Лекция 4. Z-преобразование

Вопросы лекции:

1. ***Прямое Z-преобразование.***
2. ***Связь с преобразованием Лапласа.***

Литература:

Гадзиковский В.И. Цифровая обработка сигналов. Учеб. пособие. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2013 [Электронный ресурс]. Точка доступа: http://www.iprbookshop.ru/26929.html

Сергиенко Ф.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. – 608 с.

1. Прямое Z-преобразование

Смысл z-преобразования заключается в том, что последовательности чисел {*x(k)*} ставится в соответствие функция комплексной переменной z, определяемая следующим образом:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \tag{4.1}$$

Разумеется, функция X(z) определена только для тех значений z, при которых ряд (4.1) сходится.

Z-преобразование играет для дискретных сигналов и систем такую же роль, как пре-образование Лапласа — для аналоговых. Определяющим при этом является тот факт, что, z-преобразование импульсной характеристики дискретной системы является дробно-рациональной функцией переменной Z.

В таблице 4.1 представлены z-изображения некоторых числовых последовательностей:

Оригинал $x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}$	**Изображение** $X(z)=Z\{x[n]\}$
1	**2**
$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$	1
$\sigma[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0,\\ 0, & n<0\end{cases}$	$\dfrac{z}{z-1}$
n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
n^3	$\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
$n(n-1)$	$\dfrac{2z}{(z-1)^3}$
$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)$	$(k+1)!\,\dfrac{z}{(z-1)^{k+2}}$
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
e^{an}	$\dfrac{z}{z-e^a}$
$1-e^{an}$	$\dfrac{z(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}$

1	2
$1-e^{a(n+1)}$	$\dfrac{z^2(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}$
$1-e^{a(n-1)}$	$\dfrac{1-e^{-a}}{(z-e^a)(z-1)}$
$1-e^{a(n-k)}$	$\dfrac{z^{-k+1}(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}$
$A e^{an} + B e^{bn}$	$\dfrac{z^2(A+B)-z(Ae^b+Be^a)}{(z-e^a)(z-e^b)}$
$n e^{an}$	$\dfrac{z e^a}{(z-e^a)^2}$
$n^2 e^{an}$	$\dfrac{z e^a(z+e^a)}{(z-e^a)^3}$
$(1-bn)\, e^{an}$	$\dfrac{z^2-z e^a(1+b)}{(z-e^a)^2}$
$(-1)^n e^{an}$	$\dfrac{z}{z+e^a}$
$(-1)^n$	$\dfrac{z}{z+1}$
$\sin(\omega Tn)$	$\dfrac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$\cos(\omega Tn)$	$\dfrac{z[z-\cos(\omega T)]}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$(-1)^n \sin(\omega Tn)$	$\dfrac{-z\sin(\omega T)}{z^2+2z\cos(\omega T)+1}$
$(-1)^n \cos(\omega Tn)$	$\dfrac{z[z+\cos(\omega T)]}{z^2+2z\cos(\omega T)+1}$

Примеры вычисления z-преобразования

Вычислим z-преобразование для некоторых часто встречающихся на практике дискретных сигналов.

Единичная импульсная функция

Единичная импульсная функция является дискретным аналогом дельта-функции и представляет собой одиночный отсчет с единичным значением:

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, k = 0, \\ 0, k \neq 0. \end{cases}$$

Расчет его z-преобразования не представляет сложности:

$$X_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(k) z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1.$$

Функция $X_0(z)$ сходится на всей комплексной плоскости.

Единичный скачок
Дискретный единичный скачок по смыслу полностью соответствует своему аналоговому прообразу.

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, k > 0, \\ 0, k \geq 0. \end{cases}$$

Используя определение z-преобразования (4.1), получаем

$$X_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\,(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} \tag{4.2}$$

Дискретная экспоненциальная функция
Дискретная экспоненциальная функция определяется следующим образом:

$$x(k) = \begin{cases} 0, k < 0, \\ a^k, k \geq 0. \end{cases}$$

Для вычисления z-преобразования нужно вычислить сумму следующего ряда:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1} z)^{-k}$$

Дискретная затухающая синусоида

Последняя из рассматриваемых здесь дискретных последовательностей представляет собой отсчеты синусоиды с произвольными частотой и начальной фазой и экспоненциально меняющейся амплитудой:

$$x(k) = a^k \cos(\omega k + \phi)$$

Для вычисления z-преобразования можно представить косинус по формуле Эйлера в виде полу-суммы двух комплексных экспонент, а потом воспользоваться уже готовым результатом (таблица 4.1):

$$X(z) = \frac{\cos\phi - a\cos(\omega - \phi) z^{-1}}{1 - 2a\cos(\omega) z^{-1} + z^{-2}}$$

2. Связь с преобразованием Лапласа

Дискретное z-преобразование очень просто связано с преобразованиями Лапласа и Фурье. Рассмотрим последовательность, определенную как {*x(k)*}, и сопоставим ей временной сигнал в виде набора дельта-функций:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - kT) \qquad (4.3)$$

где T =1/f — интервал дискретизации. Преобразование Лапласа для сигнала равно:

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t-kT)e^{pt}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\int_0^{\infty}\delta(t-kT)e^{-pt}\,dt.$$

Воспользовавшись фильтрующим свойством дельта-функции, получим:

$$S(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-pkT} \qquad (4.4)$$

Эта формула представляет дискретное преобразование Лапласа (ДПЛ) решётчатой функции $x[n]$, в которой $q=pT=\sigma+j\omega T$ — комплексная переменная. Эта формула переходит в выражение (1), определяющую z-преобразование, если выполнить подстановку $z=e^{q}=e^{pT}$.

Характерной особенностью ДПЛ является то, что комплексный аргумент q входит в изображение $X(q)$ в виде показателя экспоненты e^{q}. Но комплексная экспонента e^{q} является периодической функцией в Q-плоскости с периодом, равным $2\pi j$, т. е. $e^{q+j2\pi k}=e^{q}$, где k — произвольное целое число, поэтому изображение X(q) решётчатой функции $x[n]$ полностью определяется в любой полосе Q-плоскости шириной 2π , параллельной вещественной оси. Обычно эта полоса выбирается симметрично по отношению к вещественной оси, как показано на рис. 1,б, и называется основной.

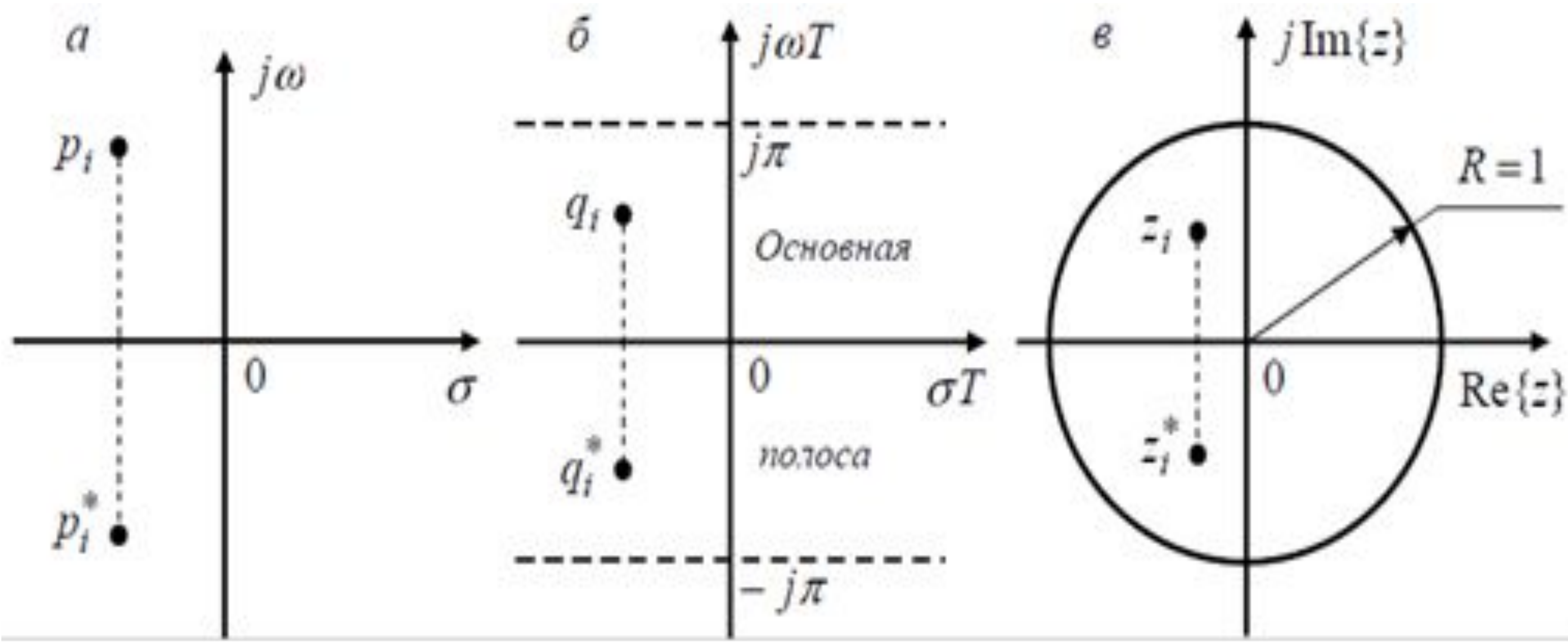

Рис.1. Расположение комплексно-сопряжённых полюсов изображений вещественных сигналов *x(t)* и *x[n]*: а — P-плоскость; б — Q-плоскость; в — Z-плоскость

При $Re(q) < \sigma 0T$ функция $X(q)$ может иметь особые точки — полюсы, в которых $X(q)$ обращается в бесконечность. Если решётчатая функция $x[n]$ является вещественной, то в симметричной относительно оси σT полосе каждому комплексному полюсу $q_i=\sigma_i T+j\omega_i T$ функции $X(q)$ соответствует комплексно-сопряжённый полюс $q_i^*=\sigma_i T-j\omega^i T$. Для комплексных решётчатых функций $x[n]$ это утверждение не справедливо.

ДПЛ позволяет производить над разностными уравнениями такие же алгебраические действия, какие допускает обычное преобразование Лапласа над интегро-дифференциальными уравнениями. Однако проведение алгебраических действий над ДПЛ неудобно из-за того, что в выражении $X(q)$ фактическим аргументом является экспонента e^q.

Для устранения этого недостатка вводится новая комплексная переменная

$$z=e^q=e^{pT}=exp(\sigma T+j\omega T) \qquad (4.5)$$

Замена комплексной переменной приводит к отображению одной комплексной плоскости в другую. При замене (4.5) левая полуплоскость P-плоскости и левая часть основной полосы Q-плоскости преобразуются в круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 1, в).

С учётом обо[illegible] в виде

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0} x[n]\, z^{-n} \qquad (4.6)$$

Полученное выражение является главной частью ряда Лорана, Лорана, представляющего функцию *X(z)* в *Z*-плоскости. Функция комплексного аргумента *X(z)* есть одностороннее *Z*-преобразование или просто *Z*-преобразование решётчатой функции *x[n]*.

Если оригиналы *x(t)* и *x[n]* являются вещественными функциями, то комплексным полюсам их изображений *X(p)* в *P*-плоскости, *X(q)* в *Q*-плоскости и *X(z)* в *Z*-плоскости соответствуют комплексно-сопряжённые полюсы в этих плоскостях (на рис.1 полюсы p_i и p^*_i, q_i и q^*_i, z_i и z^*_i). В случае же комплексных оригиналов *x(t)* и *x[n]* это свойство не выполняется.

Как видно из сопоставления выражений (4.5), (4.4) и (4.6), *z*-преобразование тесно связано с ДПЛ и прямо вытекает из него. Вследствие замены переменной (4.4) выражения *X(z)* выглядят проще, чем *X(q)* , к тому же изображения *X(z)* однозначны и в большинстве практически важных случаев имеют дробно-рациональный вид. По этой причине аппарат *Z*-преобразований получил более широкое распространение для описания дискретных систем, чем аппарат ДПЛ.

Таким образом, взаимное соответствие между z-преобразованием *X(z)* и преобразованием Лапласа *S(p)* описывается следующим образом:

$$X(z) = S\left(1\frac{1}{T}\ln z\right), \qquad S(p) = X(e^{pT}) .$$

Похожими формулами описывается и связь *z*-преобразования *X(z)* с преобразованием Фурье *S(ω)* (заметим, что при рассмотрении этой связи нет необходимости считать последовательность односторонней):

$$X(z) = S\left(1\frac{1}{jT}\ln z\right) \qquad S(\omega) = X(e^{j\omega T})$$