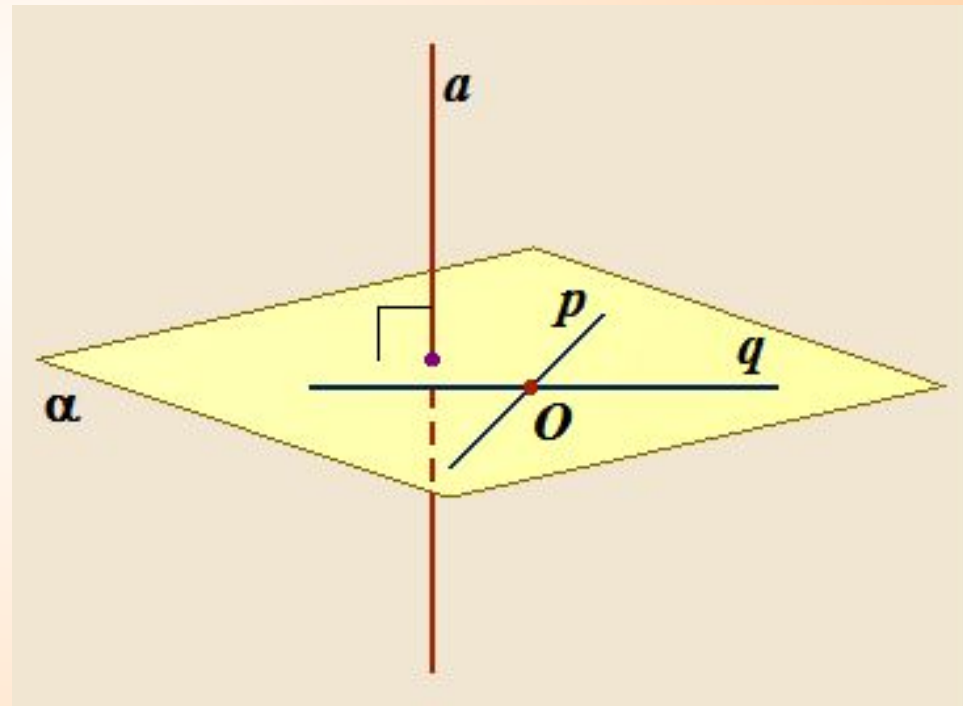
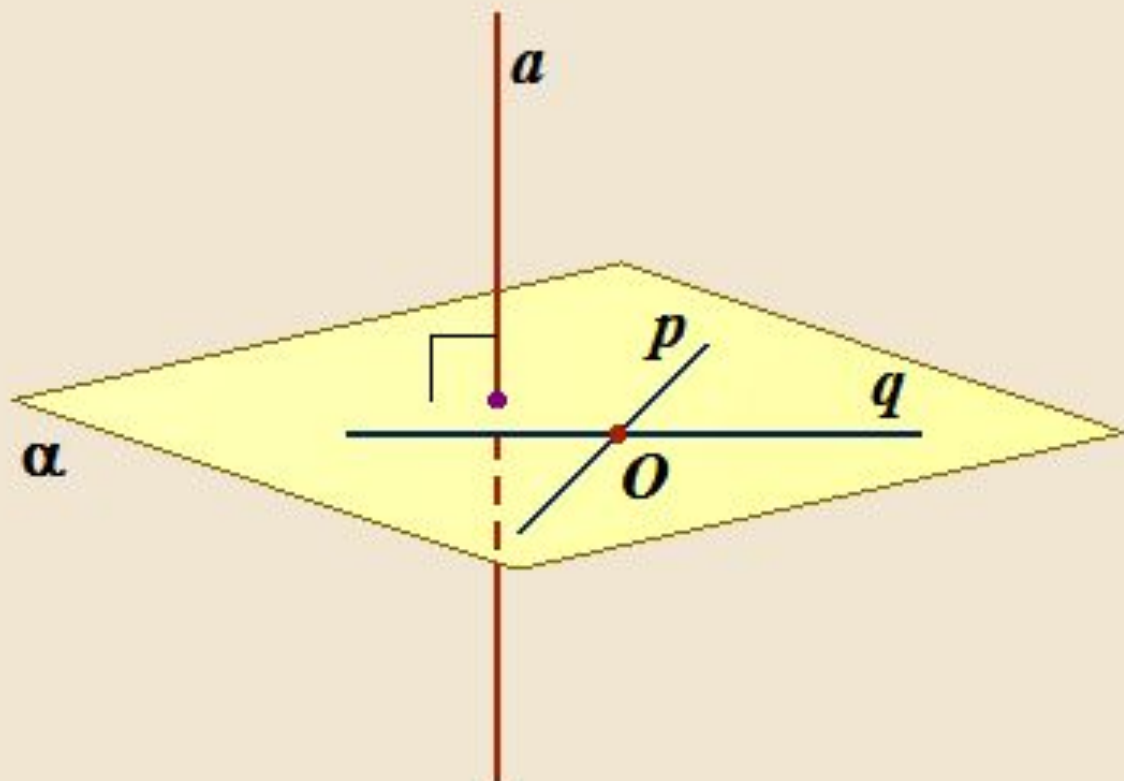


Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимися прямым лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к данной плоскости.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp p, \\ a \perp q, \\ p, q \text{ лежат в } \alpha, \\ p \cap q = O \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$



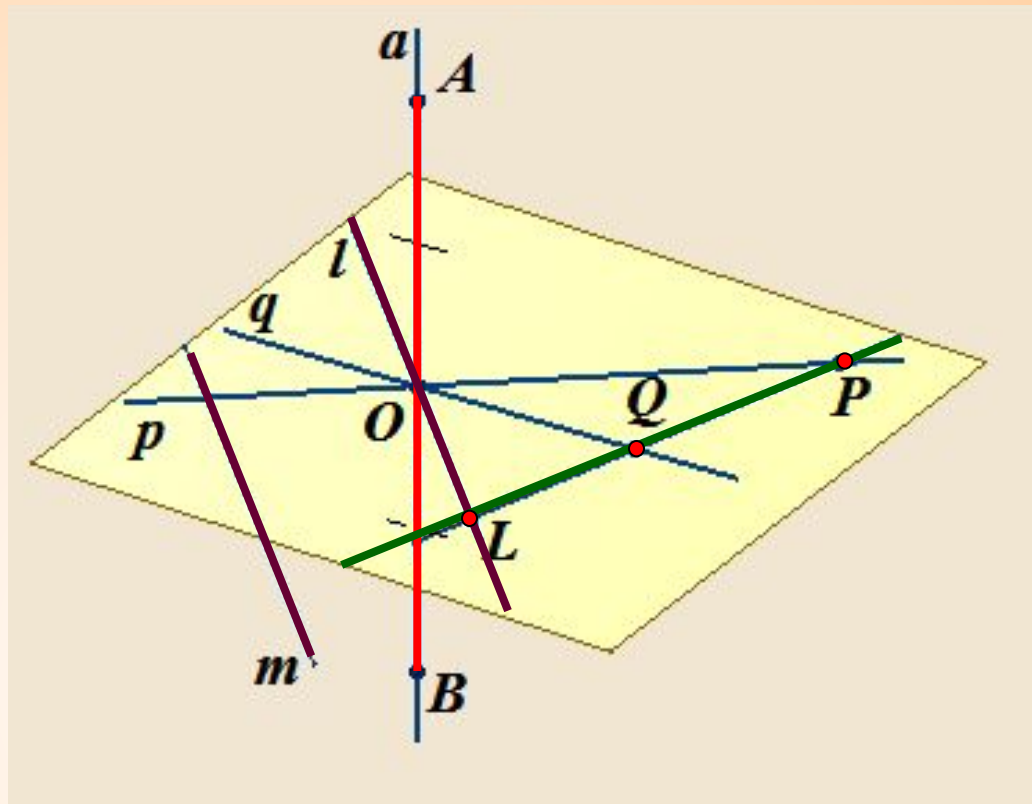


Доказательство:

Рассмотрим два случая:

I. Прямая a проходит через O - точку пересечения
прямых p и q

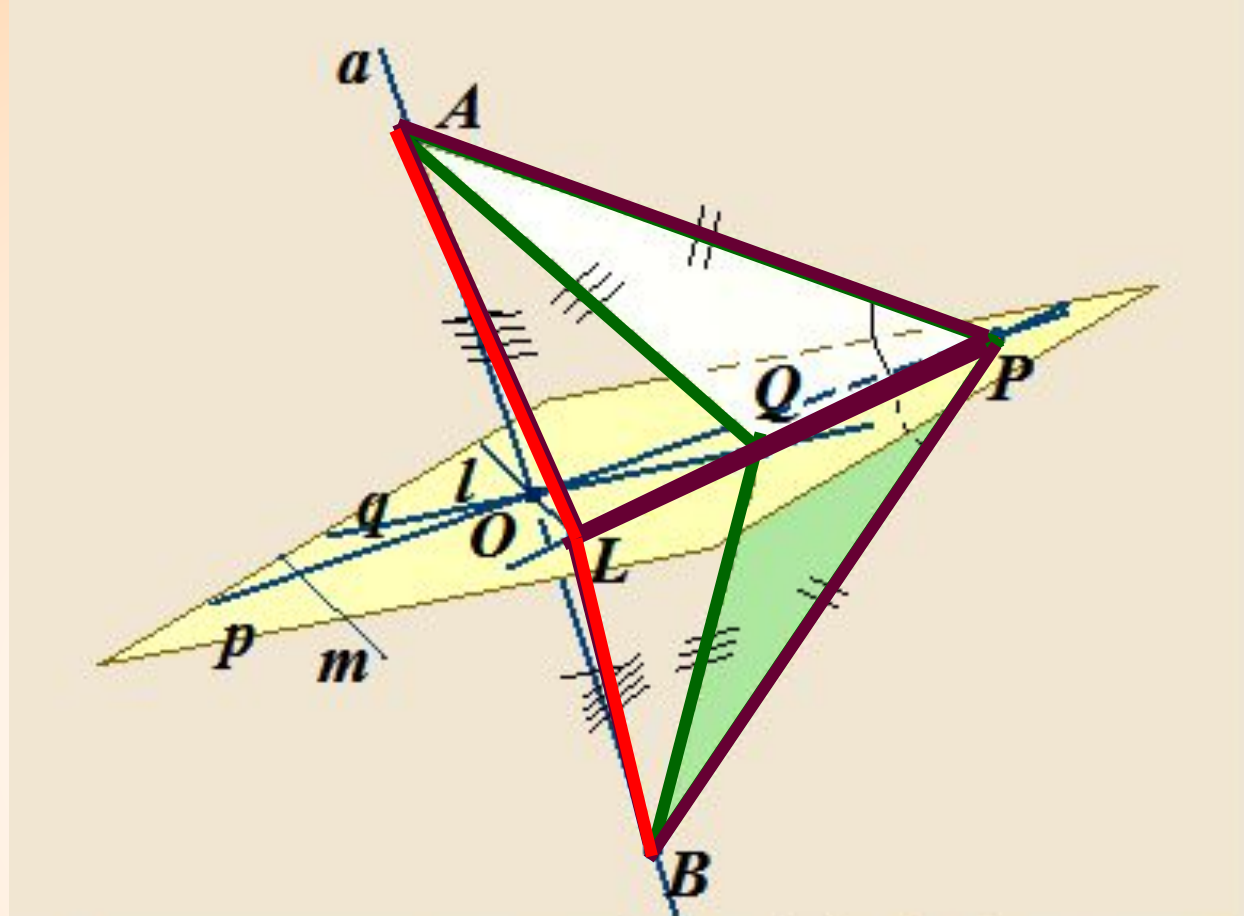
II. Прямая a не проходит через точку пересечения
прямых p и q



Пусть m – произвольная прямая в плоскости α , не параллельная ни p , ни q . Докажем, что $a \perp m$.

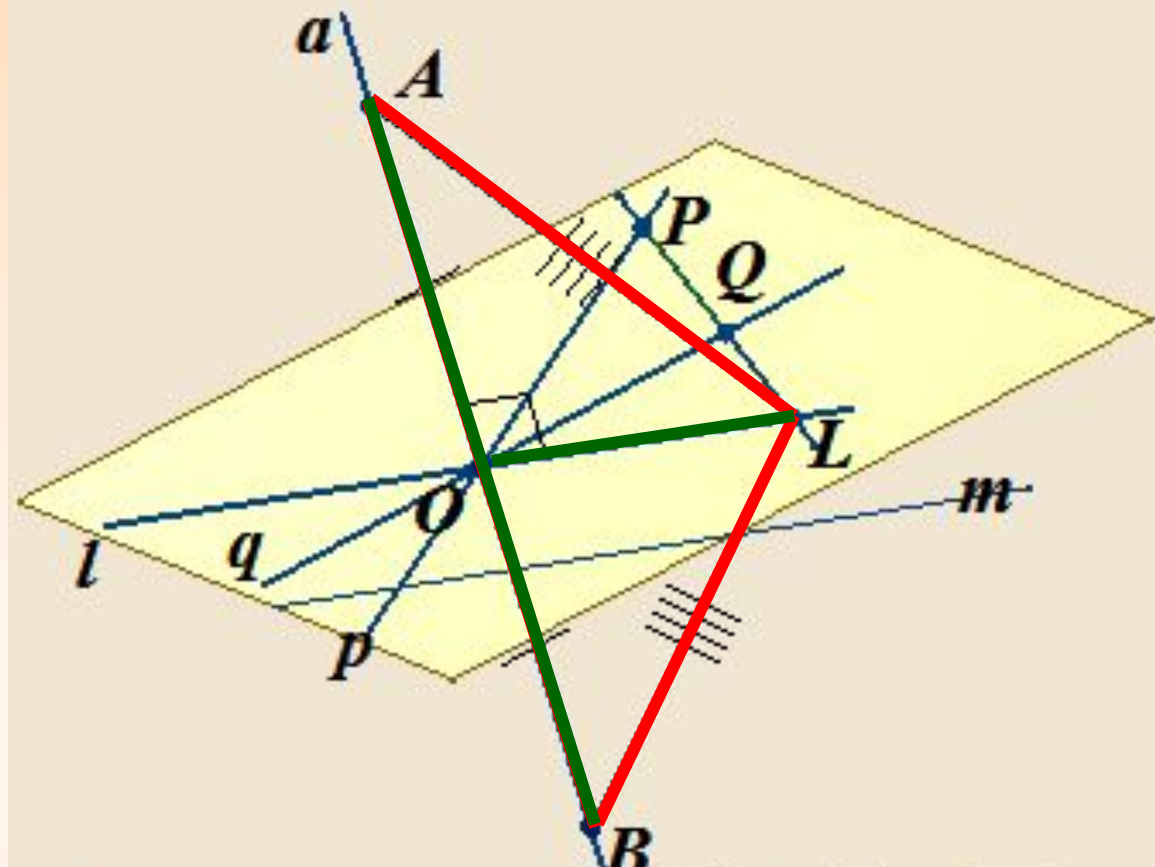
Проведем через O прямую $l \parallel m$ и прямую, пересекающую p, q и l в точках P, Q и L .

Отложим на a равные отрезки AO и OB .



$\triangle ABP$ и $\triangle ABQ$ - равнобедренные. Поэтому
 $AP=BP$ и $AQ=BQ$.

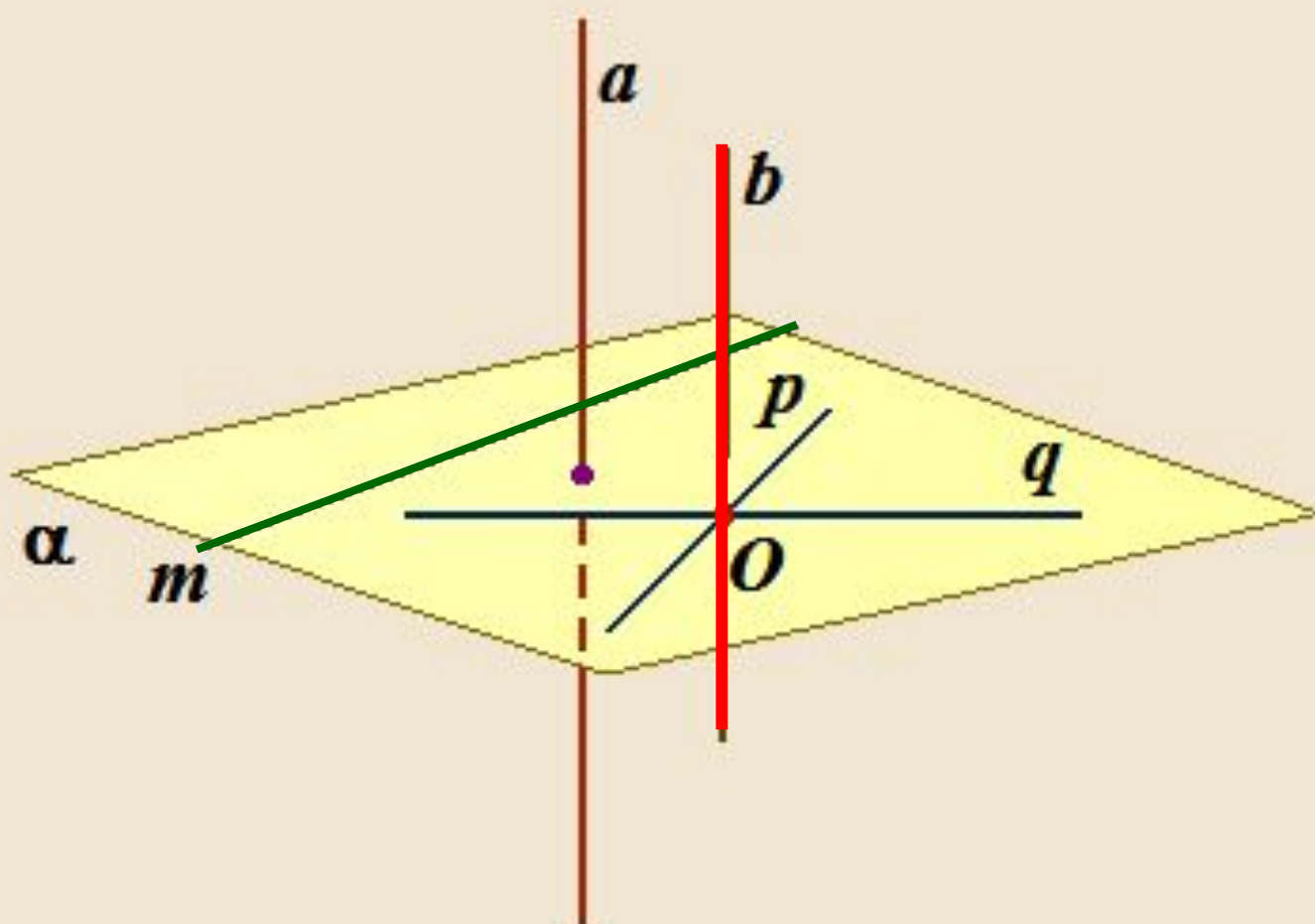
Значит, $\triangle APQ=\triangle BPQ$. Тогда $\angle APQ=\angle BPQ$,
и $\triangle APL=\triangle BPL$. Следовательно, $AL=BL$.



Рассмотрим $\triangle ALB$. Он равнобедренный.

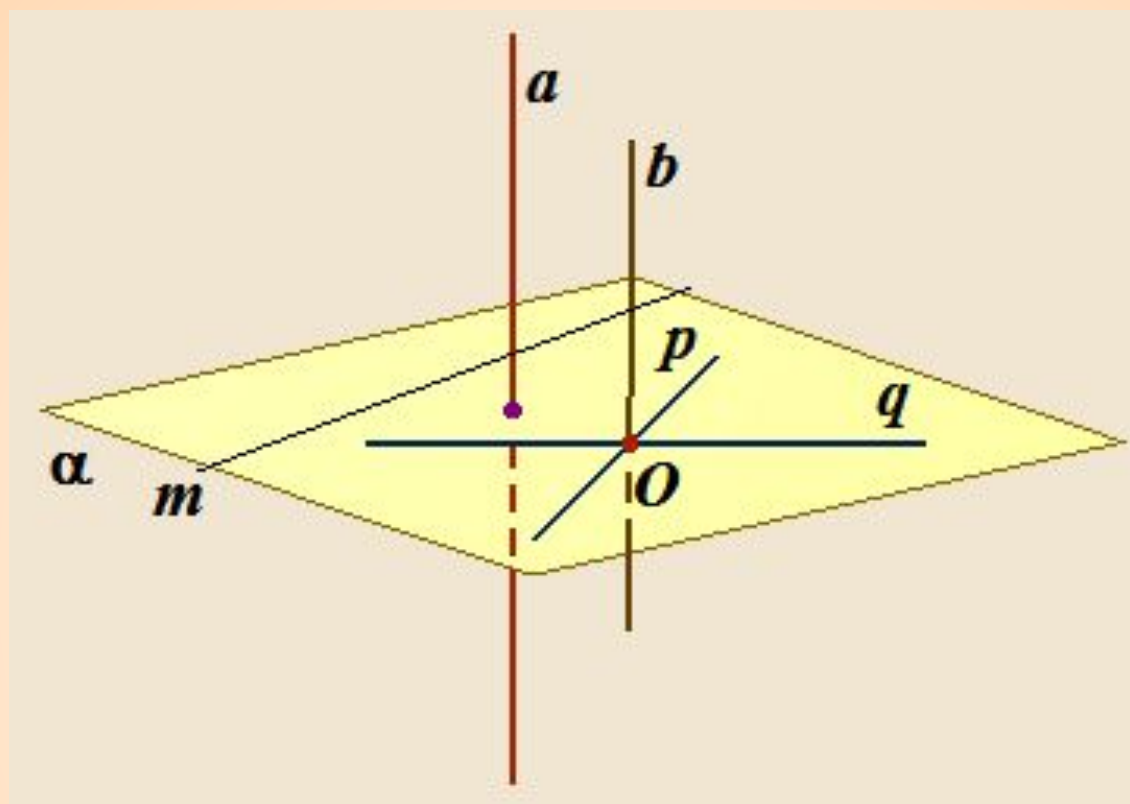
В $\triangle ALB$ медиана LO является высотой, а это означает, что $a \perp l$. Следовательно, $a \perp m$.

Тогда a перпендикулярна плоскости α .



Пусть m – произвольная прямая в плоскости α , не параллельная ни p , ни q . Докажем, что $a \perp m$.

Проведем прямую b через точку O параллельно прямой a .



b перпендикулярна прямым p и q , а значит, как доказано в случае I, $b \perp m$. Отсюда $a \perp m$.

Следовательно, $a \perp \alpha$.