Интегрирование иррациональных выражений

I. Интегралы, содержащие квадратный трехчлен: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $\quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ $\quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Необходимо: 1) под радикалом выделить полный квадрат: $ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$

2) сделать подстановку $= t$

3) свести к табличному интегралу.

Ex:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{((x+\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{16})}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16})}} = \left| \begin{matrix} x = t-\frac{1}{4} \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16}}\right| + C$$

II. Дробно-линейная подстановка –

Интегралы типа: $\int R(x;(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{\alpha}{\beta}};...(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{\delta}{\gamma}})dx$

Надо: 1) сделать подстановку: $=t^k$ k – НОК знаменателей β и γ

2) свести к табличному интегралу

Ex: $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}=\int\frac{dx}{(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x+2)^{\frac{1}{2}}}=\left|\begin{array}{l} HOK(3,2)=6 \\ x+2=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{(t^6)^{\frac{2}{3}}-(t^6)^{\frac{1}{2}}}=6\int\frac{t^5dt}{t^4-t^3}=$$

$$=6\int\frac{t^5dt}{t^3(t-1)}=6\int\frac{t^2dt}{(t-1)}=6\int\frac{(t^2-1)+1}{(t-1)}dt=6\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{(t-1)}dt=$$

$$=6\int(t+1)dt+6\int\frac{1}{t-1}dt=6(\frac{t^2}{2}-t)+6\ln|t-1|+C=3t^2-6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=3(\sqrt[6]{x+2})^2-6\sqrt[6]{x+2}+\ln|\sqrt[6]{x+2}-1|+C=3\sqrt[3]{x+2}-6\sqrt[6]{x+2}+\ln|\sqrt[6]{x+2}-1|+C$$

III. Тригонометрическая подстановка –

Интегралы типа:

$$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx \qquad \int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx \qquad \int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$$

Нужно: 1) Сделать подстановку

$x = a\sin t \qquad x = atgt$

2) Свести к табличному интегралу

Ex:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = ? \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos tdt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt = \int \frac{2\sqrt{1-\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cdot \cos tdt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot \cos tdt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx =$$

$$= tgx + \int dx = tgx + x + C$$