

Тема урока: Применение определенного интеграла при решении геометрических и физических задач

Задание 1. Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

$$1) \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$4) \int_{-1}^0 e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2} \Big|_{-1}^0 = \boxed{\frac{e^2 - 1}{2}}$$

$$2) \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_{-1}^1 = \\ = 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = \boxed{2\frac{2}{3}}$$

$$5) \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \boxed{\ln 2}$$

$$3) \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \Big|_1^4 = \boxed{4\frac{2}{3}}$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{0}$$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной интегрирования.

1)

$$\int_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2 - 7} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 7 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^9 \sqrt{t} dt = \frac{\sqrt{t^3}}{3} \Big|_1^9 = 9 - \frac{1}{3} = \boxed{8\frac{2}{3}}$$

2)

$$\int_{-1}^2 \frac{2x dx}{(2x^2 + 1)^2} = \left| \begin{array}{l} 2x^2 + 1 = t \\ 4x dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_3^9 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} \Big|_3^9 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

3)

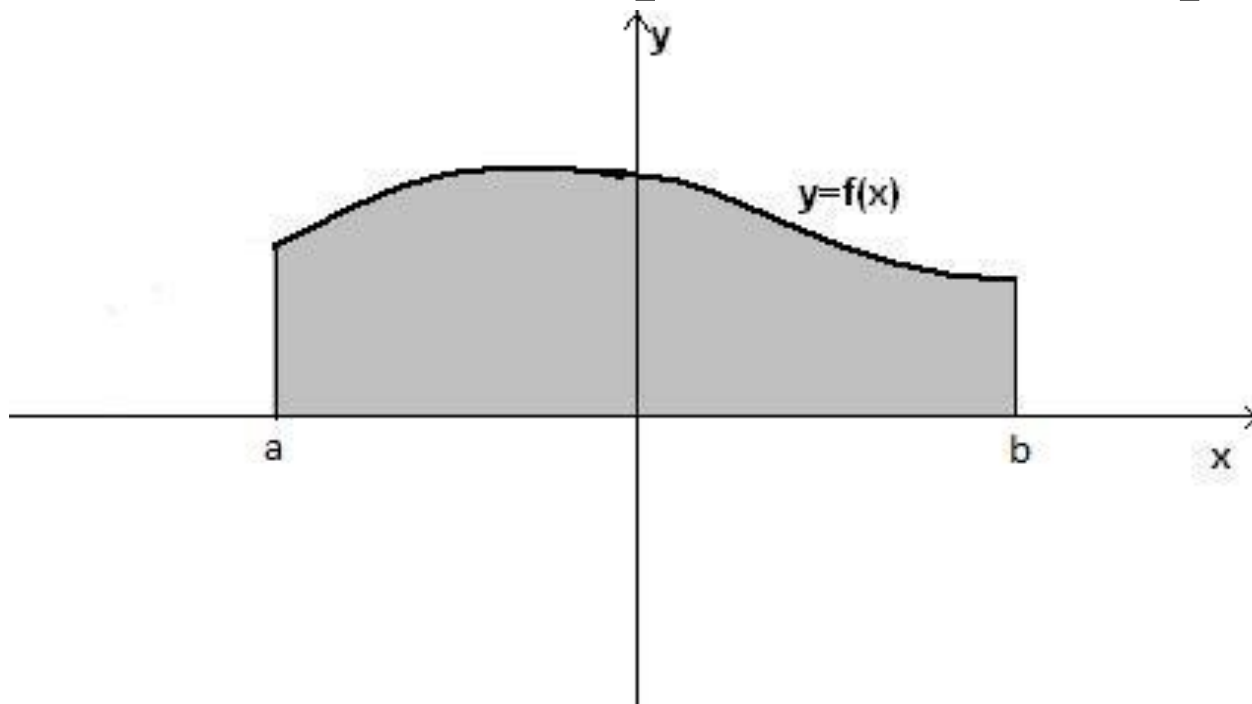
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(\sin x)^3} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4)

$$\int_1^8 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}} = \left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} \\ du = dx \\ v = \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = 3x+1 \\ dt = 3dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \end{array} \right| = \frac{2x}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_1^8 - \frac{2}{3} \int_1^8 \sqrt{3x+1} dx =$$

$$= \frac{2x}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_1^8 - \frac{4}{27} \sqrt{(3x+1)^3} \Big|_1^8 = \frac{16}{3} \cdot 5 - \frac{4}{3} - \frac{4}{27} \cdot 125 + \frac{32}{27} = \frac{216}{27} = \boxed{8}$$

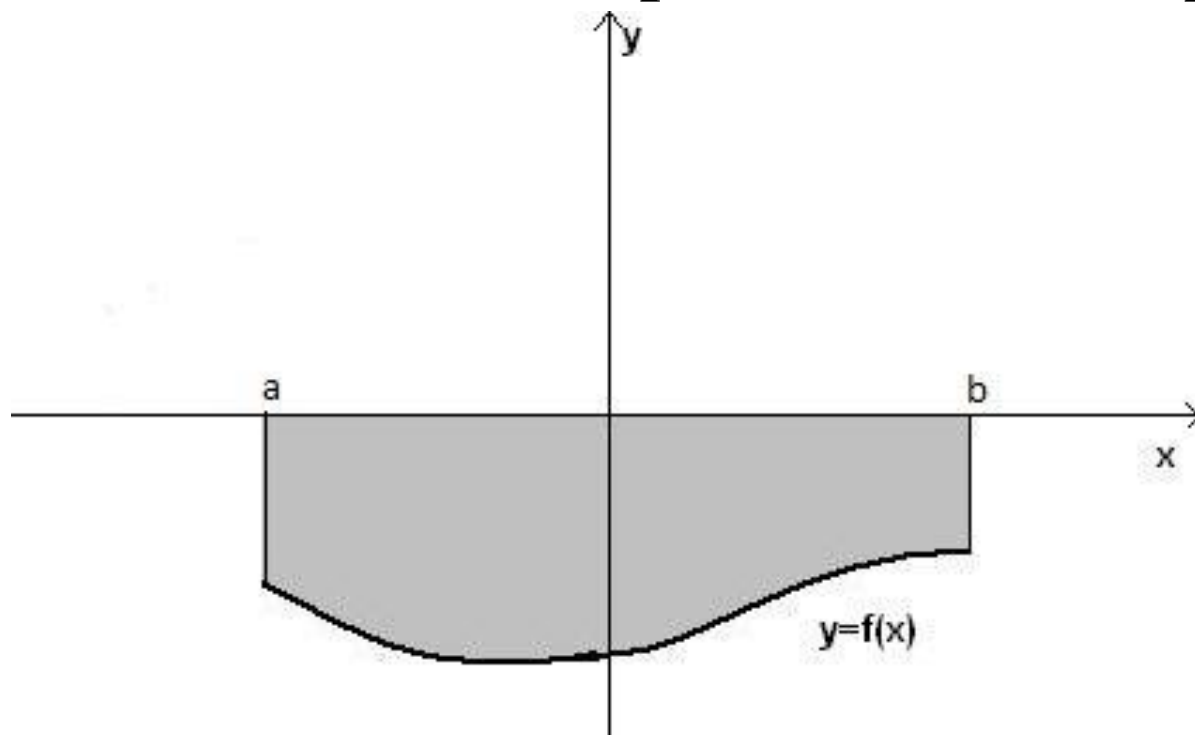
Вычисление площади криволинейной трапеции



Если $y = f(x)$ - непрерывная функция, $f(x) \in [a, b]$, то

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

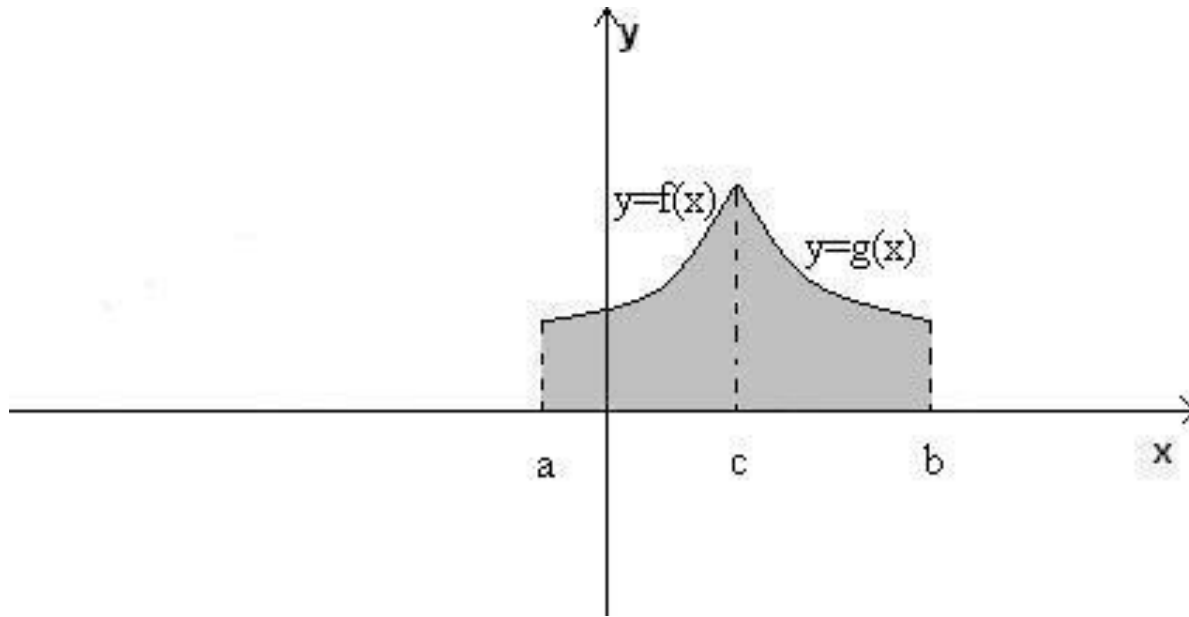
Вычисление площади криволинейной трапеции



Если $y = f(x)$ - непрерывная функция, $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то

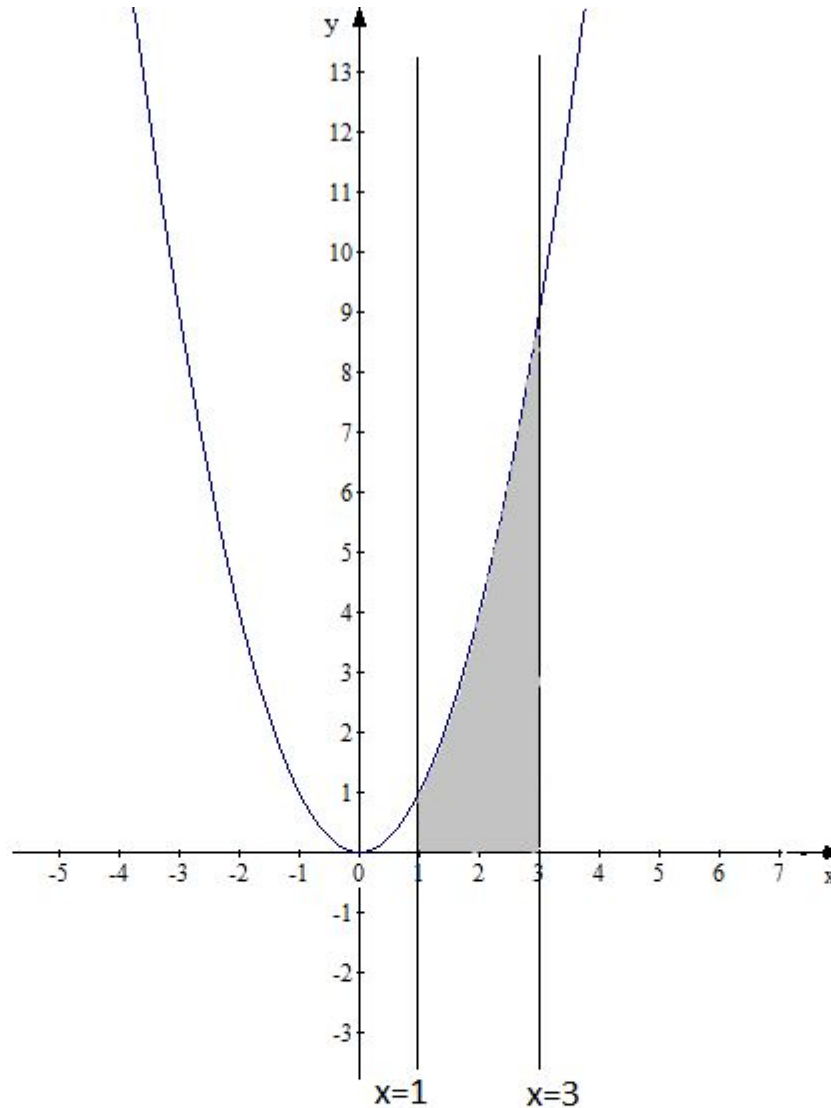
$$S = -\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Вычисление площади криволинейной трапеции

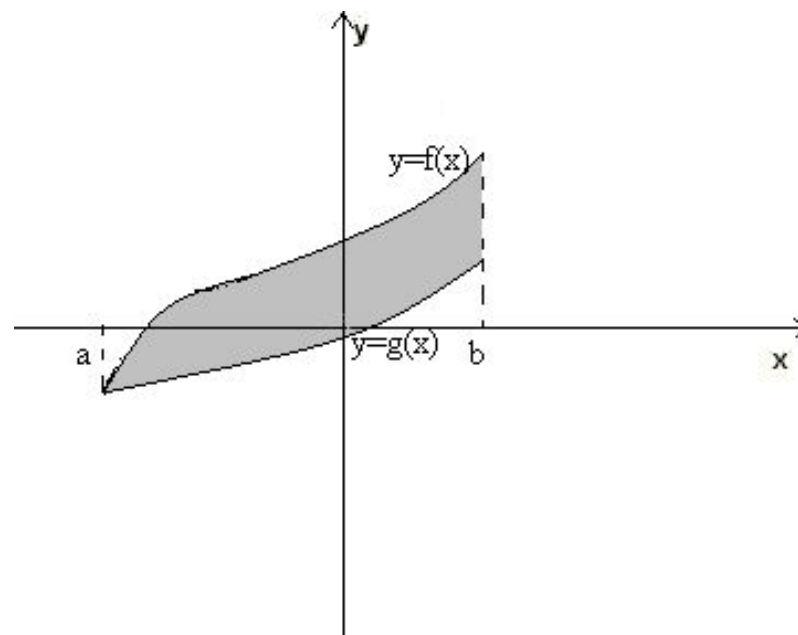
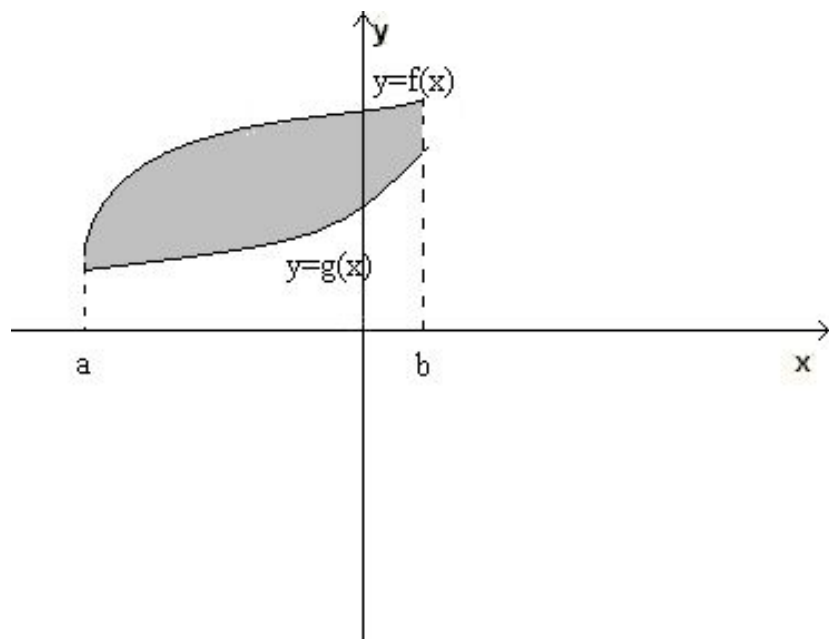


Если $y = f(x)$ непрерывная на $[a; c]$, $y = g(x)$ непрерывная на $[c; b]$
где $c \in [a; b]$ $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$

Пример №1: Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, прямыми $x=1$, $x=3$ и осью Ox



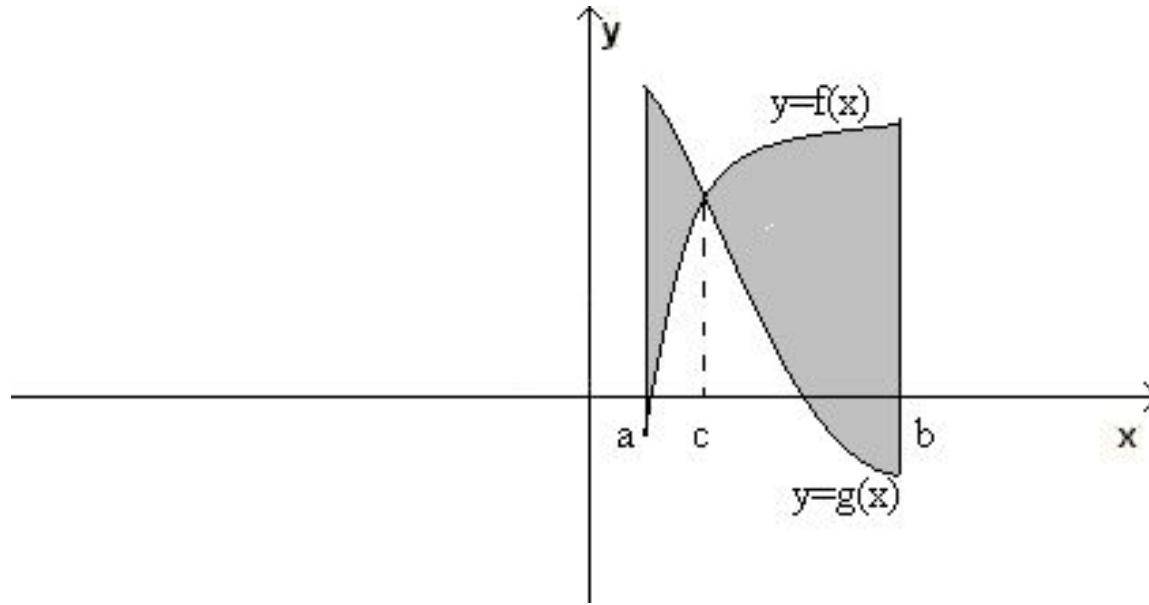
Вычисление площадей плоских фигур



Если $y = f(x), y = g(x)$ — непрерывные функции на $[a; b]$,

$$f(x) \geq g(x) \text{ на } [a; b], \text{ то } S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Вычисление площадей плоских фигур

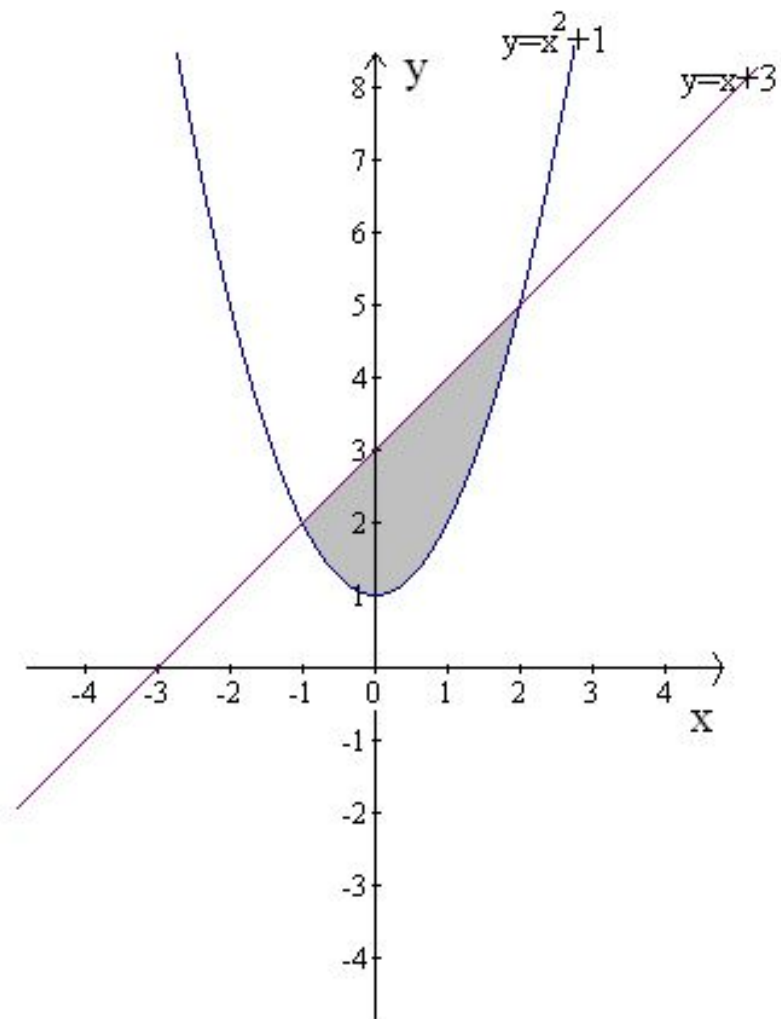


Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ непрерывные функции на $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$ на $[c; b]$,
в],

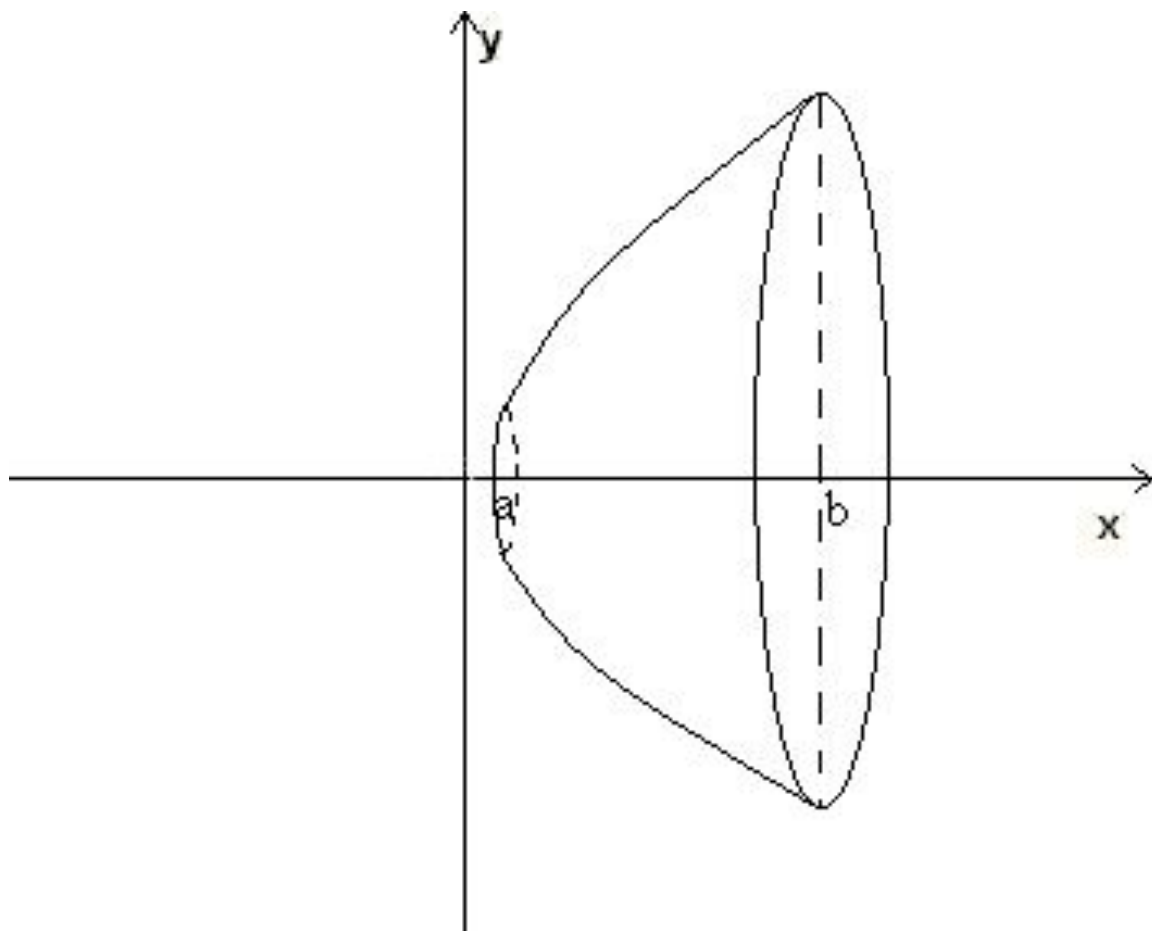
где $c \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$ на $[a; c]$, то

$$S = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x+3$, $y=x^2+1$

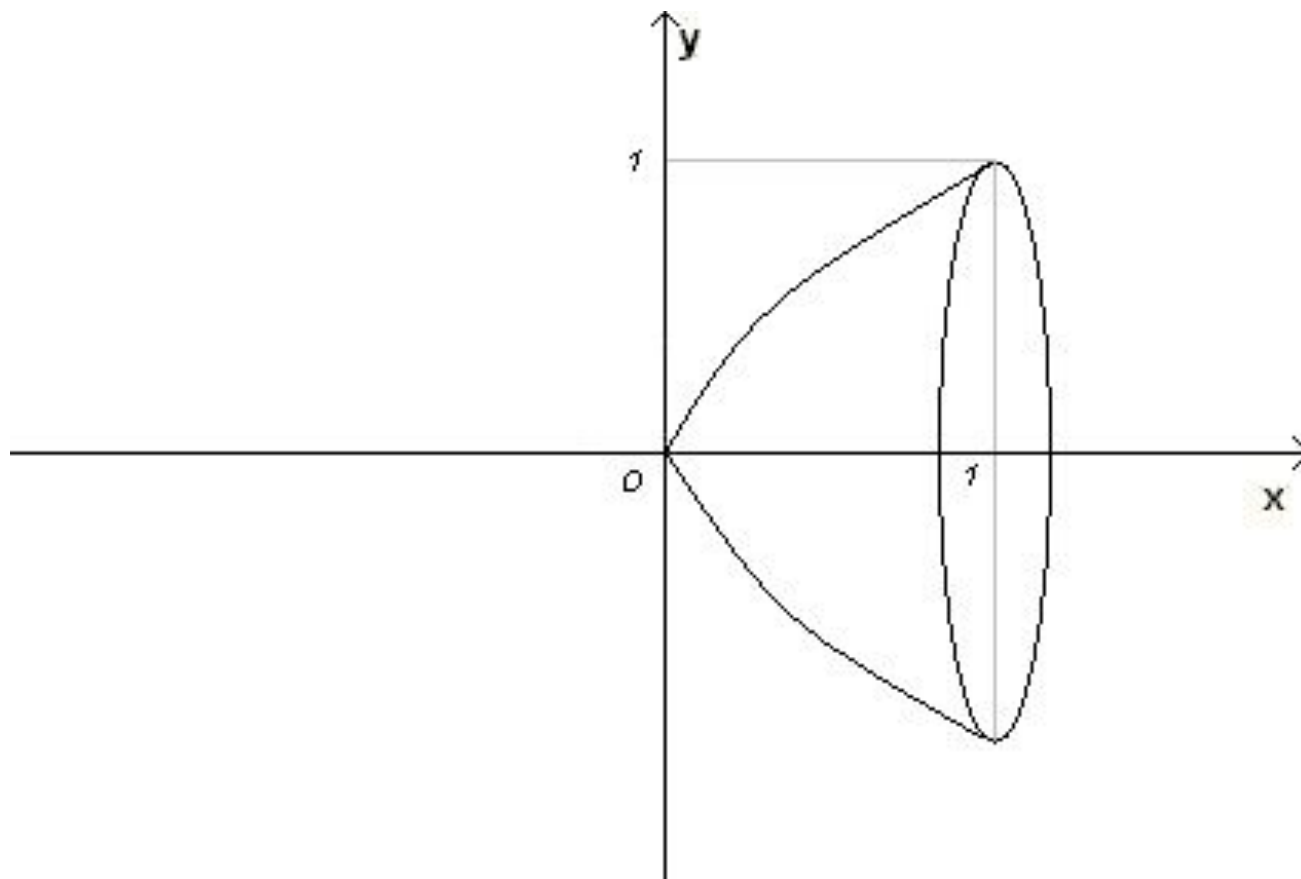


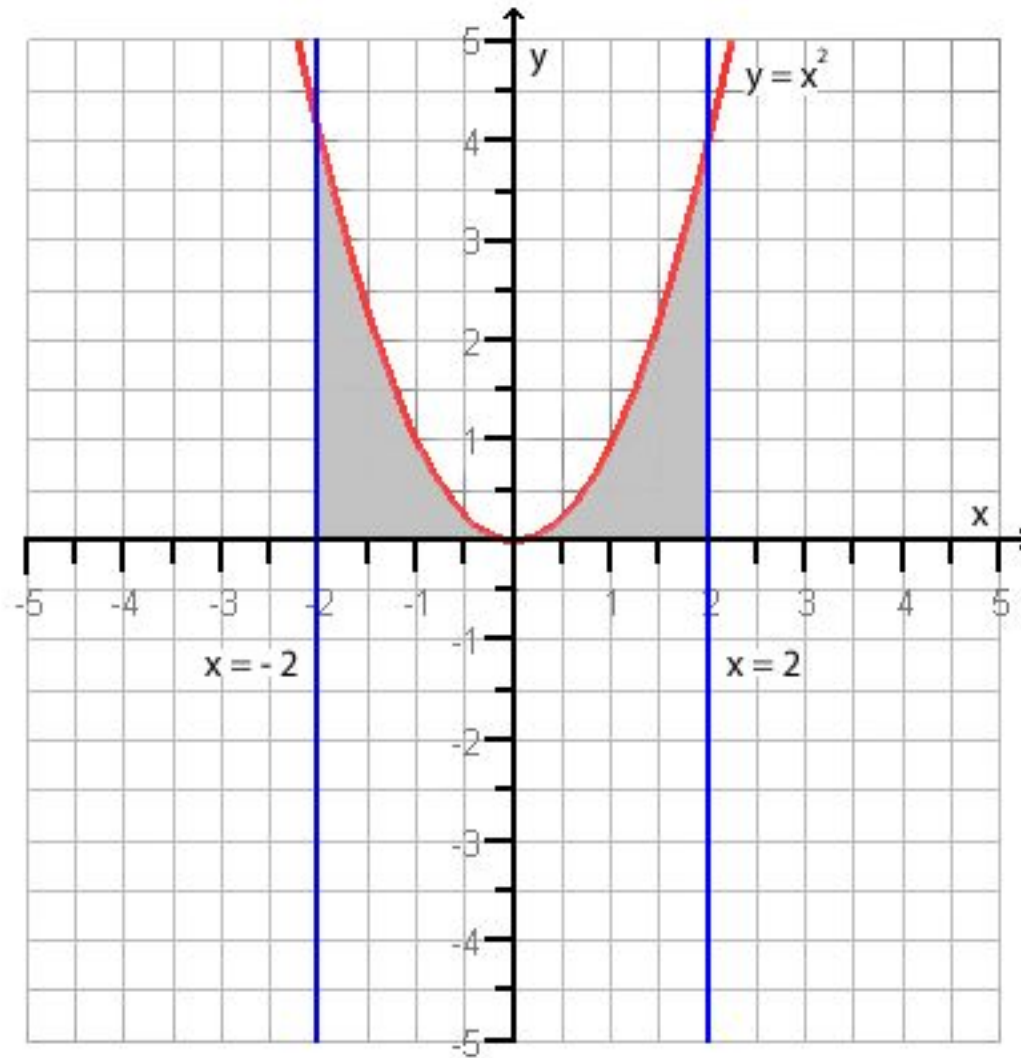
Вычисление объемов тел вращения



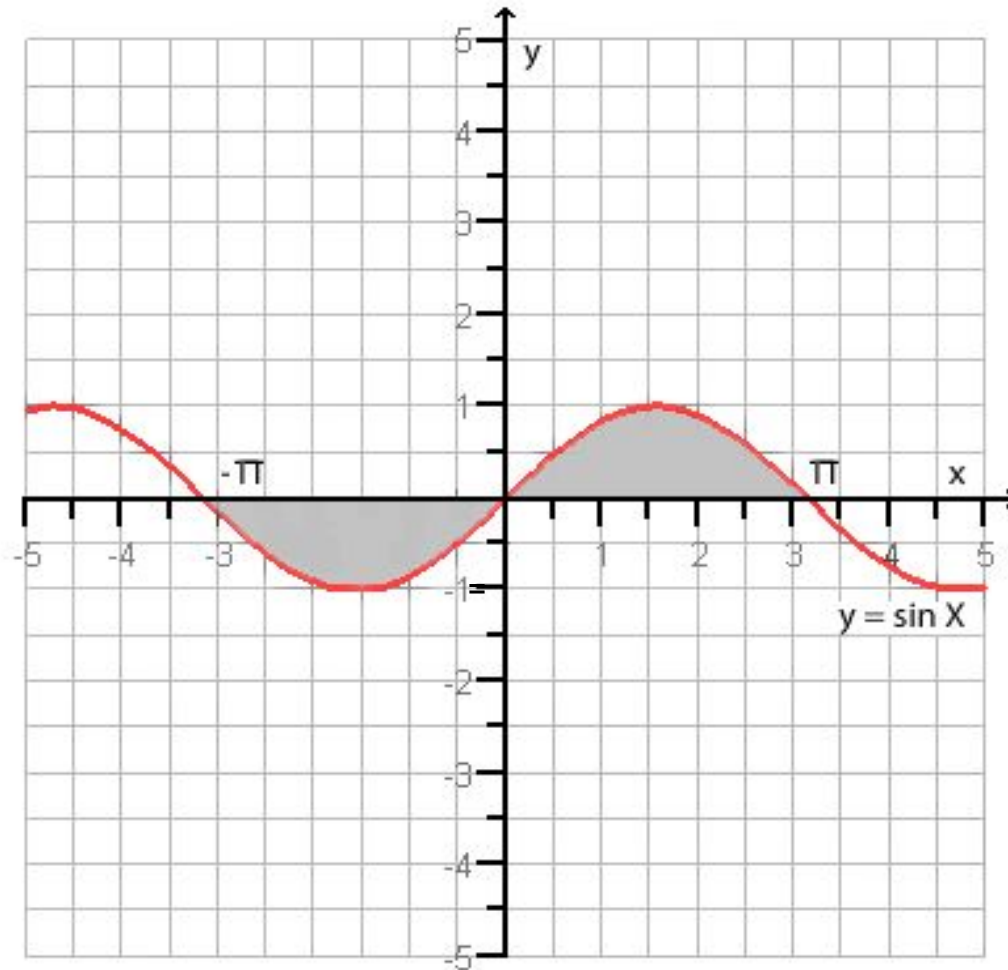
$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$, $x=1$

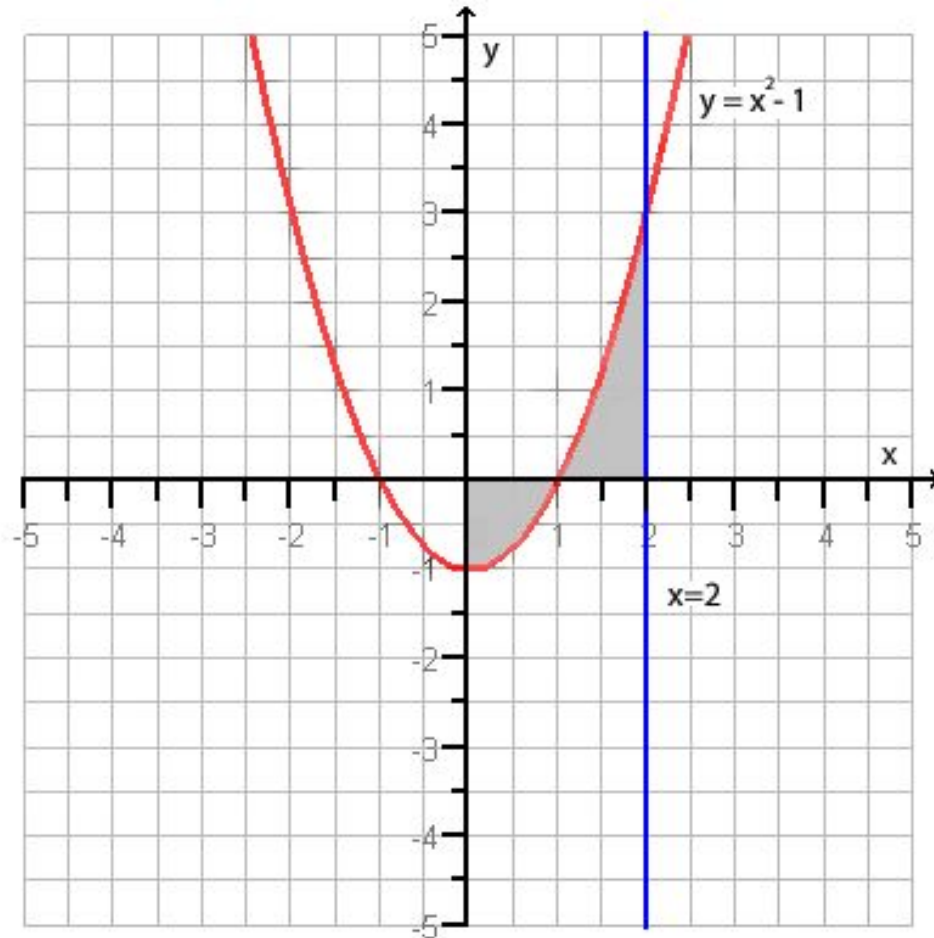




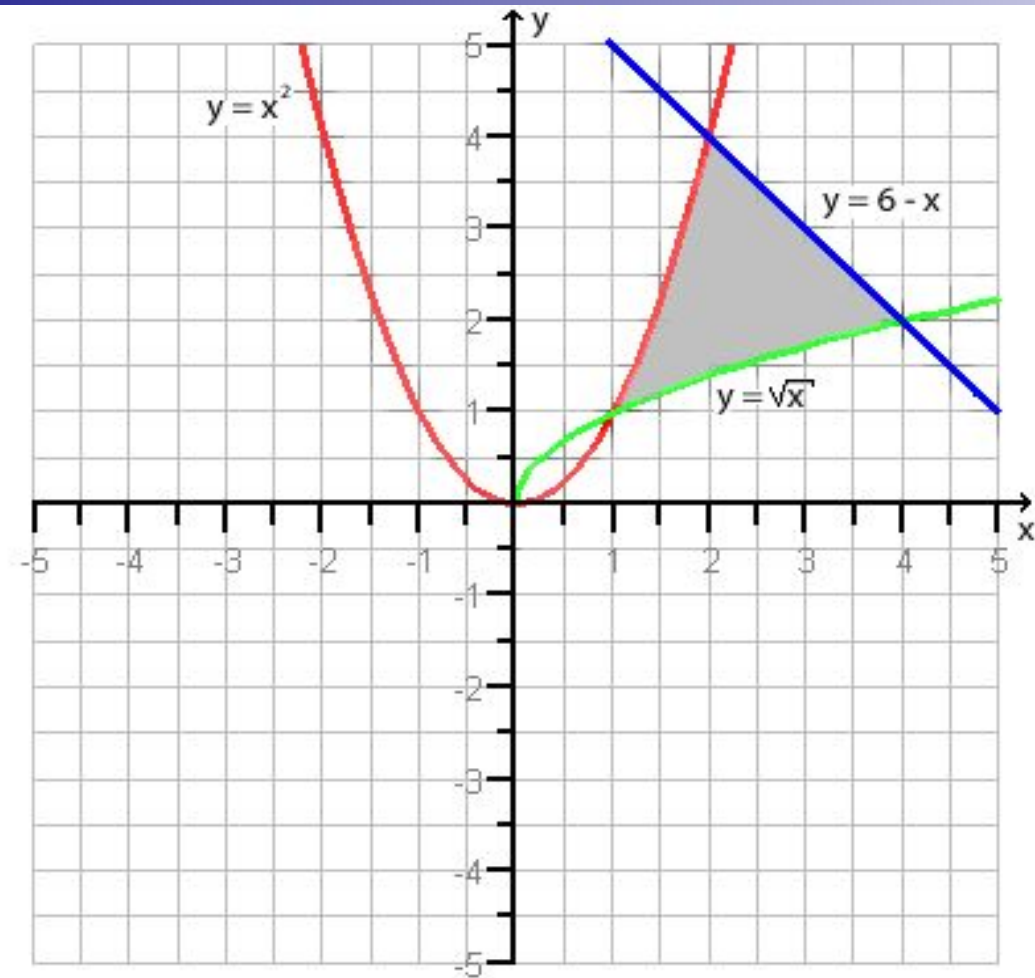
$$S = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3} = 5 \frac{1}{3}$$



$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\pi} = -2(\cos \pi - \cos 0) = -2(-1 - 1) = 4$$



$$\begin{aligned}
 S &= - \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_0^1 + \\
 &+ \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Bigg|_1^2 = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 2
 \end{aligned}$$



$$S = \int_1^2 x^2 dx + \int_2^4 (6 - x) dx - \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

Домашнее задание:

1. Прочитать параграф 5

2. Выполнить примеры:

4.3(2;4)

4.4(2;4)

4.10(3)

5.3 (1)