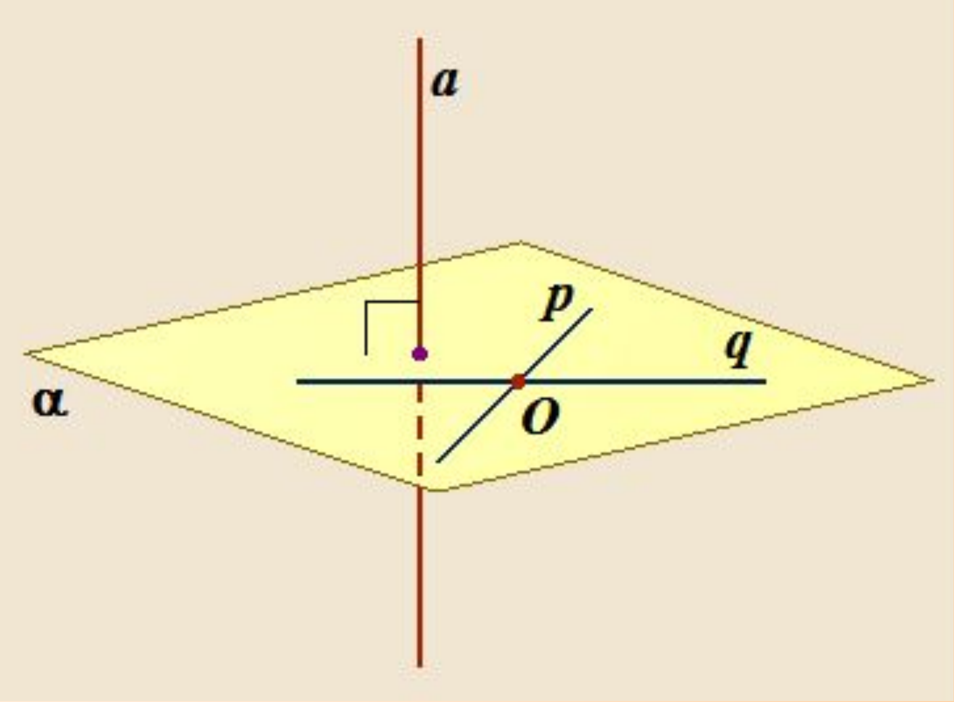
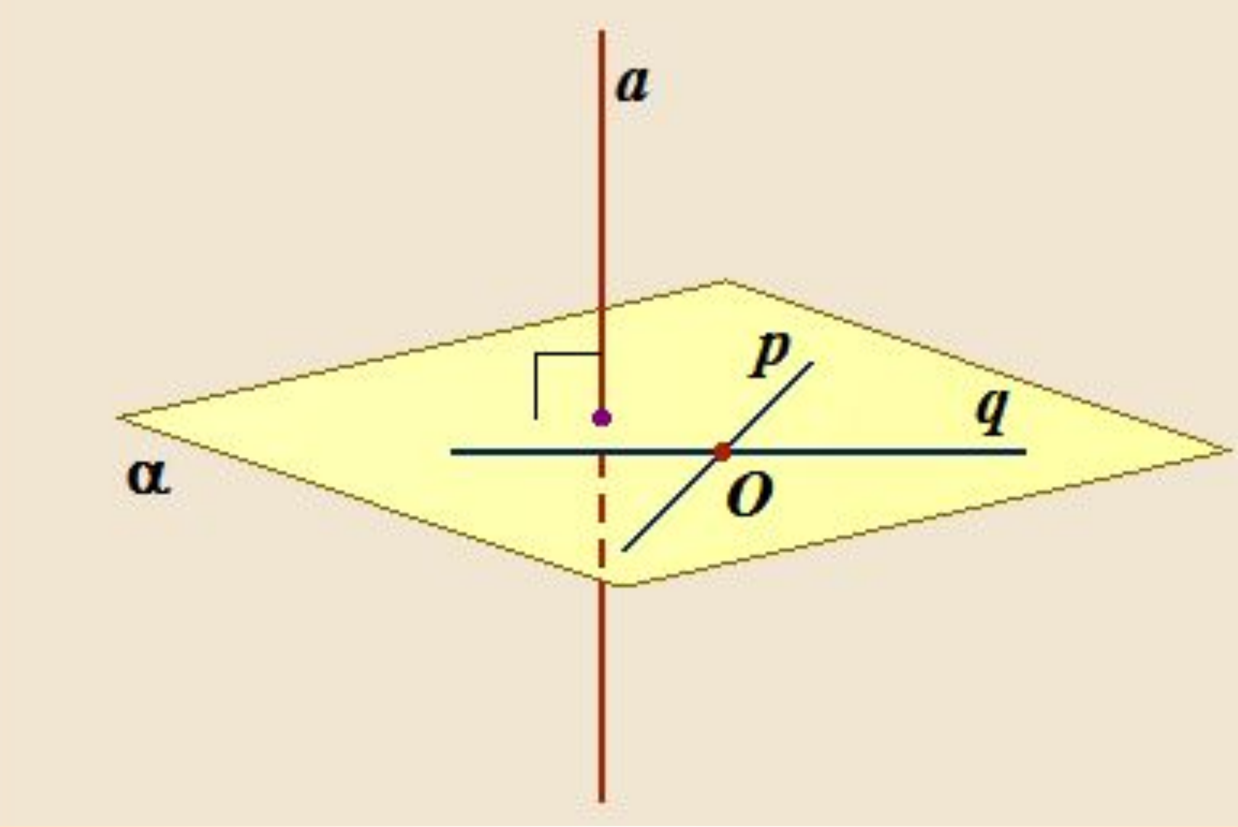
Если прямая перпендикулярна
к двум пересекающимся прям
лежащим в плоскости,
то она перпендикулярна
к данной плоскости.

$$\left.\begin{array}{l} a \perp p, \\ a \perp q, \\ p, q \text{ лежат в } \alpha, \\ p \cap q = O \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a \perp \alpha$$



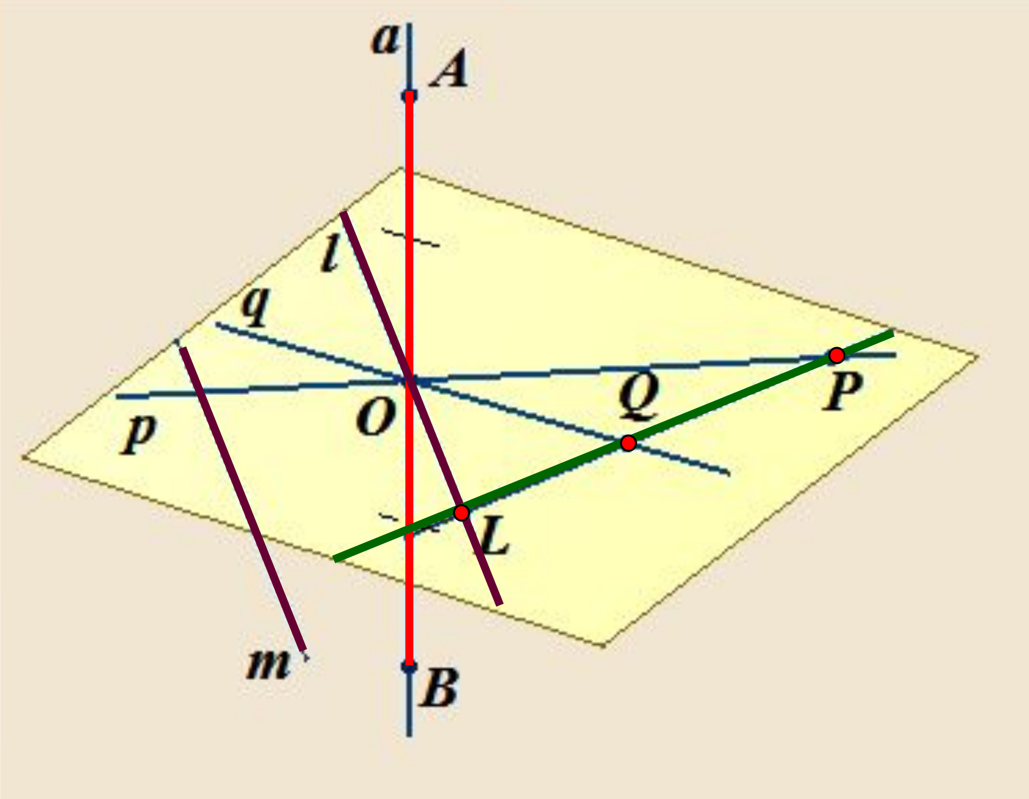


Доказательство:

Рассмотрим два случая:

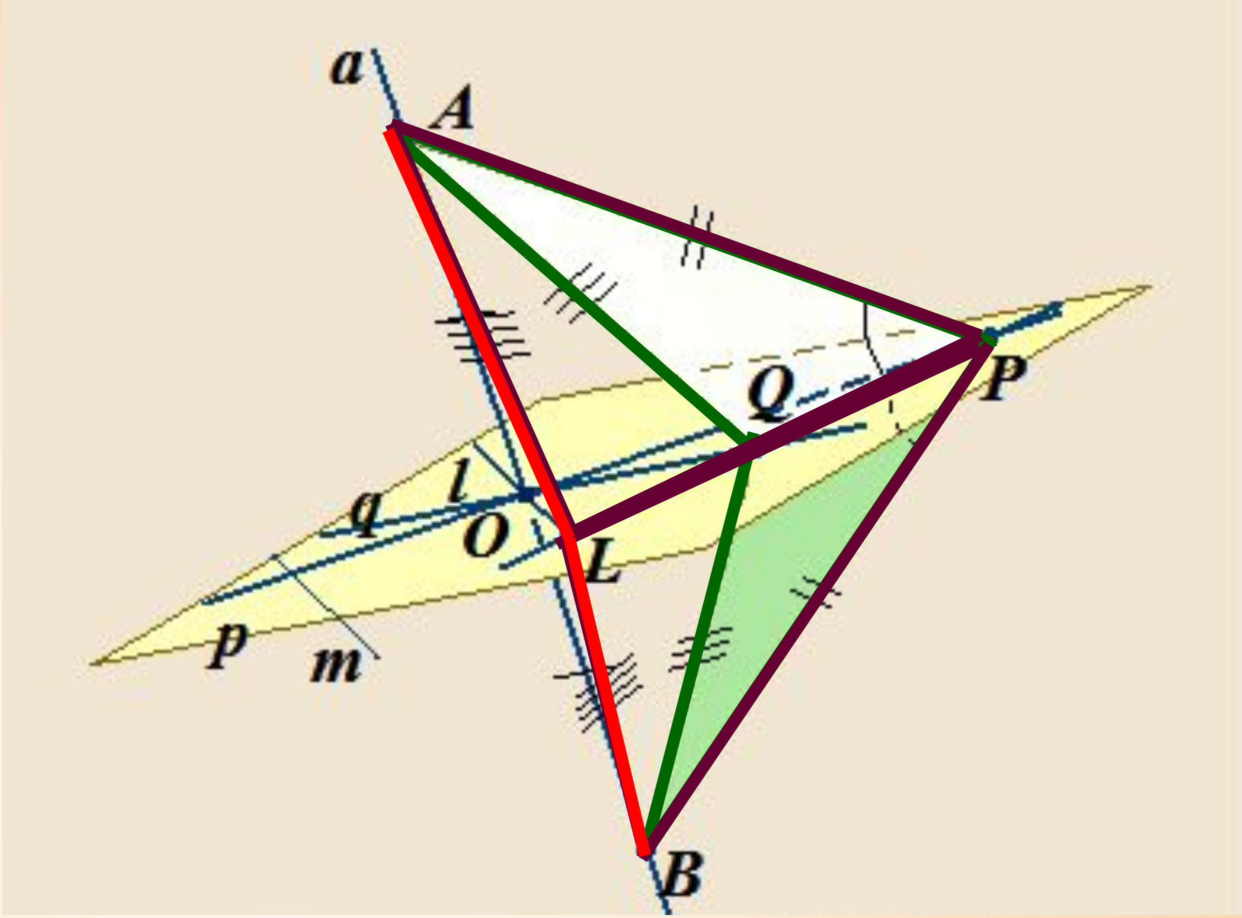
I. **Прямая** a **проходит через** O **- точку пересечения прямых** p **и** q

II. **Прямая** a **не проходит через точку пересечения прямых** p **и** q



Пусть m – произвольная прямая в плоскости α, не параллельная ни p, ни q. Докажем, что $a \perp m$.

Проведем через O прямую $l \parallel m$ и прямую, пересекающую p, q и l в точках P, Q и L. Отложим на a равные отрезки AO и OB.

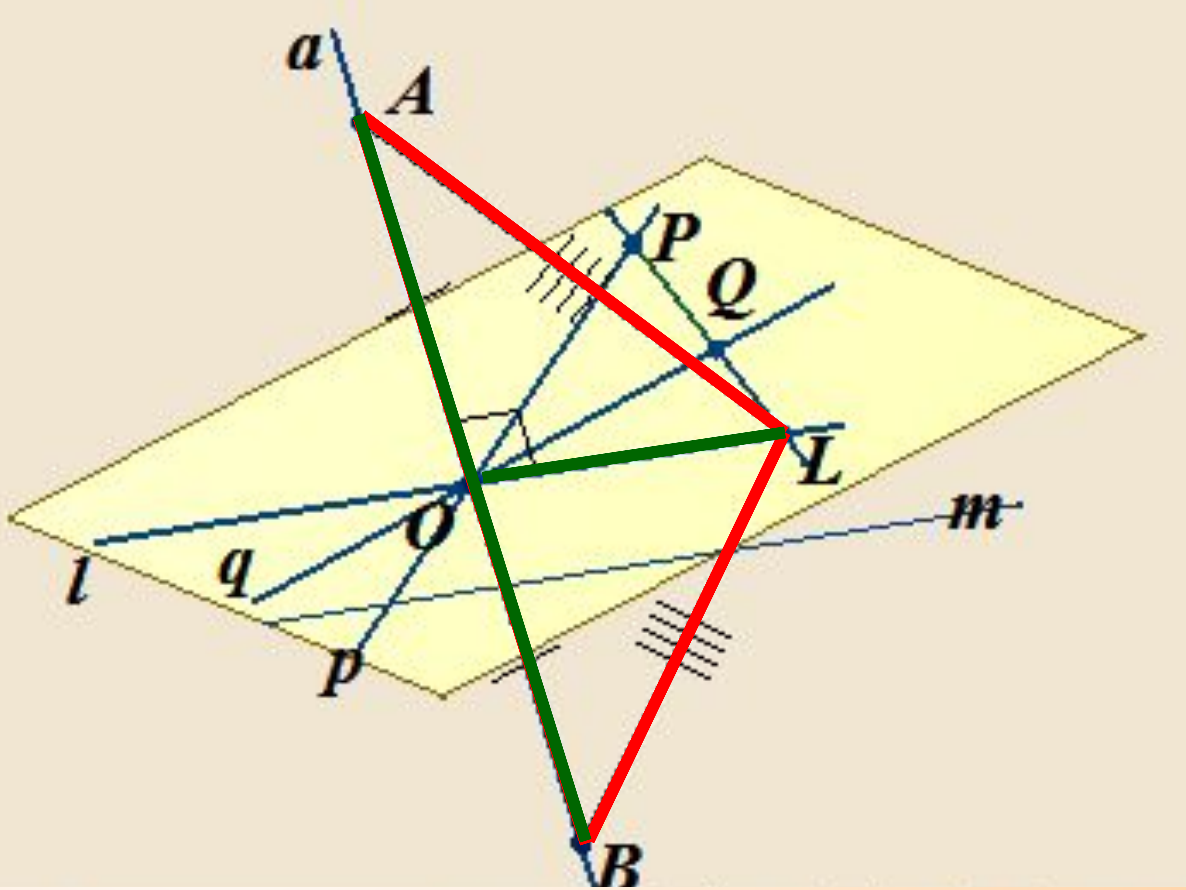


ΔABP и ΔABQ - равнобедренные. Поэтому

$AP=BP$ и $AQ=BQ$.

Значит, $\Delta APQ=\Delta BPQ$. Тогда $\angle APQ=\angle BPQ$,

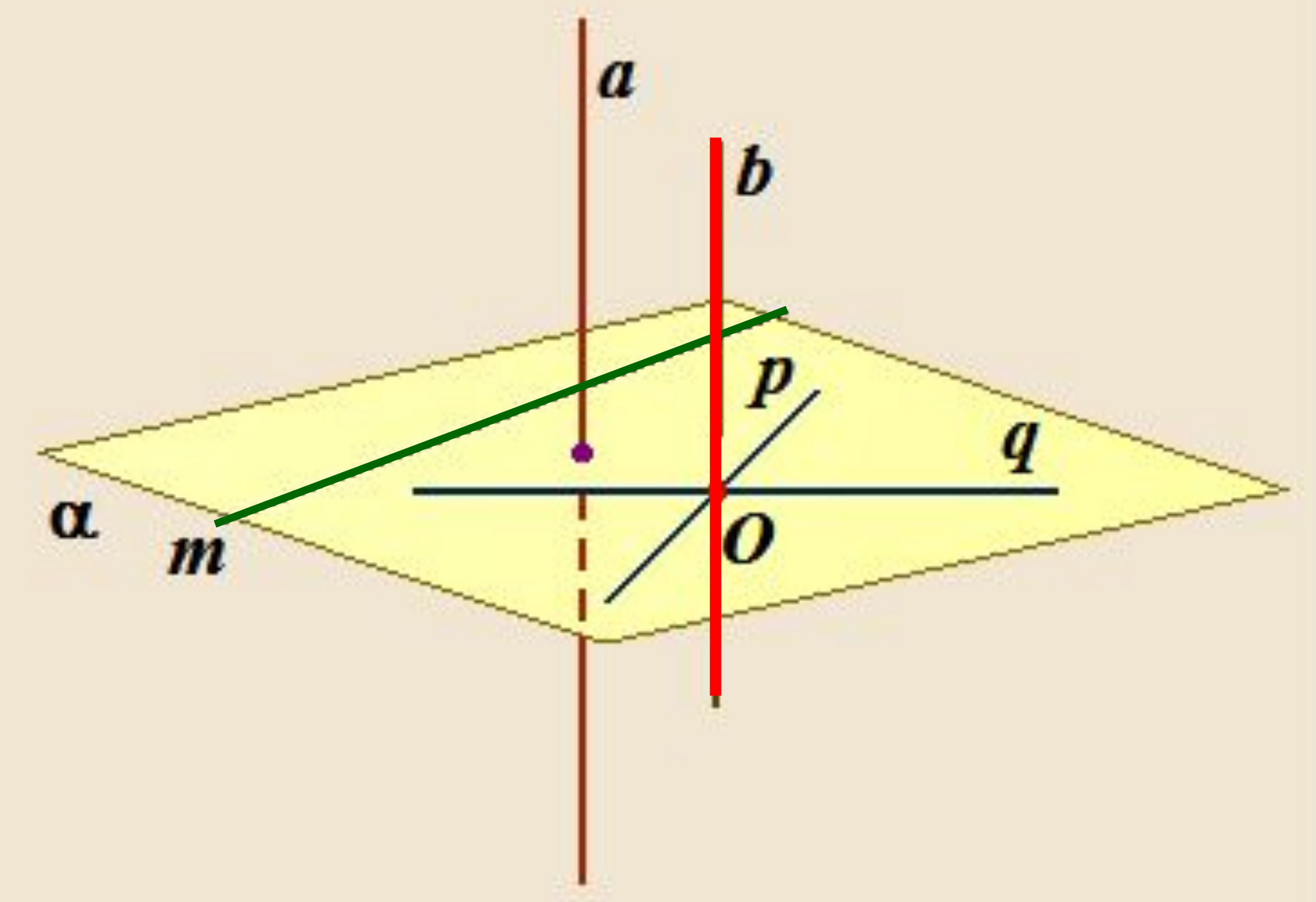
и $\Delta APL=\Delta BPL$. Следовательно, $AL=BL$.



Рассмотрим ΔALB. Он равнобедренный.

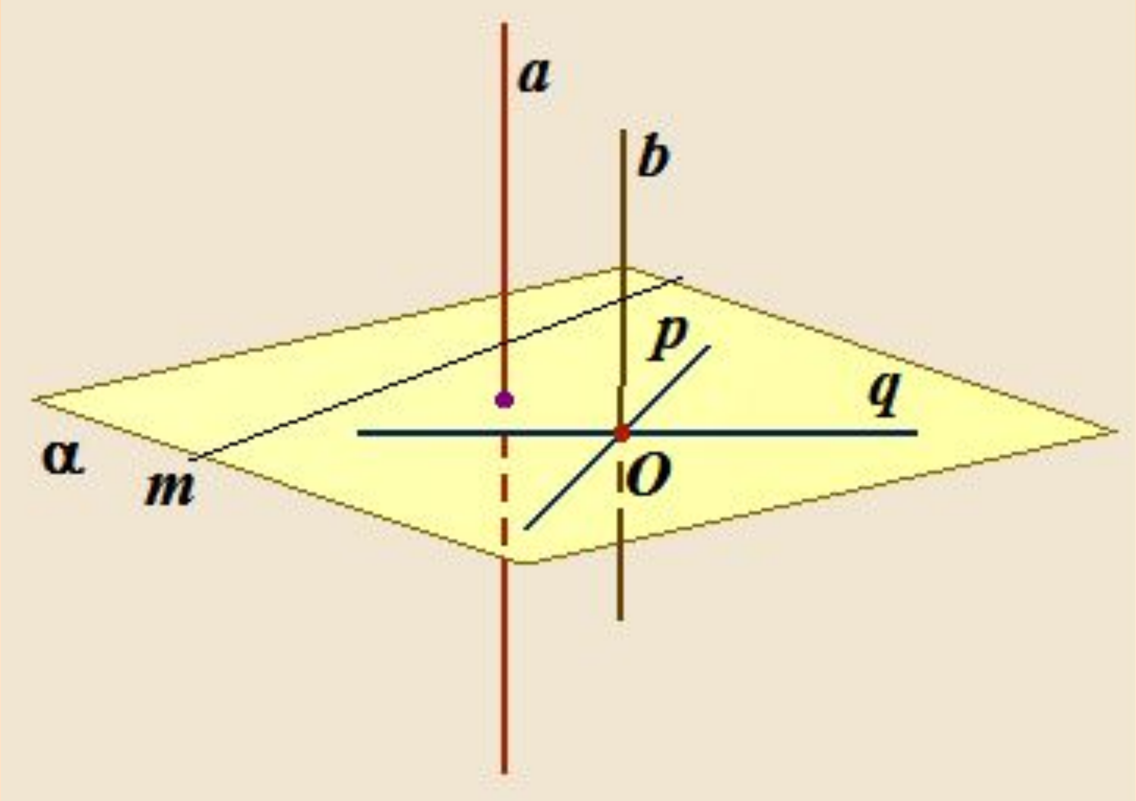
В ΔALB медиана LO является высотой, а это означает, что $a \perp l$. Следовательно, $a \perp m$.

Тогда a перпендикулярна плоскости α.



Пусть m – произвольная прямая в плоскости α, не параллельная ни p, ни q. Докажем, что $a \perp m$.

Проведем прямую b через точку O параллельно прямой a.



b перпендикулярна прямым p и q, а значит, как доказано в случае I, $b \perp m$. Отсюда $a \perp m$.

Следовательно, $a \perp \alpha$.