Тема урока: Применение определенного интеграла при решении геометрических и физических задач

Задание 1. Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

1) $$\int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

2) $$\int_{-1}^1 (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x\Bigg|_{-1}^1 = $$
$$= 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = \boxed{2\frac{2}{3}}.$$

3) $$\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Bigg|_1^4 = \boxed{4\frac{2}{3}}$$

4) $$\int_{-1}^0 e^{-2x}dx = -\frac{e^{-2x}}{2}\Bigg|_{-1}^0 = \boxed{\frac{e^2-1}{2}}.$$

5) $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \boxed{\ln 2.}$$

6) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{0}$$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной интегрирования.

1)
$$\int_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2-7}\,dx = \begin{vmatrix} t = x^2-7 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{t}\,dt = \frac{\sqrt{t^3}}{3}\Bigg|_1^9 = 9 - \frac{1}{3} = \boxed{8\frac{2}{3}}$$

2)
$$\int_{-1}^{2} \frac{2xdx}{(2x^2+1)^2} = \begin{vmatrix} 2x^2+1 = t \\ 4xdx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_3^9 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t}\Bigg|_3^9 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{9}}.$$

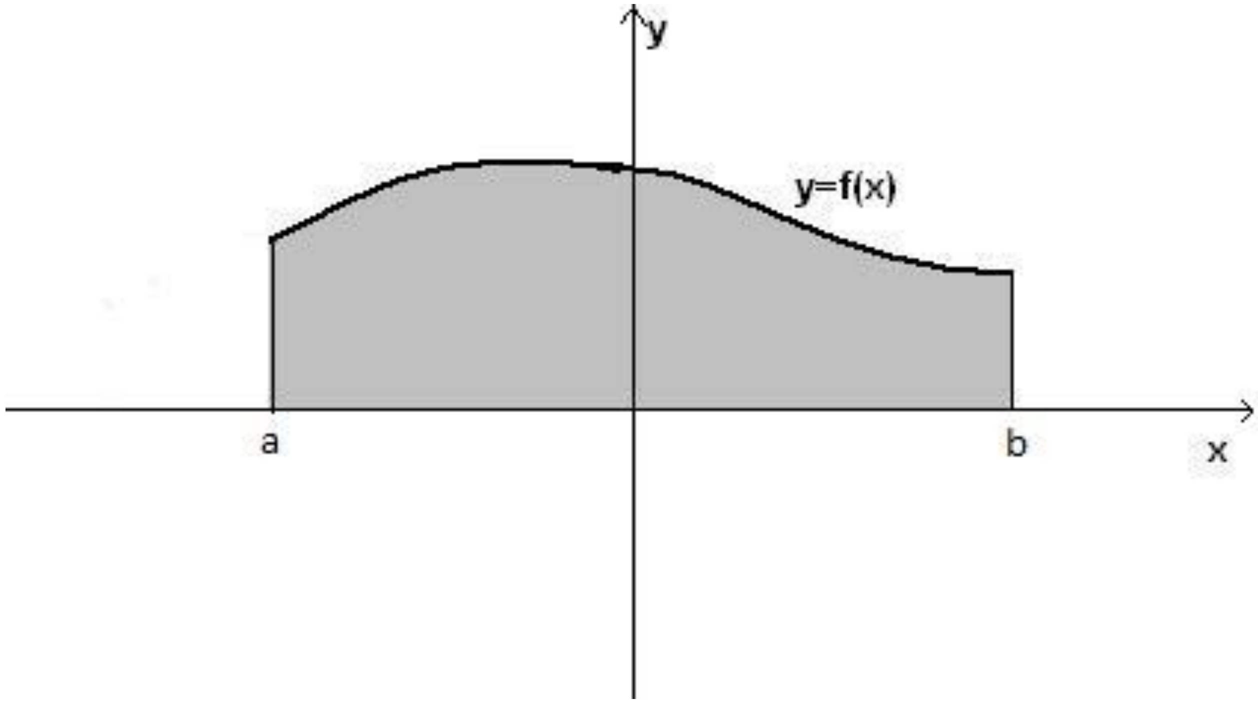
3)
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{(\sin x)^3} = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos xdx \end{vmatrix} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = -(\frac{1}{2} - 1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4)

$$\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}} = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}} \\ du = dx \\ v = \displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = 3x+1 \\ dt = 3dx \end{array} \right| = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1} \end{array} \right| = \frac{2x}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_1^8 - \frac{2}{3}\int_1^8 \sqrt{3x+1}dx =$$

$$= \frac{2x}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_1^8 - \frac{4}{27}\sqrt{(3x+1)^3}\Big|_1^8 = \frac{16}{3}\cdot 5 - \frac{4}{3} - \frac{4}{27}\cdot 125 + \frac{32}{27} = \frac{216}{27} = \boxed{8}$$

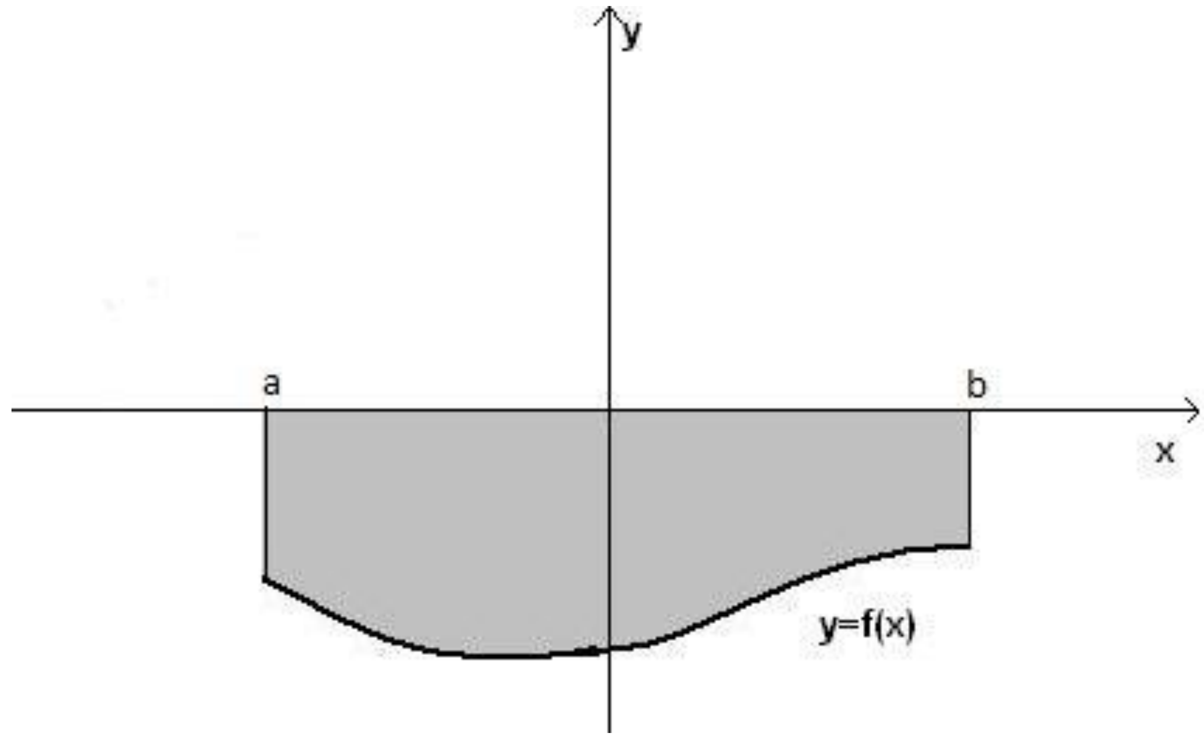
Вычисление площади криволинейной трапеции



Если $y = f(x)$ - непрерывная функция, $f(x) \geq 0$ на [a,b], то

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

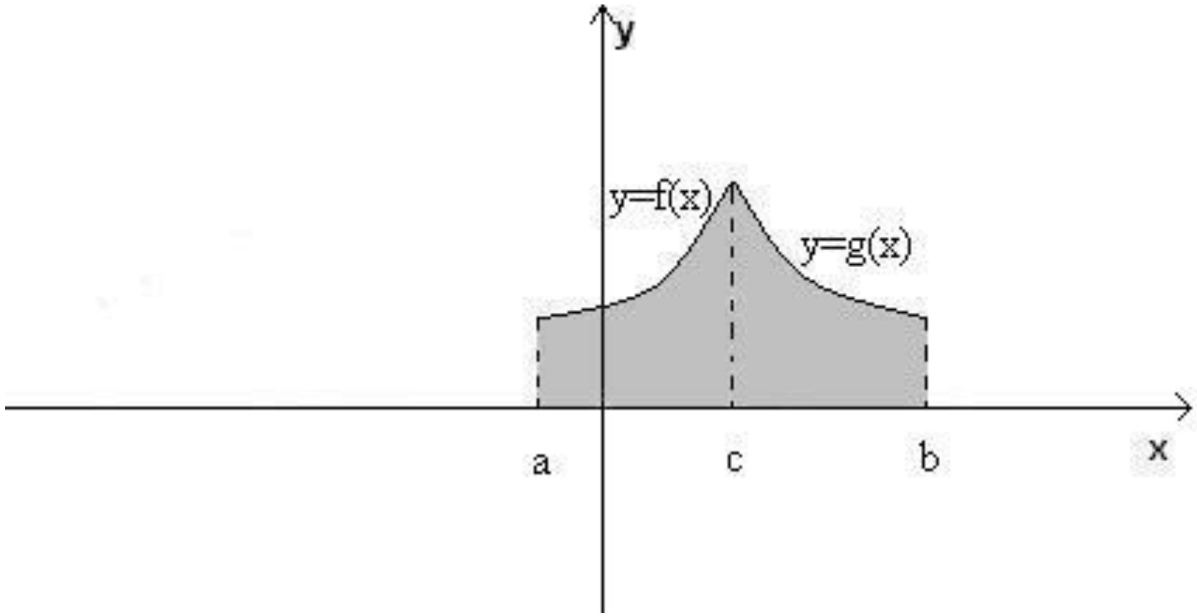
Вычисление площади криволинейной трапеции



Если $y = f(x)$ - непрерывная функция, $f(x) \le 0$ на [a, b], то

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

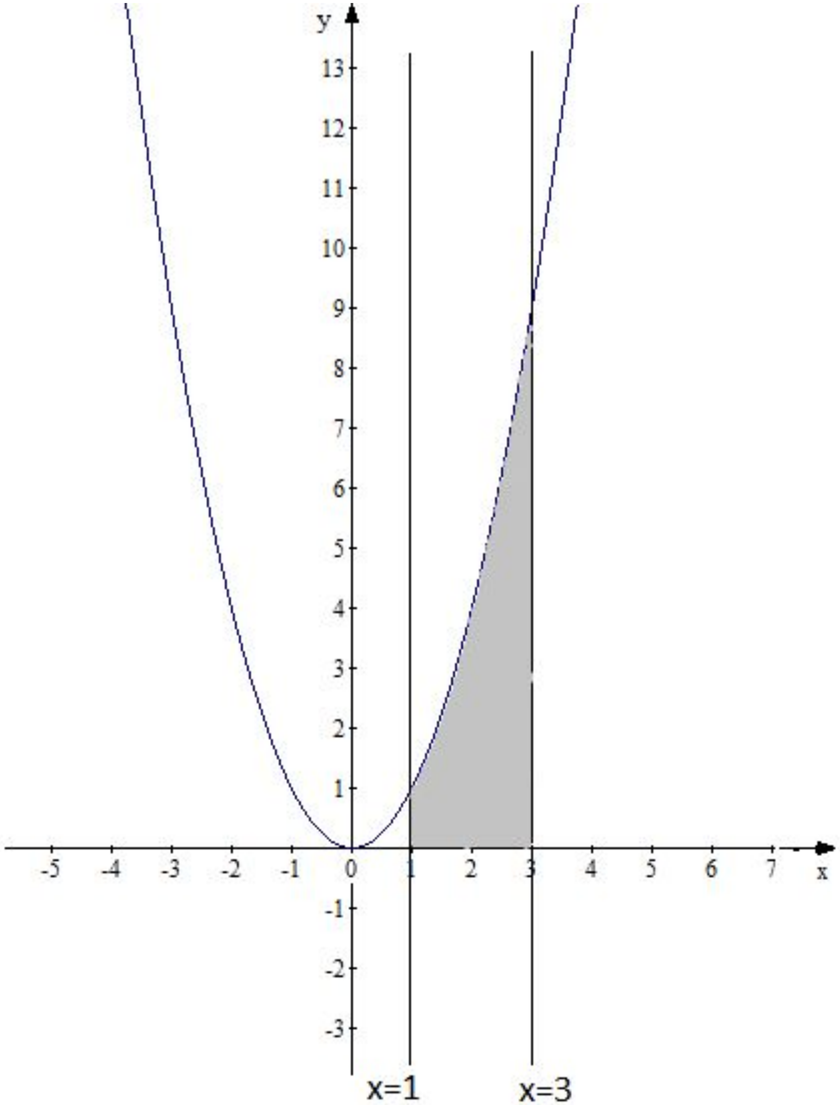
Вычисление площади криволинейной трапеции



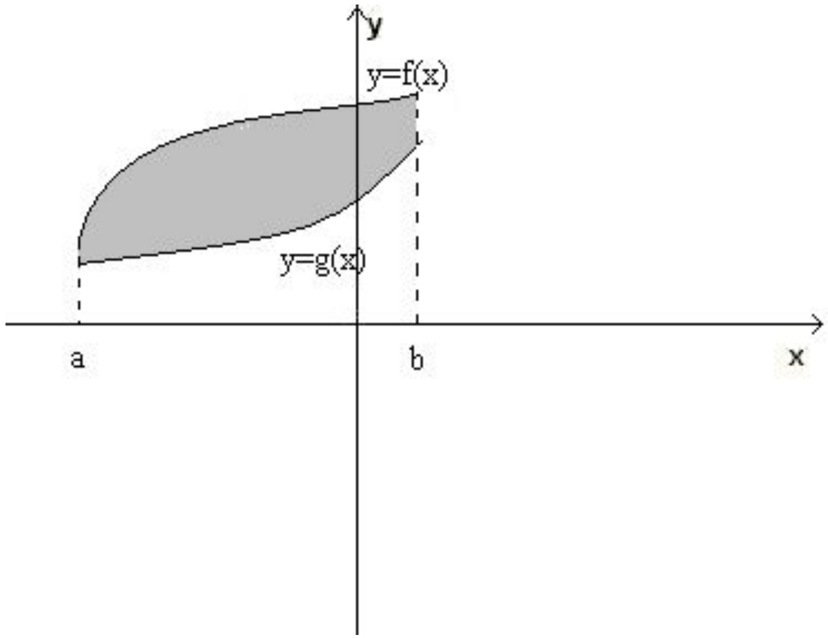
Если $y = f(x)$ непрерывная на [a; c], $y = g(x)$ непрерывная на [c; b]

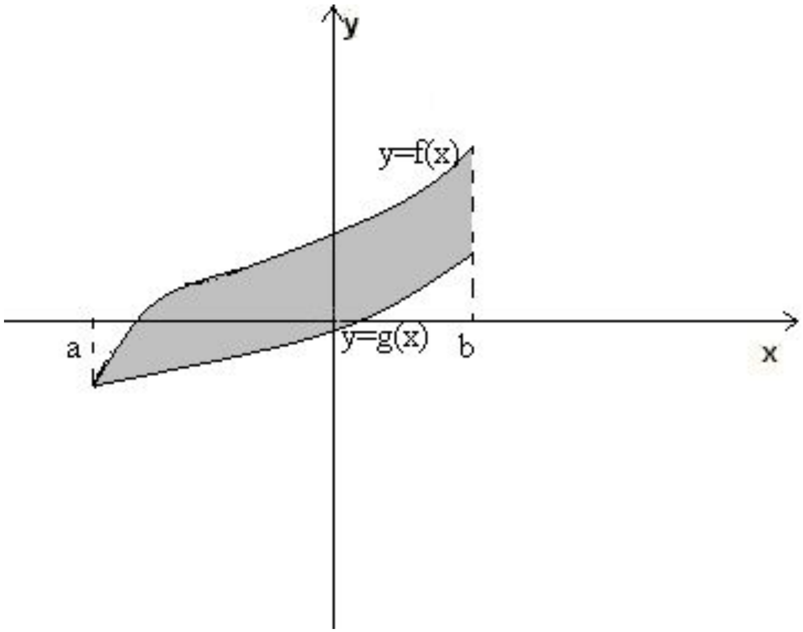
где $c \in [a; b]$, то $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$

Пример №1: Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, прямыми $x=1$, $x=3$ и осью Ox



Вычисление площадей плоских фигур

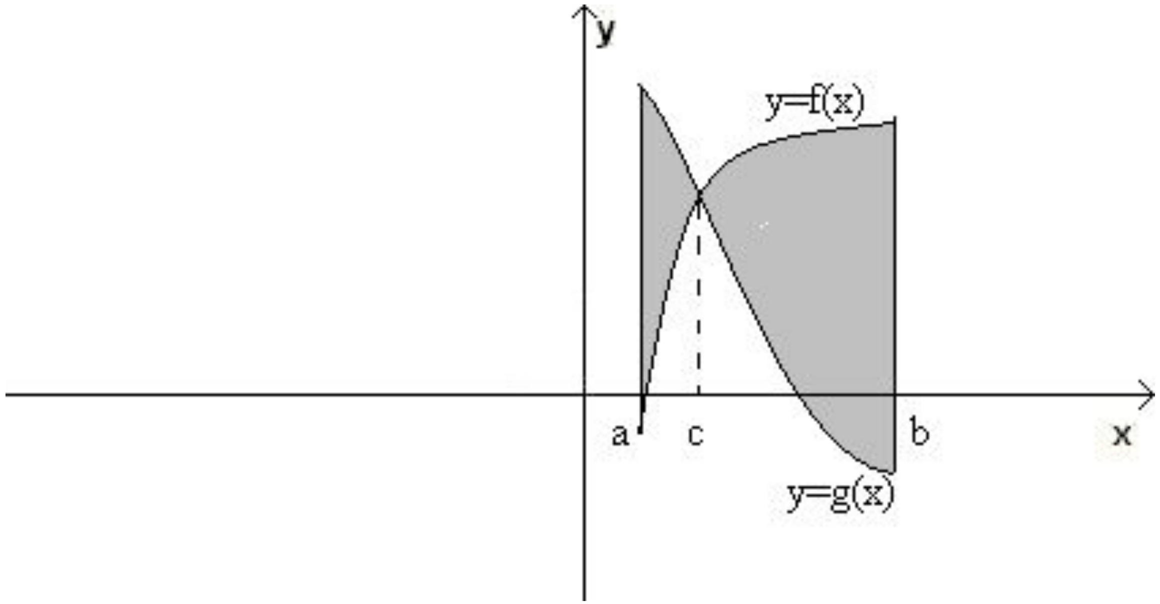




Если $y = f(x), y = g(x)$ - непрерывные функции на [a; b],

$f(x) \geq g(x)$ на [a; b], то $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

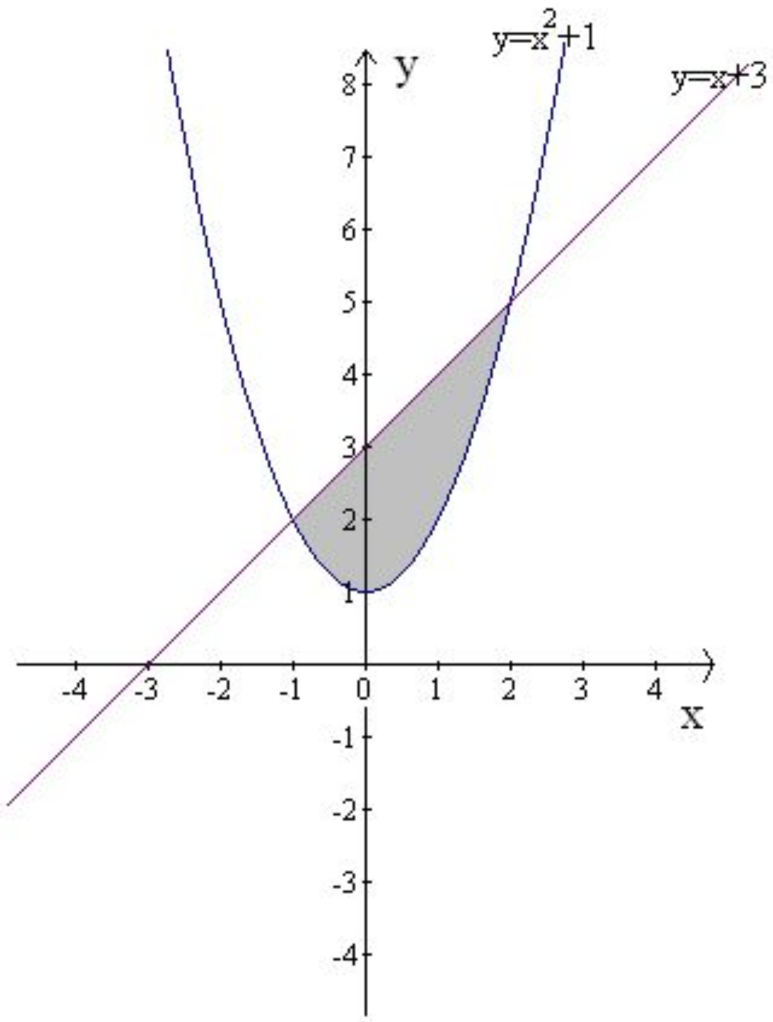
Вычисление площадей плоских фигур



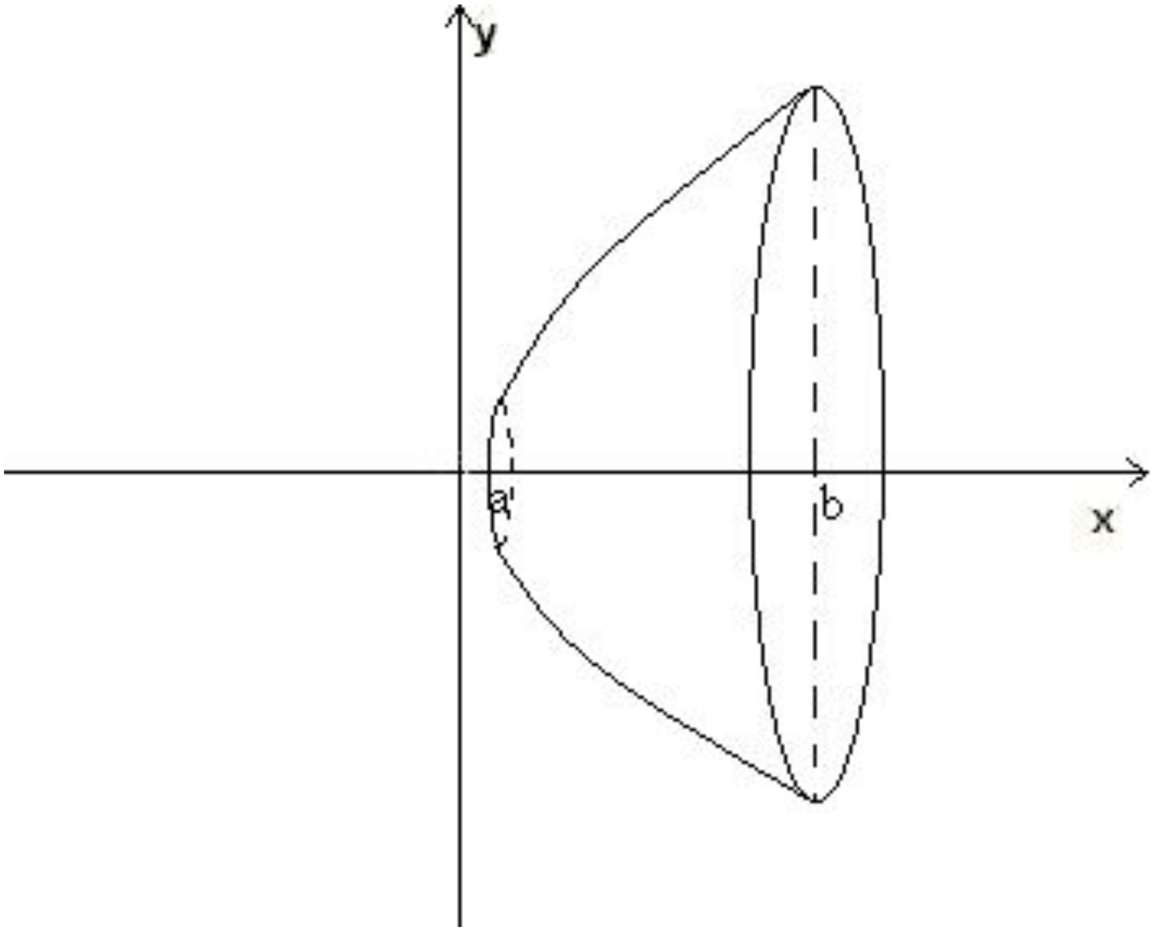
Если *y=f(x), y= g(x)* непрерывные функции на [а; в], *f(x)≥g(x)* на [с; в],

где с є [а; в], *f(x)≤ g(x)* на [а; с], то $$S = \int_a^c (g(x) - f(x))dx + \int_c^b (f(x) - g(x))dx$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x+3$, $y=x^2+1$

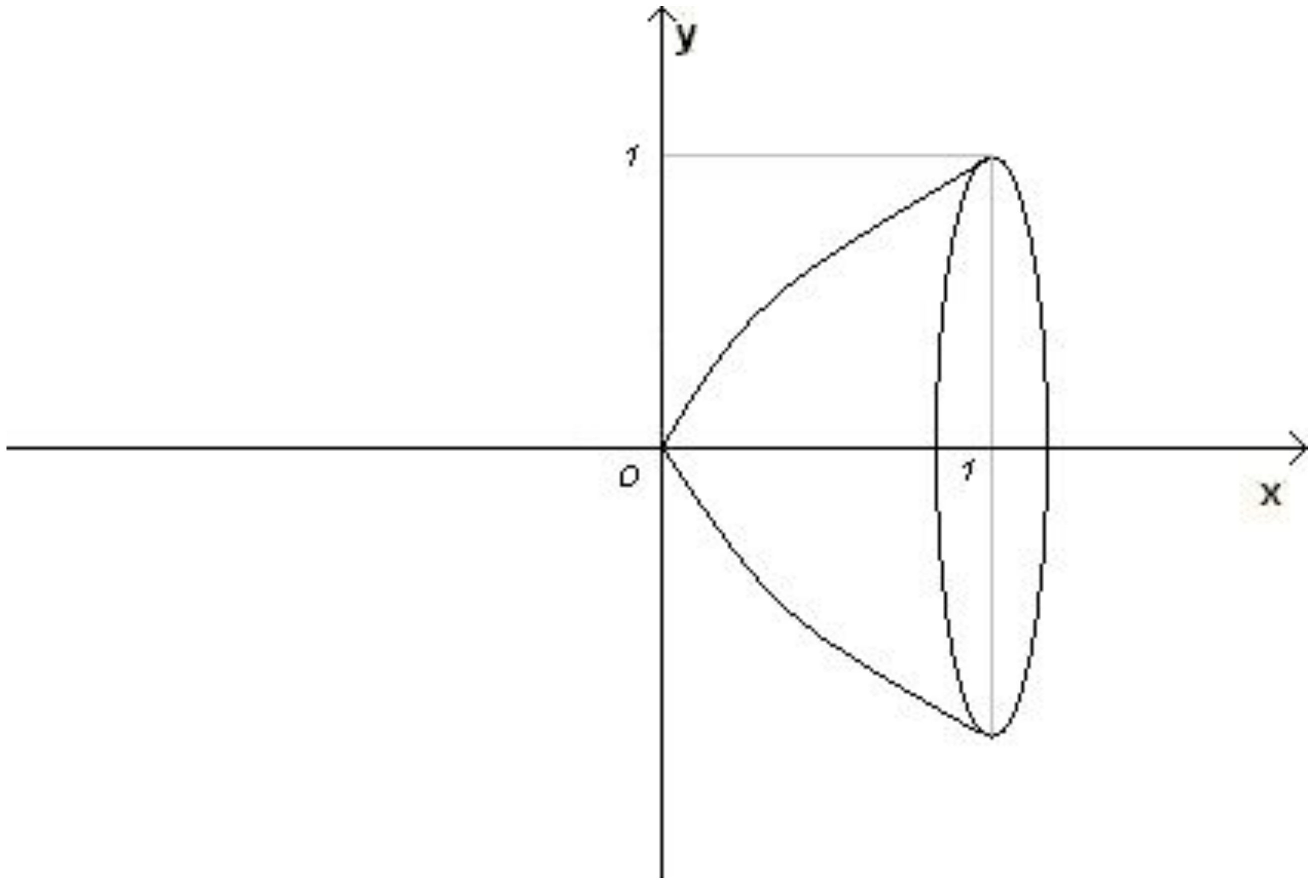


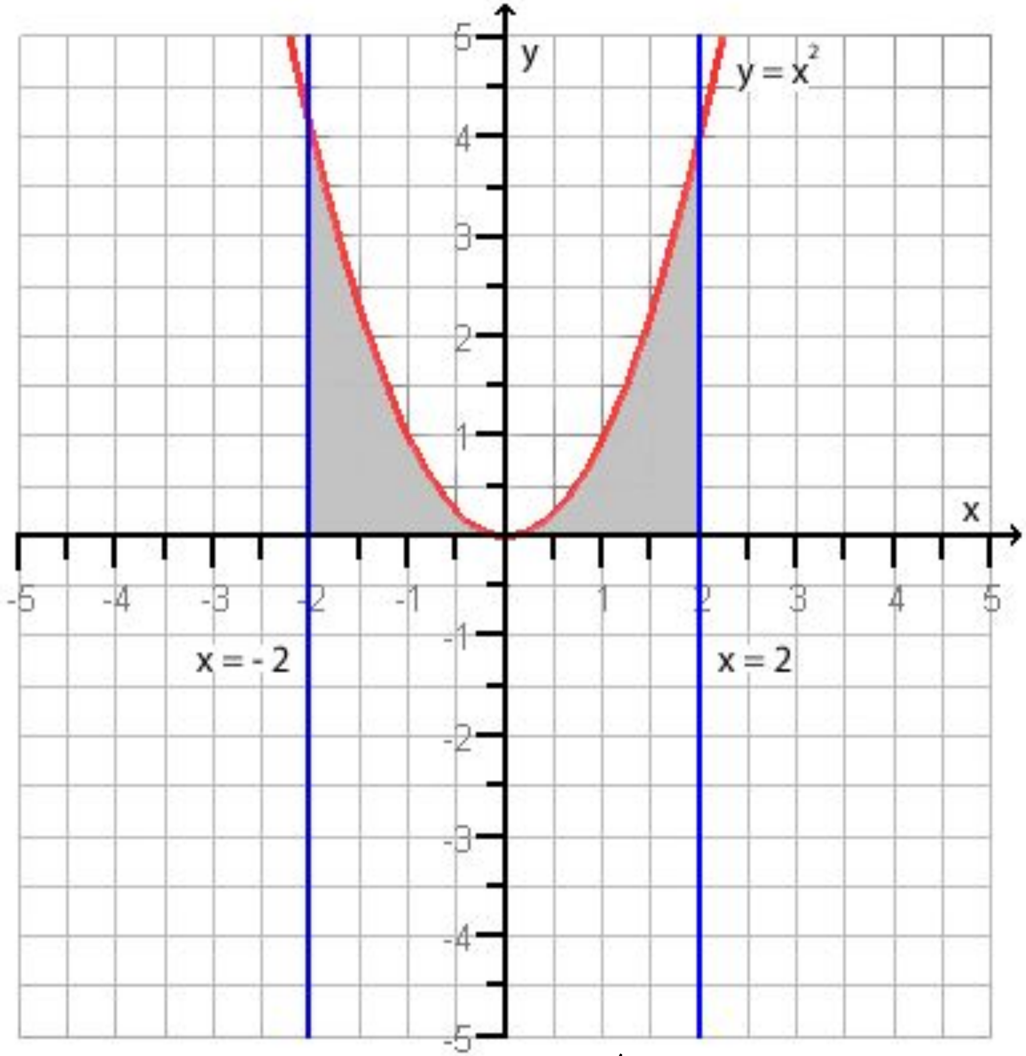
Вычисление объемов тел вращения



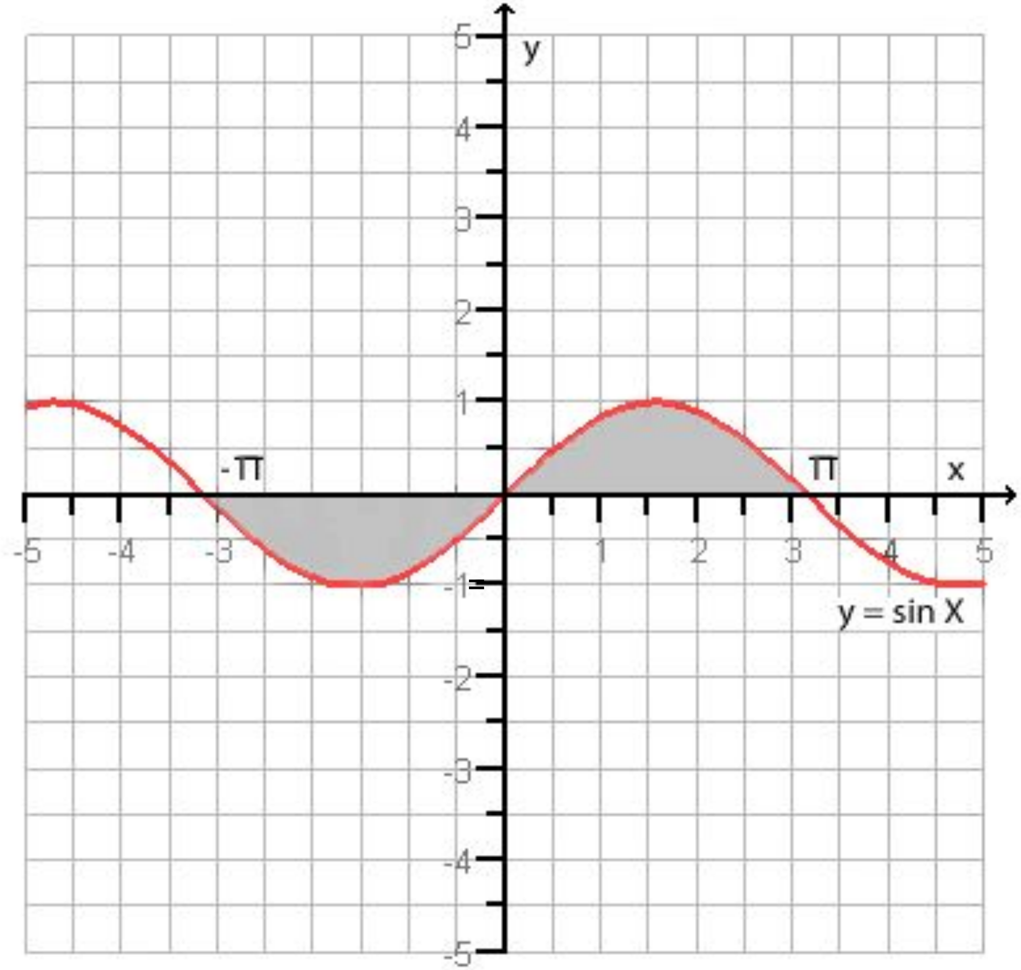
$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$, $x=1$

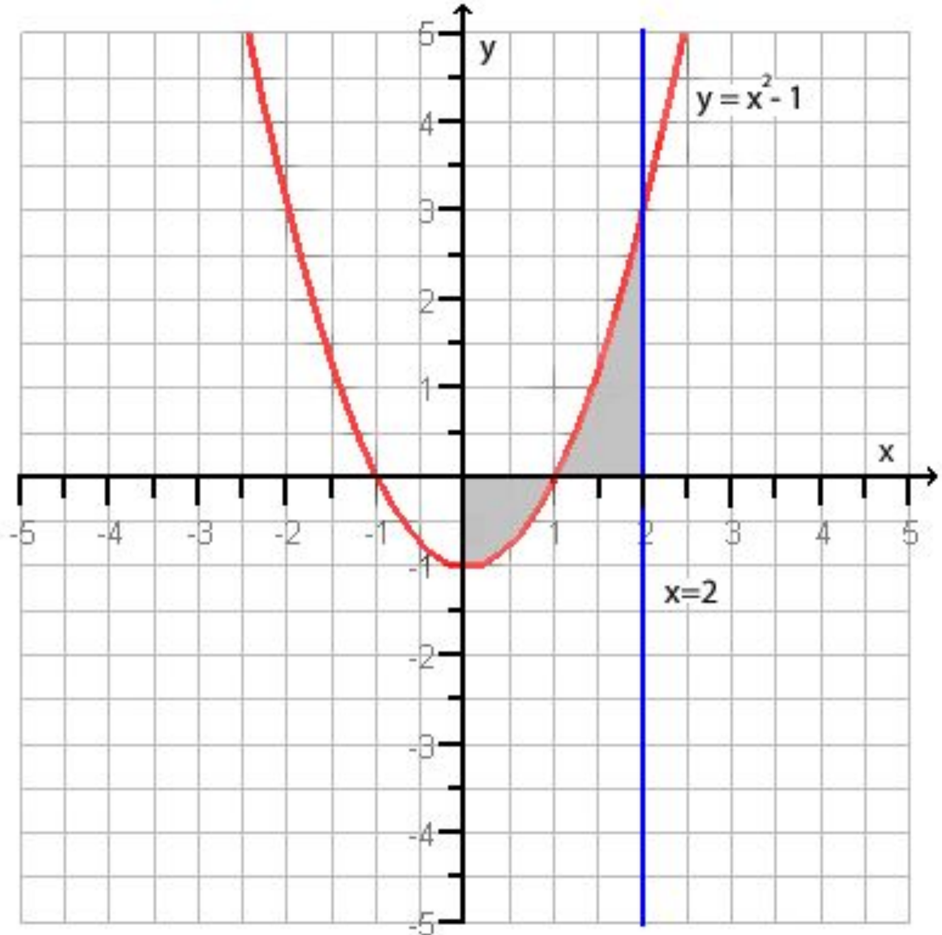




$$S = 2\int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

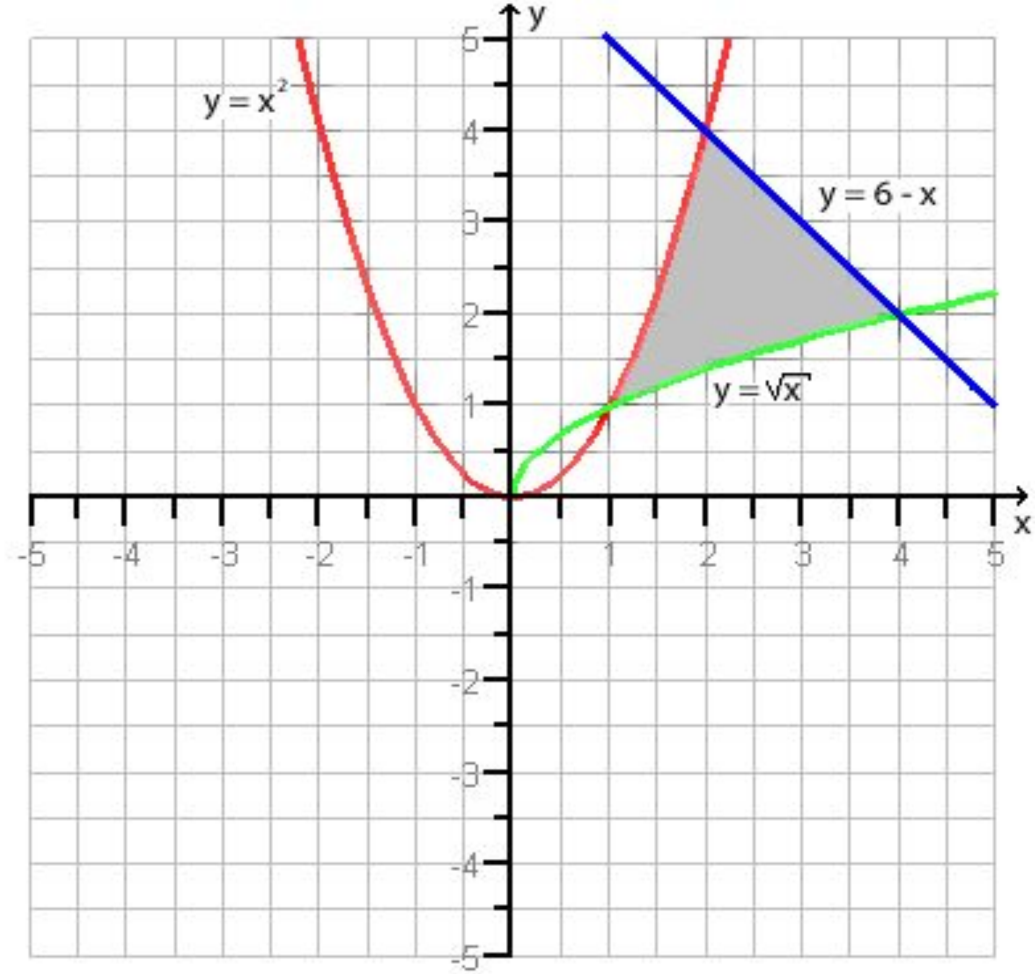


$$S = 2\int_0^{\pi} Sinxdx = -2Cosx\Big|_0^{\pi} = -2(Cos\pi - Cos0) = -2(-1-1) = 4$$



$$S = -\int_0^1 (x^2 - 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 +$$

$$+ \quad \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 2$$



$$S = \int_{1}^{2} x^2 dx + \int_{2}^{4} (6 - x) dx - \int_{1}^{4} \sqrt{x} dx$$

Домашнее задание:

1. Прочитать параграф 5

2. Выполнить примеры:

4.3(2;4)

4.4(2;4)

4.10(3)

5.3 (1)