

# Тема урока: Применение определенного интеграла при решении геометрических и физических задач

**Задание 1.** Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

$$1) \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$4) \int_{-1}^0 e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2} \Big|_{-1}^0 = \boxed{\frac{e^2 - 1}{2}}$$

$$2) \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_{-1}^1 = \\ = 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = \boxed{2\frac{2}{3}}$$

$$5) \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \boxed{\ln 2}$$

$$3) \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \Big|_1^4 = \boxed{4\frac{2}{3}}$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{0}$$

**Задание 2.** Вычислить определенный интеграл методом замены переменной интегрирования.

1)

$$\int_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2 - 7} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 7 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^9 \sqrt{t} dt = \frac{\sqrt{t^3}}{3} \Big|_1^9 = 9 - \frac{1}{3} = \boxed{8\frac{2}{3}}$$

2)

$$\int_{-1}^2 \frac{2x dx}{(2x^2 + 1)^2} = \left| \begin{array}{l} 2x^2 + 1 = t \\ 4x dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_3^9 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} \Big|_3^9 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

3)

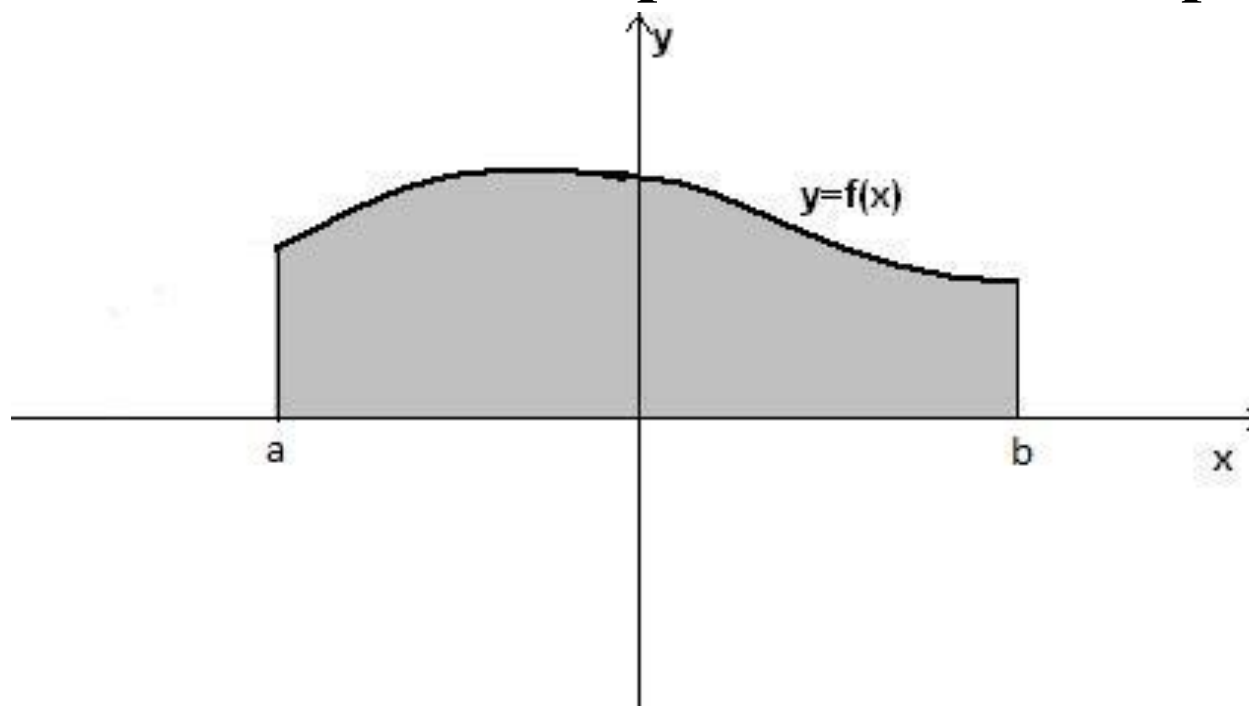
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(\sin x)^3} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4)

$$\int_1^8 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}} = \left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} \\ du = dx \\ v = \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = 3x+1 \\ dt = 3dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \end{array} \right| = \frac{2x}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_1^8 - \frac{2}{3} \int_1^8 \sqrt{3x+1} dx =$$

$$= \frac{2x}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_1^8 - \frac{4}{27} \sqrt{(3x+1)^3} \Big|_1^8 = \frac{16}{3} \cdot 5 - \frac{4}{3} - \frac{4}{27} \cdot 125 + \frac{32}{27} = \frac{216}{27} = \boxed{8}$$

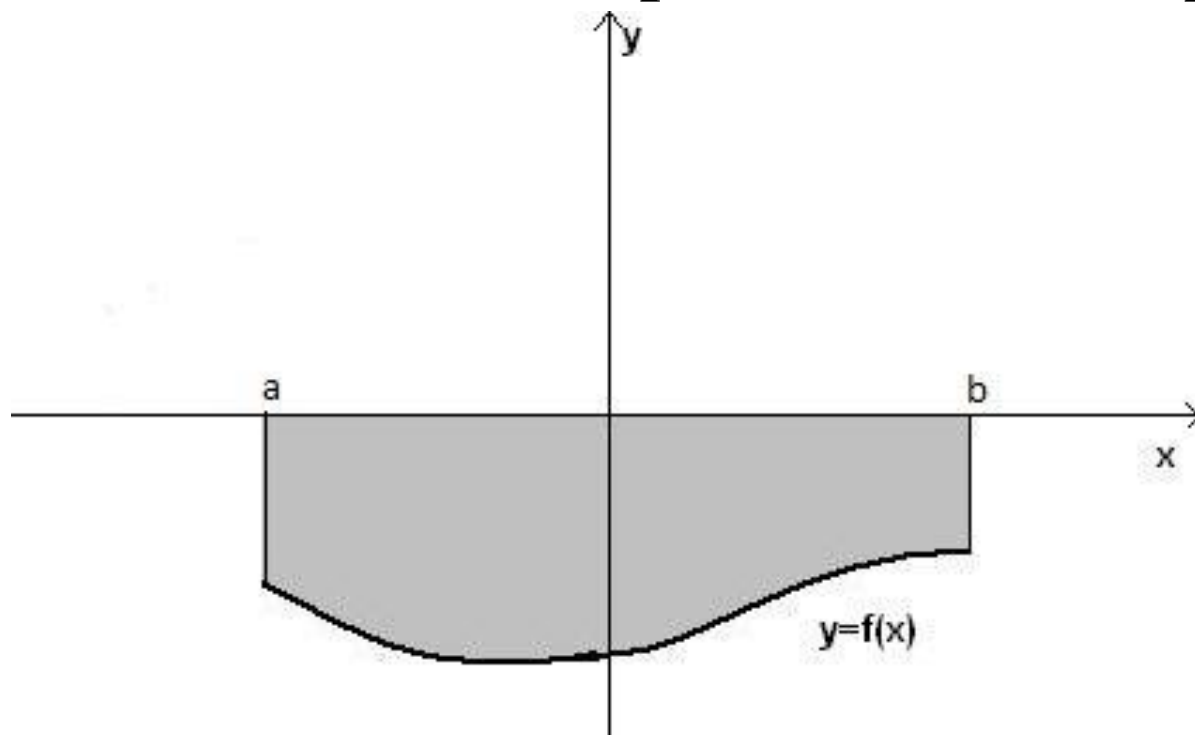
# Вычисление площади криволинейной трапеции



Если  $y = f(x)$  - непрерывная функция,  $f(x) \in [a, b]$ , то

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

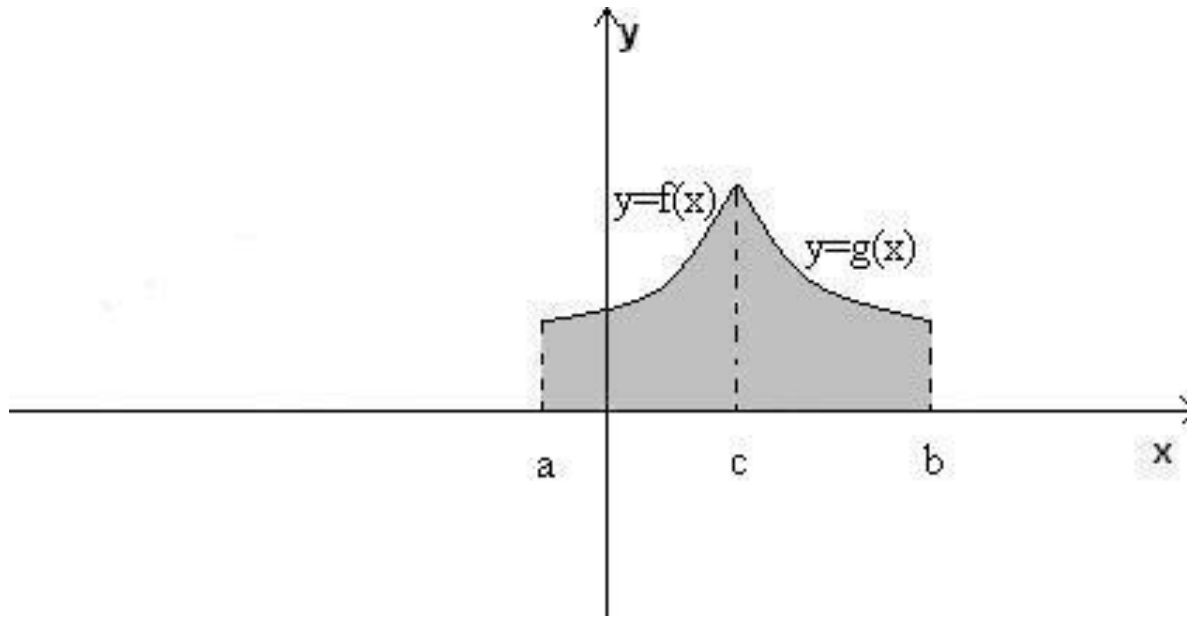
# Вычисление площади криволинейной трапеции



Если  $y = f(x)$  - непрерывная функция,  $f(x) \leq 0$  на  $[a, b]$ , то

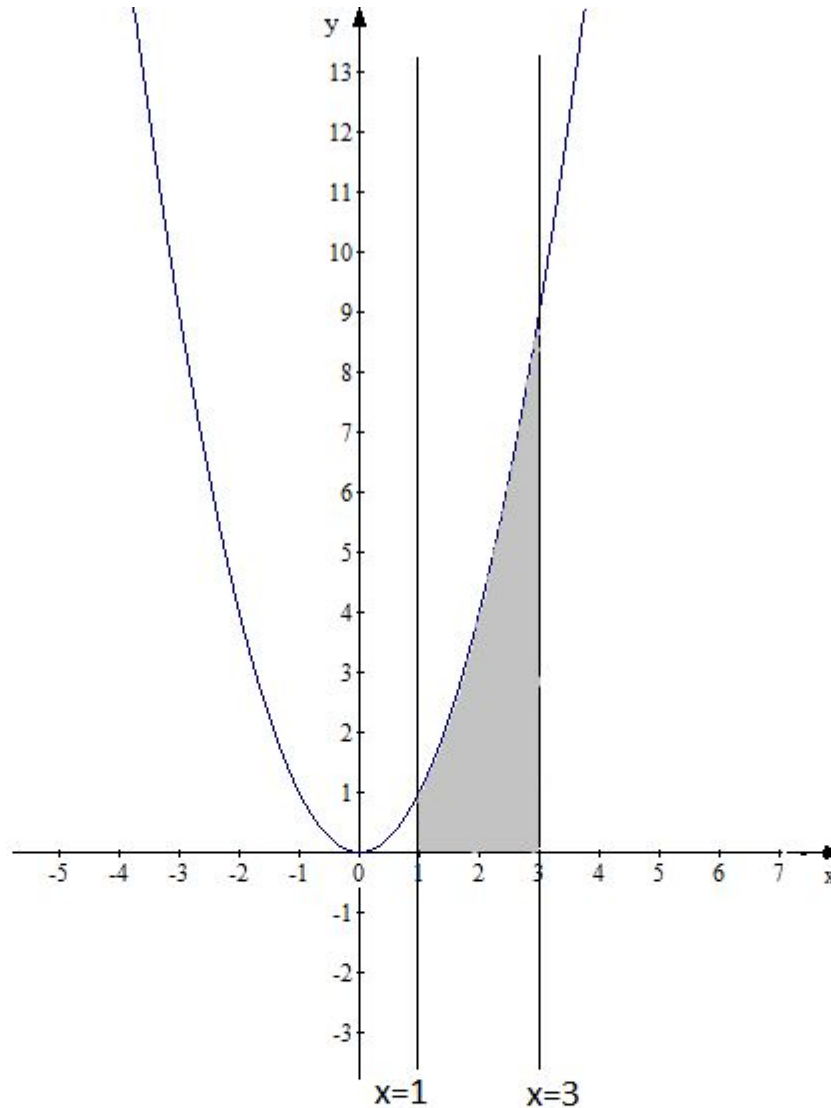
$$S = -\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

# Вычисление площади криволинейной трапеции



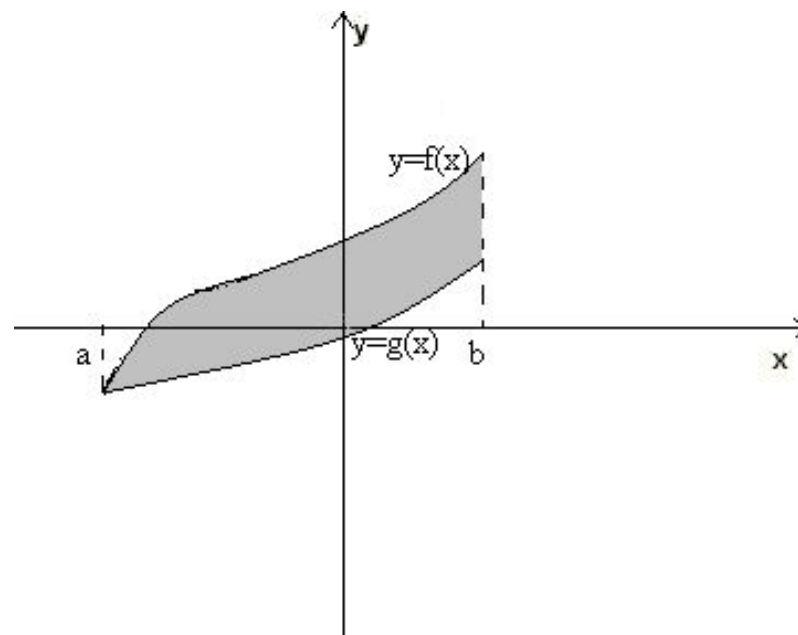
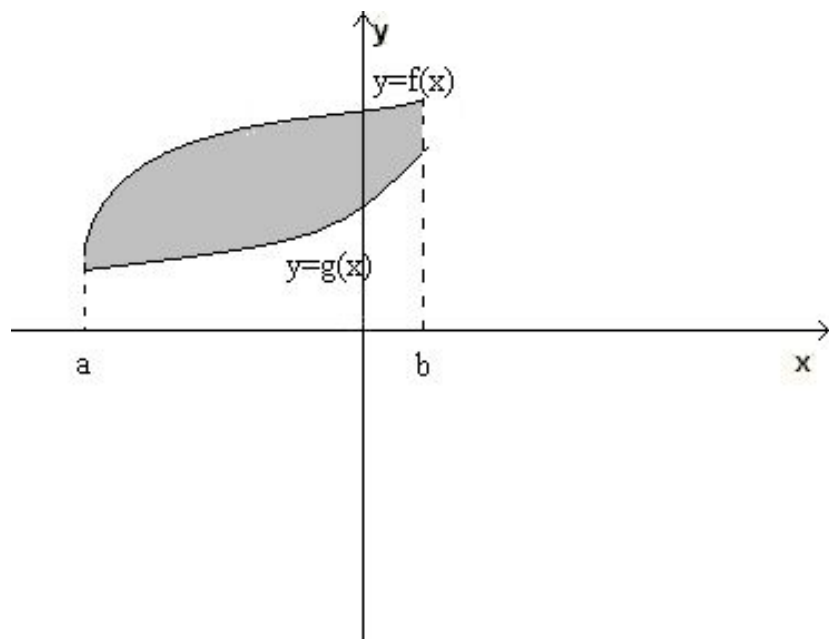
Если  $y = f(x)$  непрерывная на  $[a; c]$ ,  $y = g(x)$  непрерывная на  $[c; b]$   
где  $c \in [a; b]$  то  $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$

**Пример №1: Найти площадь фигуры, ограниченной параболой  $y=x^2$ , прямыми  $x=1$ ,  $x=3$  и осью  $Ox$**





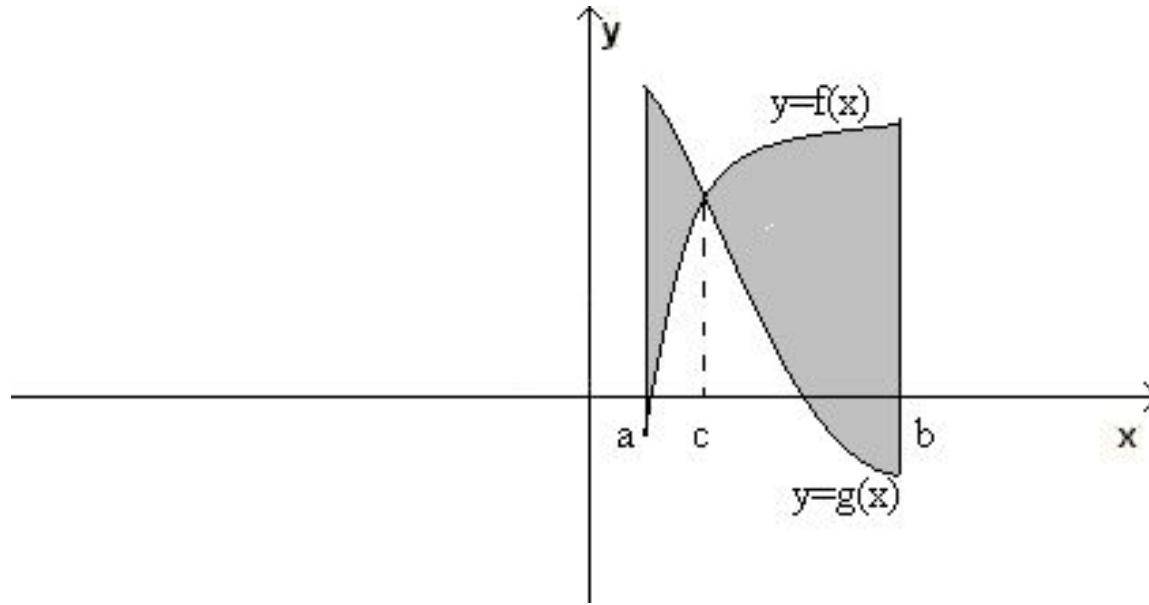
# Вычисление площадей плоских фигур



Если  $y = f(x), y = g(x)$  — непрерывные функции на  $[a; b]$ ,

$$f(x) \geq g(x) \text{ на } [a; b], \text{ то } S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

# Вычисление площадей плоских фигур

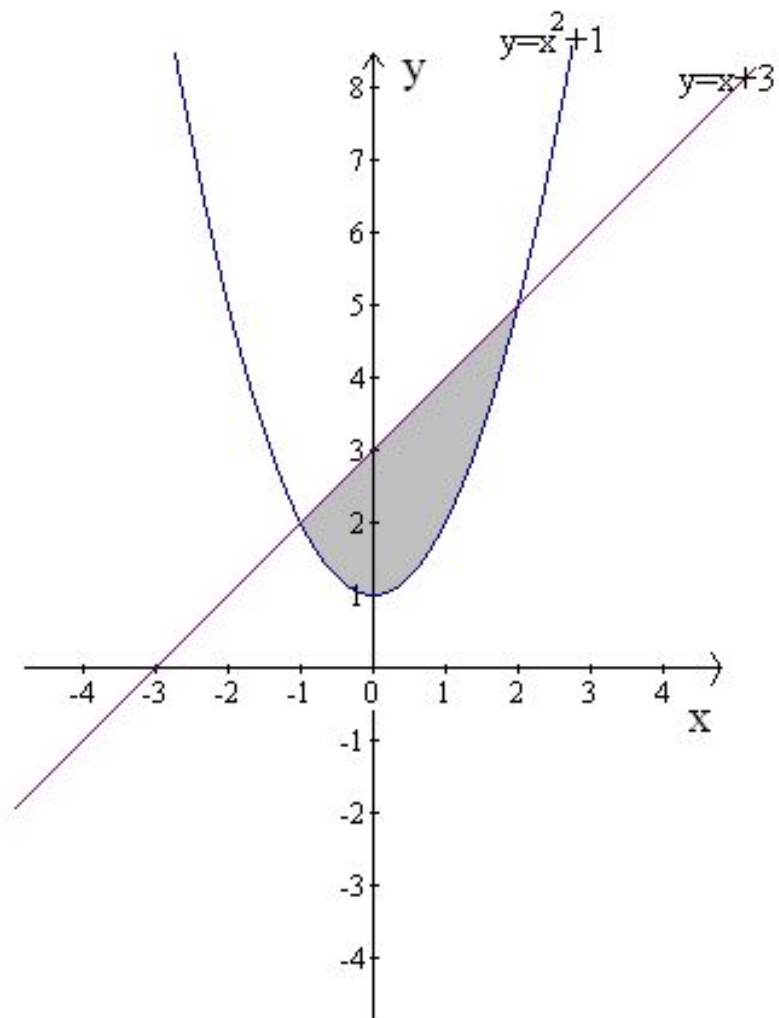


Если  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  непрерывные функции на  $[a; b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$  на  $[c; b]$ ,  
в],

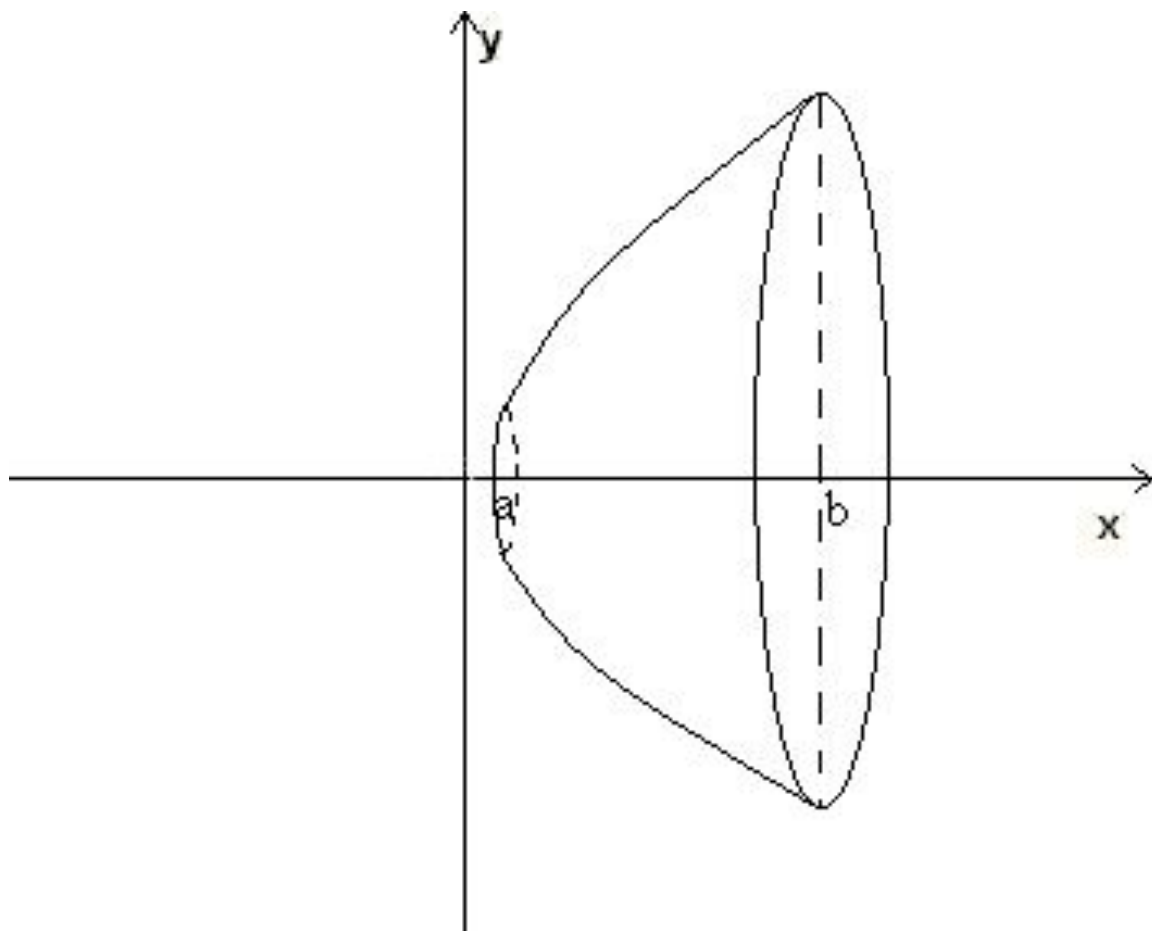
где  $c \in [a; b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  на  $[a; c]$ , то

$$S = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x+3$ ,  $y=x^2+1$

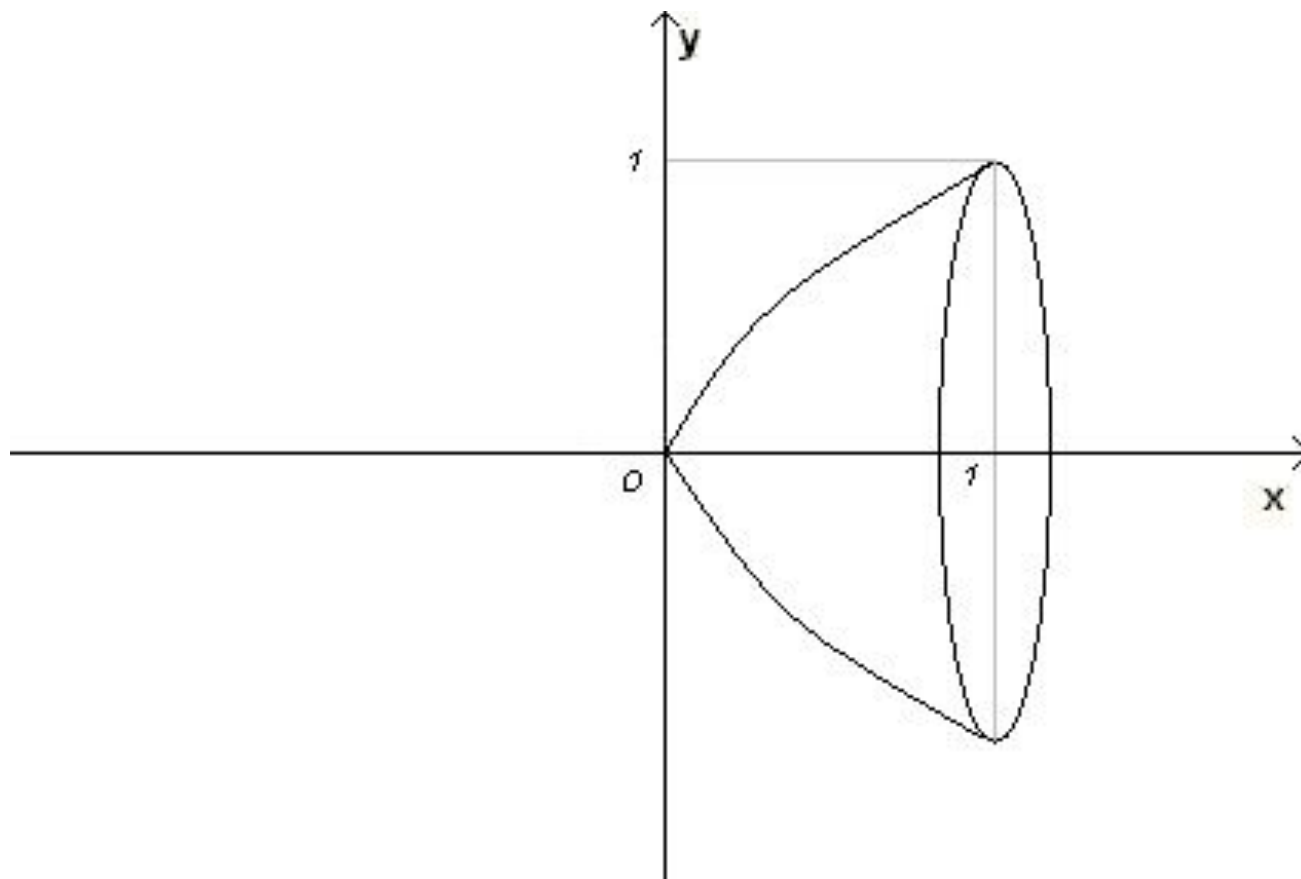


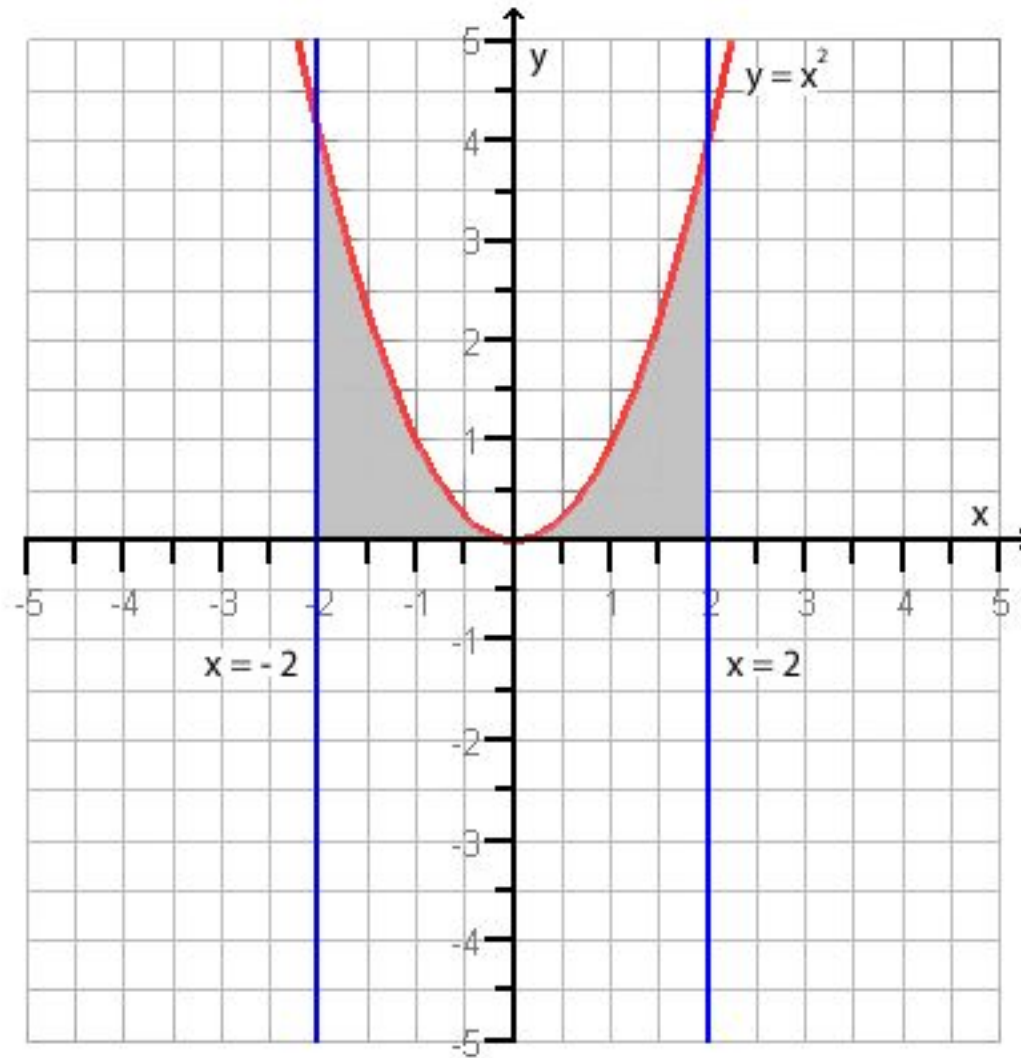
# Вычисление объемов тел вращения



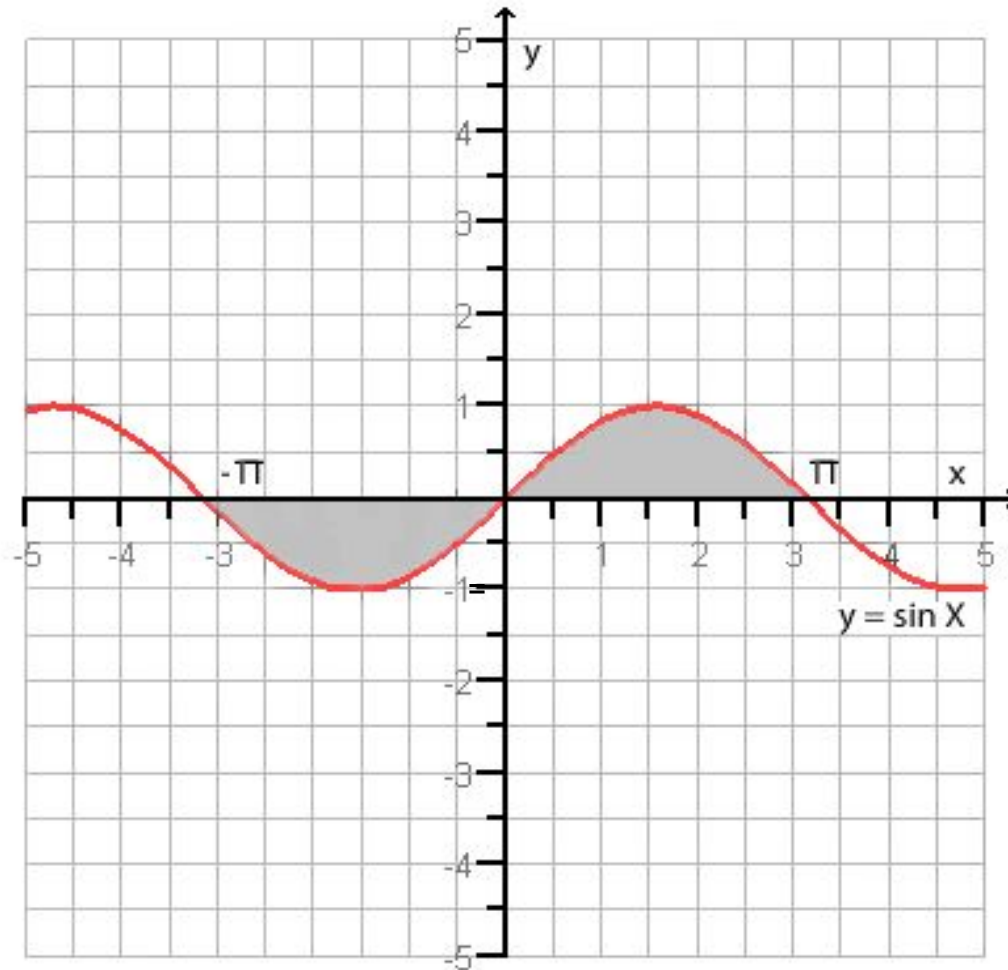
$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  плоской фигуры, ограниченной линиями  $y^2=x$ ,  $x=1$

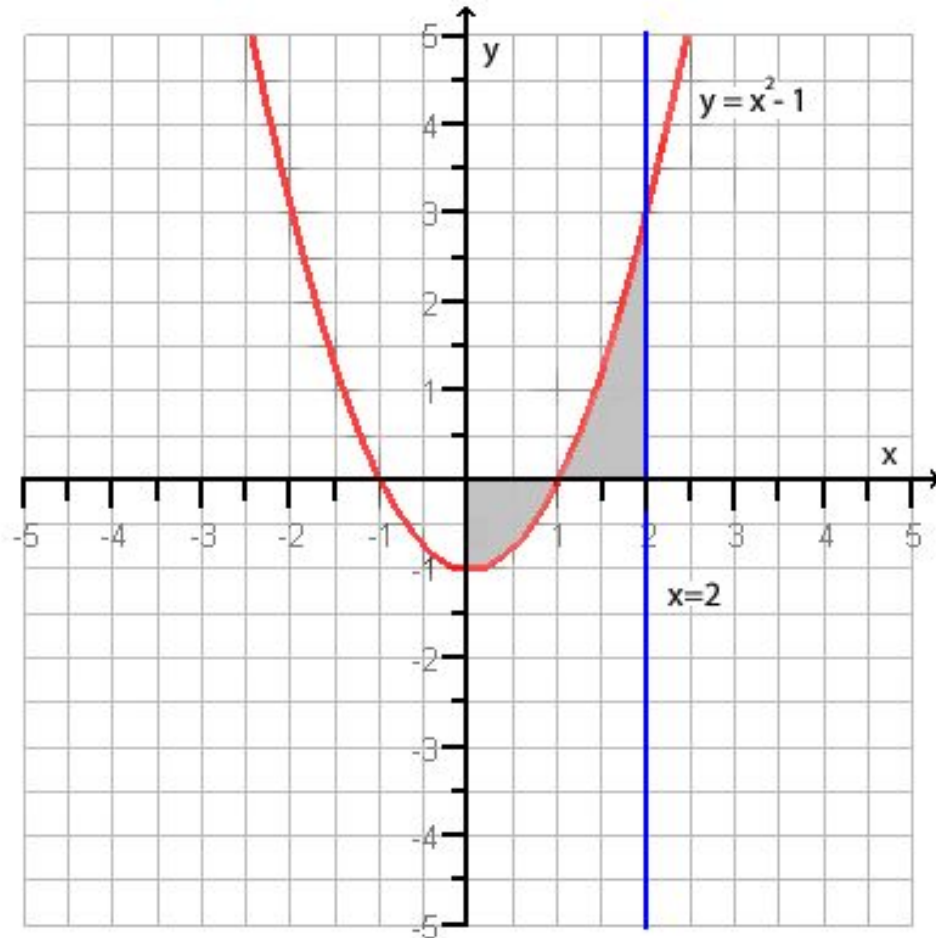




$$S = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3} = 5 \frac{1}{3}$$

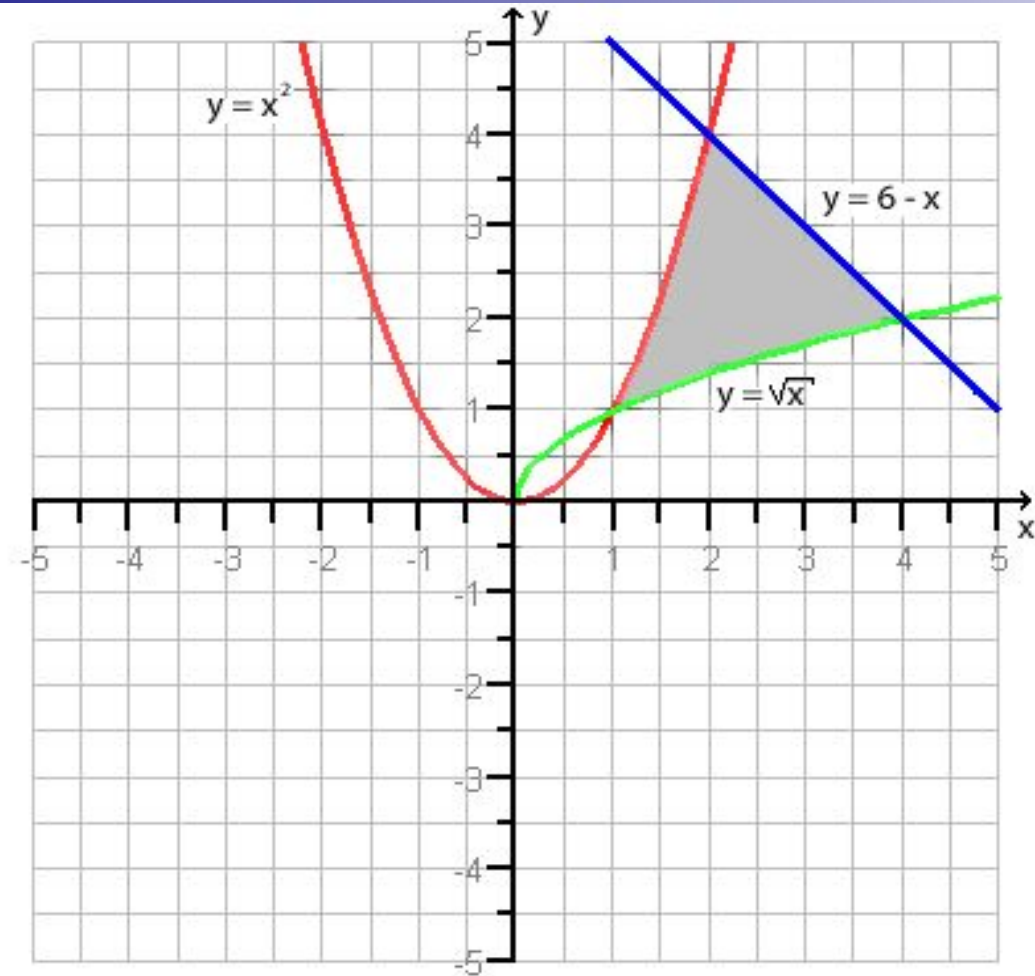


$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\pi} = -2(\cos \pi - \cos 0) = -2(-1 - 1) = 4$$



$$\begin{aligned}
 S &= - \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_0^1 + \\
 &+ \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \Bigg|_1^2 = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 2
 \end{aligned}$$





$$S = \int_1^2 x^2 dx + \int_2^4 (6 - x) dx - \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

# **Домашнее задание:**

**1. Прочитать параграф 5**

**2. Выполнить примеры:**

**4.3(2;4)**

**4.4(2;4)**

**4.10(3)**

**5.3 (1)**