

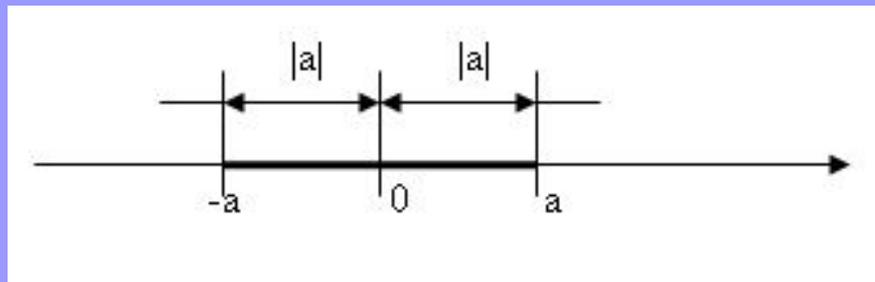
Определение

Модуль числа **a** или абсолютная величина числа **a** равна **a**, если **a** больше или равно нулю и равна **-a**, если **a** меньше нуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация

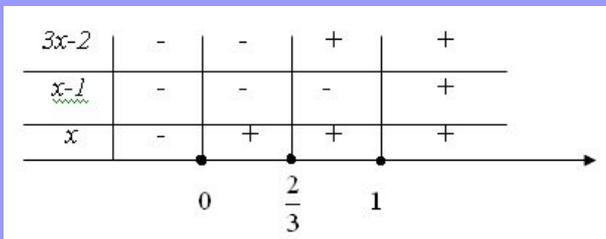
- $|a|$ означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число a , до начала отсчета.
- Если $a \neq 0$, то на координатной прямой существует две точки a и $-a$, равноудаленные от нуля, модули которых равны.
- Если $a=0$, то на координатной прямой $|a|$ изображается точкой 0 .



Пример 1. Решить неравенство:

$$|3x - 2| - 2|x - 1| \leq 2|x| - 1$$

Решение.



Рассмотрим четыре случая.

$$1) \begin{cases} x \geq 1, \\ 3x - 2 - 2x + 2 \leq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$3) \begin{cases} 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ -3x + 2 + 2x - 2 \leq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$$

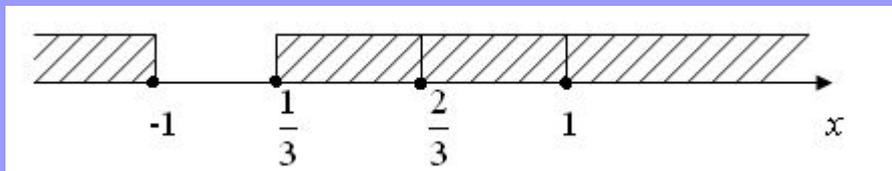
$$2) \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 1, \\ 3x - 2 + 2x - 2 \leq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 1, \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$$

$$4) \begin{cases} x < 0, \\ -3x + 2 + 2x - 2 \leq -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1$$

Объединим эти решения:

Ответ:

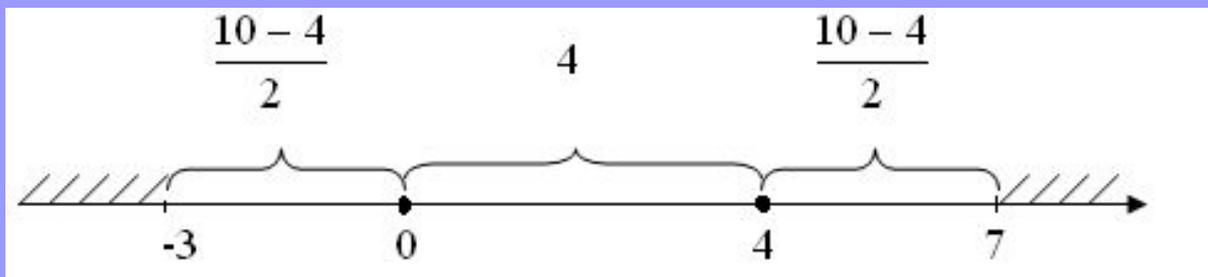
$$(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; \infty \right)$$



Пример 2. Решить уравнение:

$$\left| x^2 + x - 5 \right| + \left| x^2 + x - 9 \right| = 10.$$

Решение. Пусть $x^2 + x - 5 = a$. Тогда уравнение примет вид $|a| + |a - 4| = 10$. Воспользуемся геометрическим смыслом модуля: найдем все точки числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 0 и 4 равна 10.



$$|a| + |a - 4| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ a = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 5 = -3, \\ x^2 + x - 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -2, \\ x = -4, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\{-4, -2, 1, 3\}$

Пример 3: Решить уравнение:

$$x^2 + |x - 2| = 2(2x - 1).$$

Решение: Уравнение равносильно следующему:

$$x^2 - 4x + 2 + |x - 2| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + |x - 2| - 2 = 0.$$

Пусть $t = |x - 2|$, $t \geq 0$. Тогда $(x - 2)^2 = t^2$, и уравнение примет вид: $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -2. \end{cases}$

Но $t \geq 0$, поэтому $t = 1$, откуда $|x - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 3. \end{cases}$

Ответ: {1, 3}

Пример 4. Решить уравнение (неравенство):

а) $|x^2 + 3x - 20| \leq |x^2 - 3x + 2|;$

б) $|x^2 - 3x - 2| = 3x - 2;$

в) $|x^3 - 2x - 1| \geq x^3 + 1;$

г) $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1;$

д) $|3x^2 - 2x - 1| + |2x^2 - x - 1| = |x^2 - x|.$

Решение: а) Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведение в квадрат является равносильным преобразованием:

а)

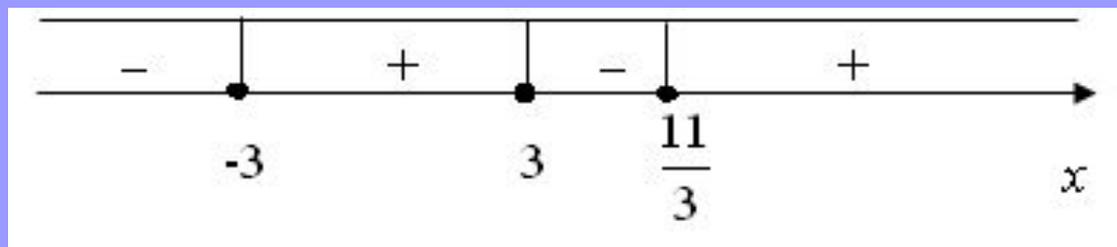
$$|x^2 + 3x - 20| \leq |x^2 - 3x + 2|;$$

$$(x^2 + 3x - 20)^2 \leq (x^2 - 3x + 2)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 20)^2 - (x^2 - 3x + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 20 - x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x - 20 + x^2 - 3x + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6x - 22)(2x^2 - 18)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{3}\right)(x - 3)(x + 3) \leq 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ:

$$\left(-\infty; -3\right] \cup \left[3; \frac{11}{3}\right].$$

$$6) \quad |x^2 - 3x - 2| = 3x - 2;$$

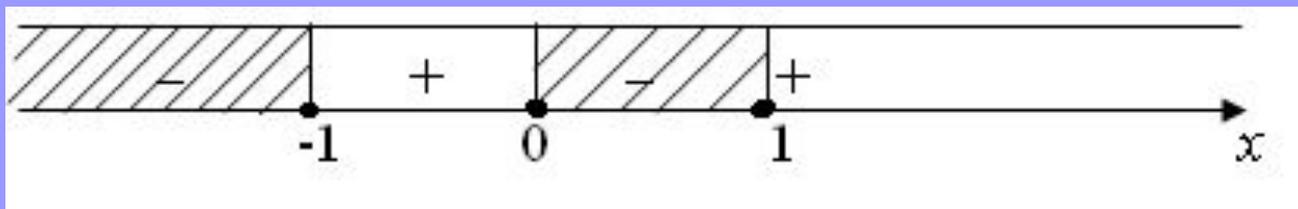
$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 3x - 2 = 3x - 2, \\ x^2 - 3x - 2 = -3x + 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ \begin{cases} x = 0, \\ x = 6 \\ x = \pm 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: {2, 6}

$$в) \quad \left| x^3 - 2x - 1 \right| \geq x^3 + 1;$$

$$\begin{cases} x^3 - 2x - 1 \geq x^3 + 1, \\ x^3 - 2x - 1 \leq -x^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ 2x(x-1)(x+1) \leq 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство последней совокупности методом интервалов:



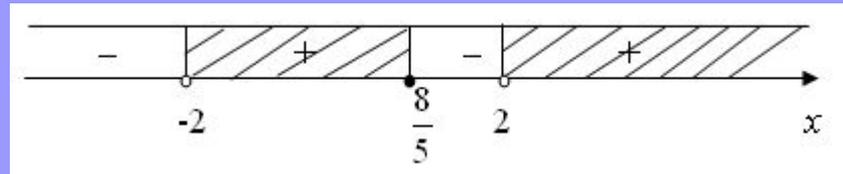
Объединяя найденные решения с решением неравенства , получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$.

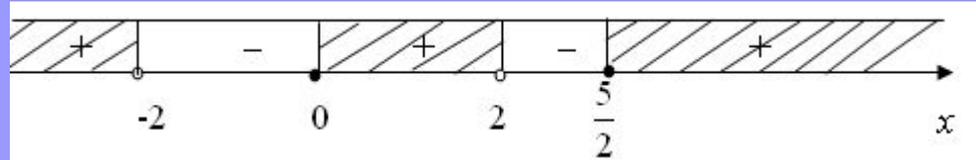
$$\text{г) } \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1;$$

$$-1 \leq \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} - 1 \leq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - \frac{8}{5}}{(x-2)(x+2)} \geq 0_{(1)} \\ \frac{x(x - \frac{5}{2})}{(x-2)(x+2)} \geq 0_{(2)} \end{cases}$$

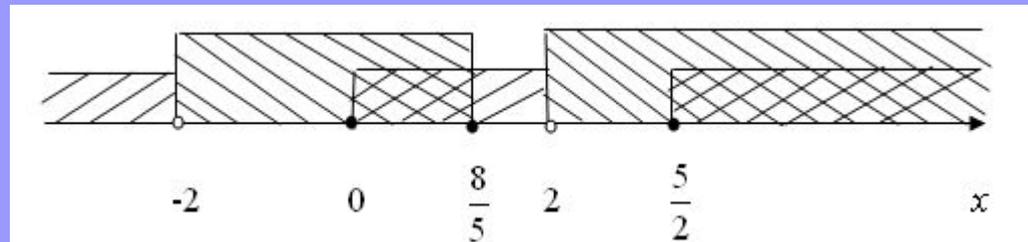
Решим (1) методом интервалов:



Решим (2) методом интервалов:



Найдем пересечение решений:



Ответ: $\left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$.

$$д) \quad |3x^2 - 2x - 1| + |2x^2 - x - 1| = |x^2 - x|.$$

Перепишем уравнение (так как $|-a|=|a|$):

$$|3x^2 - 2x - 1| + |-2x^2 + x + 1| = |x^2 - x|$$

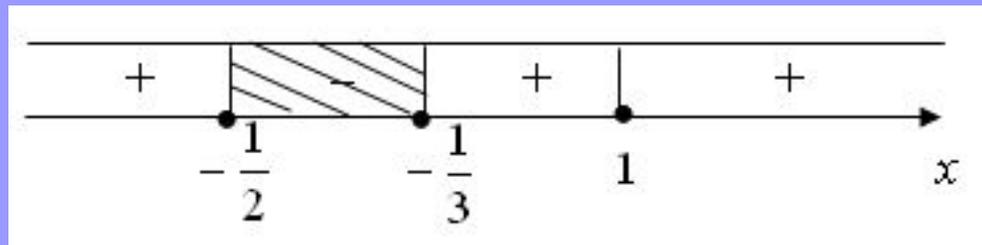
Из свойства 10:

$$|a| + |b| = |a - b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

Тогда уравнение равносильно неравенству: $(3x^2 - 2x - 1) + (-2x^2 + x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (3x^2 - 2x - 1) + (2x^2 - x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1)^2 \leq 0.$$

Метод интервалов дает:



Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \{1\}$

Ответы для самоконтроля

1. а) $x \geq 0$; б) $x \leq 0$; в) $x < 0$; г) $x > 0$; д) $x \geq 0$; е) $x \leq 0$.
2. а) $(-\infty; 0] \cup [2; \infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$;
в) $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$; г) $(-\infty; 1] \cup [2; 3]$.
3. а) $\{-2; 8\}$; б) $\{-12; 2\}$; в) $\{-4; 0\}$; г) $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$; д) $(-\infty; -15] \cup [1; \infty)$;
е) $(2; 4)$; ж) $(-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$; з) $\{-3, 5; 1, 5\}$; и) $[-4; 5]$; к) $(-\infty; -1, 5] \cup [3, 5; \infty)$; л) $(-1; 1)$; м) $(-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$;
н) $\{-5; -1\}$; о) $(-\infty; 4]$; п) $\left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$; р) $\{-3; -1; 2; 4\}$; с) $[-3; -1] \cup [2; 4]$.
4. а) $\left\{\frac{2}{5}; \frac{4}{3}\right\}$; б) $(-\infty; 1] \cup [5; \infty)$;
в) $\{-2; 2\}$; г) $(1; \infty)$.
5. а) $\{-1; 1\}$; б) $(-\infty; -7] \cup [-5; 5] \cup [7; \infty)$; в) $\{0; 6\}$; г) $[-2; -1] \cup (-1; 0] \cup [2; 3) \cup (3; 4]$.
6. а) $\{-1; 1\}$; б) $\left(\frac{2}{3}; 4\right)$; в) $\{-3; 1; 3; 9\}$; г) $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$; д) $\{4; 18\}$; е) $\left\{-\frac{2}{3}; 0; 1\right\}$; ж) $\left[\frac{3}{8}; \frac{1}{2}\right]$; з) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; и) $\left[-1; \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$;
к) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; л) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$; м) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$; н) $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$; о) $\left(-\infty; -\frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{7}; \infty\right)$; п) $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] \cup \{2\}$