

Интегрирование иррациональных выражений

I. Интегралы, содержащие квадратный

трехчлен: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

Необходимо: 1) под радикалом выделить полный

квадрат: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$

2) сделать $\qquad \qquad \qquad = t$

подстановку
3) свести к табличному

Ex: интегралу.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}} = \left. \begin{array}{l} x = t - \frac{1}{4} \\ dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}} = \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} \right| + C$$

II. Дробно-линейная подстановка –

Интегралы типа: $\int R(x; (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{\alpha}{\beta}}; \dots (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{\delta}{\gamma}}) dx$

Надо 1) сделать $= t^k$ k – НОК β и γ
 : подстановку: знаменателей
 2) свести к табличному

Ex:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}} = \int \frac{dx}{(x+2)^{\frac{2}{3}} - (x+2)^{\frac{1}{2}}} = \left| \begin{array}{l} \text{НОК}(3,2) = 6 \\ x+2 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{(t^6)^{\frac{2}{3}} - (t^6)^{\frac{1}{2}}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^4 - t^3} =$$

$$= 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{(t-1)} = 6 \int \frac{(t^2-1)+1}{(t-1)} dt = 6 \int \frac{(t-1)(t+1)+1}{(t-1)} dt =$$

$$= 6 \int (t+1) dt + 6 \int \frac{1}{t-1} dt = 6(\frac{t^2}{2} - t) + 6 \ln|t-1| + C = 3t^2 - 6t + 6 \ln|t-1| + C =$$

$$= 3(\sqrt[6]{x+2})^2 - 6\sqrt[6]{x+2} + \ln|\sqrt[6]{x+2} - 1| + C = 3\sqrt[3]{x+2} - 6\sqrt[6]{x+2} + \ln|\sqrt[6]{x+2} - 1| + C$$

III. Тригонометрическая подстановка –

Интегралы

типа:

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$$\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

Нужно 1) Сделать подстановку

$$x = a \sin t$$

$$x = atgt$$

2) Свести к табличному интегралу

Ex:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = ? \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right. = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int \frac{2\sqrt{1-\sin^2 t}}{4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t} dt - \int \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t} dt =$$

$$= \operatorname{tg} x + \int dx = \operatorname{tg} x + x + C$$