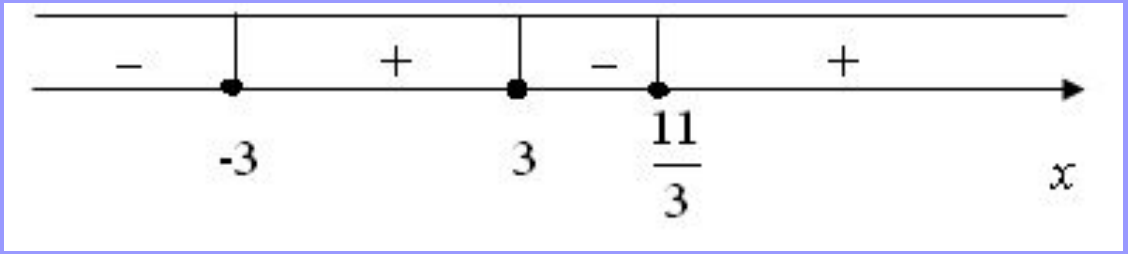
$$\left|x^2+3x-20\right| \le \left|x^2-3x+2\right|;$$

$$(x^2+3x-20)^2 \le (x^2-3x+2)^2 \Leftrightarrow (x^2+3x-20)^2-(x^2-3x+2)^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x-20-x^2+3x-2)(x^2+3x-20+x^2-3x+2)^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6x-22)(2x^2-18)^2 \le 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{11}{3}\right)(x-3)(x+3) \le 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ:

$$\left(-\infty;-3\right]\cup\left[3;\frac{11}{3}\right].$$

б) $$\left|x^2-3x-2\right|=3x-2;$$

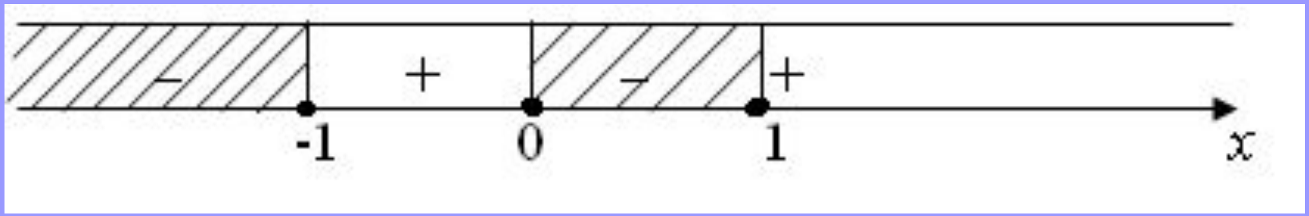
$$\begin{cases} 3x-2\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x-2=3x-2, \\ x^2-3x-2=-3x+2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6 \\ x=\pm 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: {2, 6}

в) $$\left|x^3 - 2x - 1\right| \geq x^3 + 1;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^3 - 2x - 1 \geq x^3 + 1, \\ x^3 - 2x - 1 \leq -x^3 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ 2x(x-1)(x+1) \leq 0. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство последней совокупности методом интервалов:



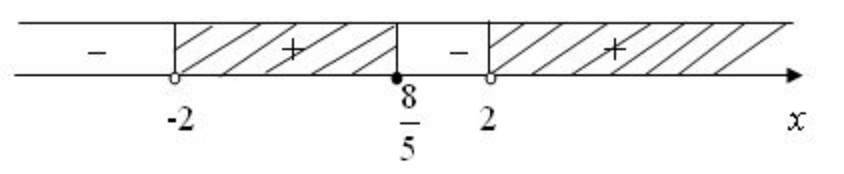
Объединяя найденные решения с решением неравенства , получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [0;1].$

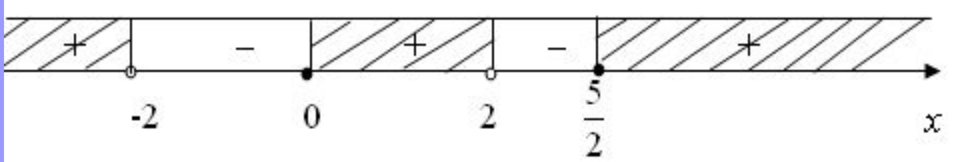
г) $$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1;$$

$$-1\le\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}-1\le 0,\\ \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-\frac{8}{5}}{(x-2)(x+2)}\ge 0, & (1)\\ \frac{x(x-\frac{5}{2})}{(x-2)(x+2)}\ge 0 & (2)\end{cases}$$

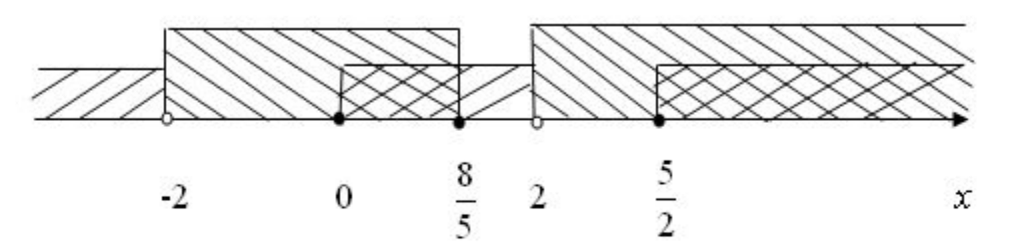
Решим (1) методом интервалов:



Решим (2) методом интервалов:



Найдем пересечение решений:



Ответ: $\left[0;\frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};\infty\right).$

д) $$\left|3x^2-2x-1\right|+\left|2x^2-x-1\right|=\left|x^2-x\right|.$$

Перепишем уравнение (так как |-a|=|a|):

$$\left|3x^2-2x-1\right|+\left|-2x^2+x+1\right|=\left|x^2-x\right|$$

Из свойства 10:

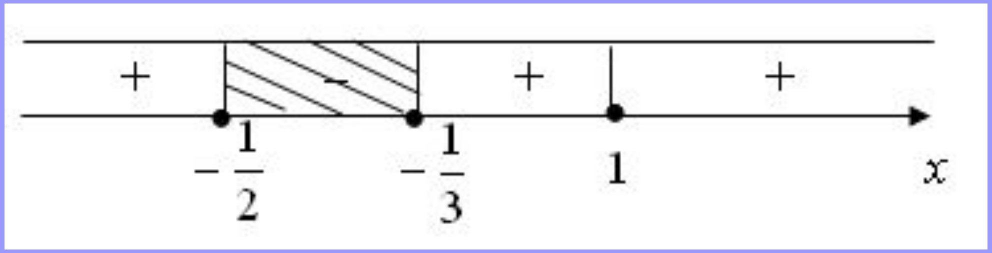
$$|a|+|b|=|a-b|\Leftrightarrow ab\geq 0$$

Тогда уравнение равносильно неравенству: $$(3x^2-2x-1)+(-2x^2+x+1)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(3x^2-2x-1)+(2x^2-x-1)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)^2\leq 0.$$

Метод интервалов дает:



Ответ: $$\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\{1\}$$

Ответы для самоконтроля

1. а) $x \geq 0$; б) $x \leq 0$; в) $x < 0$; г) $x > 0$; д) $x \geq 0$; е) $x \leq 0$. **2.** а) $(-\infty;0] \cup [2;\infty)$; б) $(-\infty;-2] \cup [0;2]$; в) $(-\infty;0) \cup (1;\infty)$; г) $(-\infty;1] \cup [2;3]$. **3.** а) $\{-2;8\}$; б) $\{-12;2\}$; в) $\{-4;0\}$; г) $\left\{\frac{1}{3};3\right\}$; д) $(-\infty;-15] \cup [1;\infty)$; е) $(2;4)$; ж) $(-\infty;-4) \cup (-1;\infty)$; з) $\{-3{,}5;1{,}5\}$; и) $[-4;5]$; к) $(-\infty;-1{,}5] \cup [3{,}5;\infty)$; л) $(-1;1)$; м) $(-\infty;-2) \cup (-1;\infty)$; н) $\{-5;-1\}$; о) $(-\infty;4]$; п) $\left\{-2;-\frac{4}{3}\right\}$; р) $\{-3;-1;2;4\}$; с) $[-3;-1] \cup [2;4]$. **4.** а) $\left\{\frac{2}{5};\frac{4}{3}\right\}$; б) $(-\infty;1] \cup [5;\infty)$; в) $\{-2;2\}$; г) $(1;\infty)$. **5.** а) $\{-1;1\}$; б) $(-\infty;-7] \cup [-5;5] \cup [7;\infty)$; в) $\{0;6\}$; г) $[-2;-1] \cup (-1;0] \cup [2;3) \cup (3;4]$.
6. а) $\{-1;1\}$; б) $\left(\frac{2}{3};4\right)$; в) $\{-3;1;3;9\}$; г) $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$; д) $\{4;18\}$; е) $\left\{-\frac{2}{3};0;1\right\}$; ж) $\left[\frac{3}{8};\frac{1}{2}\right]$; з) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; и) $\left[-1;\frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2};\infty\right)$; к) $(-\infty;-1) \cup (1;\infty)$; л) $(-\infty;1) \cup (1;\infty)$; м) $(-\infty;0] \cup [1;\infty)$; н) $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2};\infty\right)$; о) $\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{7};\infty\right)$; п) $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right] \cup \{2$