

# Лекция 4. Z-преобразование

Вопросы лекции:

**1. Прямое Z-преобразование.**

**2. Связь с преобразованием Лапласа.**

## ***Литература:***

Гадзиковский В.И. Цифровая обработка сигналов. Учеб. пособие. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2013 [Электронный ресурс]. Точка доступа:

<http://www.iprbookshop.ru/26929.html>

Сергиенко Ф.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. – 608 с.

# 1. Прямое Z-преобразование

Смысл z-преобразования заключается в том, что последовательности чисел  $\{x(k)\}$  ставится в соответствие функция комплексной переменной  $z$ , определяемая следующим образом:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (4.1)$$

Разумеется, функция  $X(z)$  определена только для тех значений  $z$ , при которых ряд (4.1) сходится.

Z-преобразование играет для дискретных сигналов и систем такую же роль, как преобразование Лапласа — для аналоговых. Определяющим при этом является тот факт, что, z-преобразование импульсной характеристики дискретной системы является дробно-рациональной функцией переменной  $z$ .

В таблице 4.1 представлены z-изображения некоторых числовых последовательностей:

Оригинал $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$	Изображение $X(z) = Z\{x[n]\}$
1	2
$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	1
$\sigma[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
$n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$n^2$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$n^3$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
$n(n-1)$	$\frac{2z}{(z-1)^3}$
$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)$	$(k+1)! \frac{z}{(z-1)^{k+2}}$
$a^n$	$\frac{z}{z-a}$
$e^{an}$	$\frac{z}{z-e^a}$
$1 - e^{an}$	$\frac{z(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}$

1	2
$1 - e^{a(n+1)}$	$\frac{z^2(1 - e^a)}{(z - e^a)(z - 1)}$
$1 - e^{a(n-1)}$	$\frac{1 - e^{-a}}{(z - e^a)(z - 1)}$
$1 - e^{a(n-k)}$	$\frac{z^{-k+1}(1 - e^a)}{(z - e^a)(z - 1)}$
$Ae^{an} + Be^{bn}$	$\frac{z^2(A + B) - z(Ae^b + Be^a)}{(z - e^a)(z - e^b)}$
$ne^{an}$	$\frac{ze^a}{(z - e^a)^2}$
$n^2e^{an}$	$\frac{ze^a(z + e^a)}{(z - e^a)^3}$
$(1 - bn)e^{an}$	$\frac{z^2 - ze^a(1 + b)}{(z - e^a)^2}$
$(-1)^n e^{an}$	$\frac{z}{z + e^a}$
$(-1)^n$	$\frac{z}{z + 1}$
$\sin(\omega Tn)$	$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$\cos(\omega Tn)$	$\frac{z[z - \cos(\omega T)]}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$(-1)^n \sin(\omega Tn)$	$\frac{-z \sin(\omega T)}{z^2 + 2z \cos(\omega T) + 1}$
$(-1)^n \cos(\omega Tn)$	$\frac{z[z + \cos(\omega T)]}{z^2 + 2z \cos(\omega T) + 1}$

# Примеры вычисления z-преобразования

Вычислим z-преобразование для некоторых часто встречающихся на практике дискретных сигналов.

## ***Единичная импульсная функция***

Единичная импульсная функция является дискретным аналогом дельта-функции и представляет собой одиночный отсчет с единичным значением:

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Расчет его z-преобразования не представляет сложности:

$$X_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(k)z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1.$$

Функция  $X_0(z)$  сходится на всей комплексной плоскости.

## ***Единичный скачок***

Дискретный единичный скачок по смыслу полностью соответствует своему аналоговому прообразу.

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ 0, & k \geq 0. \end{cases}$$

Используя определение z-преобразования (4.1), получаем

$$X_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} \quad (4.2)$$

## ***Дискретная экспоненциальная функция***

Дискретная экспоненциальная функция определяется следующим образом:

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ a^k, & k \geq 0. \end{cases}$$

Для вычисления z-преобразования нужно вычислить сумму следующего ряда:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-k}$$

### ***Дискретная затухающая синусоида***

Последняя из рассматриваемых здесь дискретных последовательностей представляет собой отсчеты синусоиды с произвольными частотой и начальной фазой и экспоненциально меняющейся амплитудой:

$$x(k) = a^k \cos(\omega k + \phi)$$

Для вычисления z-преобразования можно представить косинус по формуле Эйлера в виде полу-суммы двух комплексных экспонент, а потом воспользоваться уже готовым результатом (таблица 4.1):

$$X(z) = \frac{\cos\phi - a\cos(\omega - \phi)z^{-1}}{1 - 2a\cos(\omega)z^{-1} + z^{-2}}$$

## 2. Связь с преобразованием

### Лапласа

Дискретное преобразование очень просто связано с преобразованиями Лапласа и Фурье. Рассмотрим последовательность, определенную как  $\{x(k)\}$ , и сопоставим ей временной сигнал в виде набора дельта-функций:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - kT) \quad (4.3)$$

где  $T = 1/f$  — интервал дискретизации. Преобразование Лапласа для сигнала равно:

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - kT)e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \int_0^{\infty} \delta(t - kT)e^{-pt} dt.$$

Воспользовавшись фильтрующим свойством дельта-функции, получим:

$$S(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-pkT} \quad (4.4)$$



Эта формула представляет дискретное преобразование Лапласа (ДПЛ) решётчатой функции  $x[n]$ , в которой  $q = pT = \sigma + j\omega T$  — комплексная переменная. Эта формула переходит в выражение (1), определяющую z-преобразование, если выполнить подстановку  $z = e^q = e^{pT}$ .

Характерной особенностью ДПЛ является то, что комплексный аргумент  $q$  входит в изображение  $X(q)$  в виде показателя экспоненты  $e^q$ . Но комплексная экспонента  $e^q$  является периодической функцией в  $Q$ -плоскости с периодом, равным  $2\pi j$ , т. е.  $e^{q+j2\pi k} = e^q$ , где  $k$  — произвольное целое число, поэтому изображение  $X(q)$  решётчатой функции  $x[n]$  полностью определяется в любой полосе  $Q$ -плоскости шириной  $2\pi$ , параллельной вещественной оси. Обычно эта полоса выбирается симметрично по отношению к вещественной оси, как показано на рис. 1,б, и называется основной.

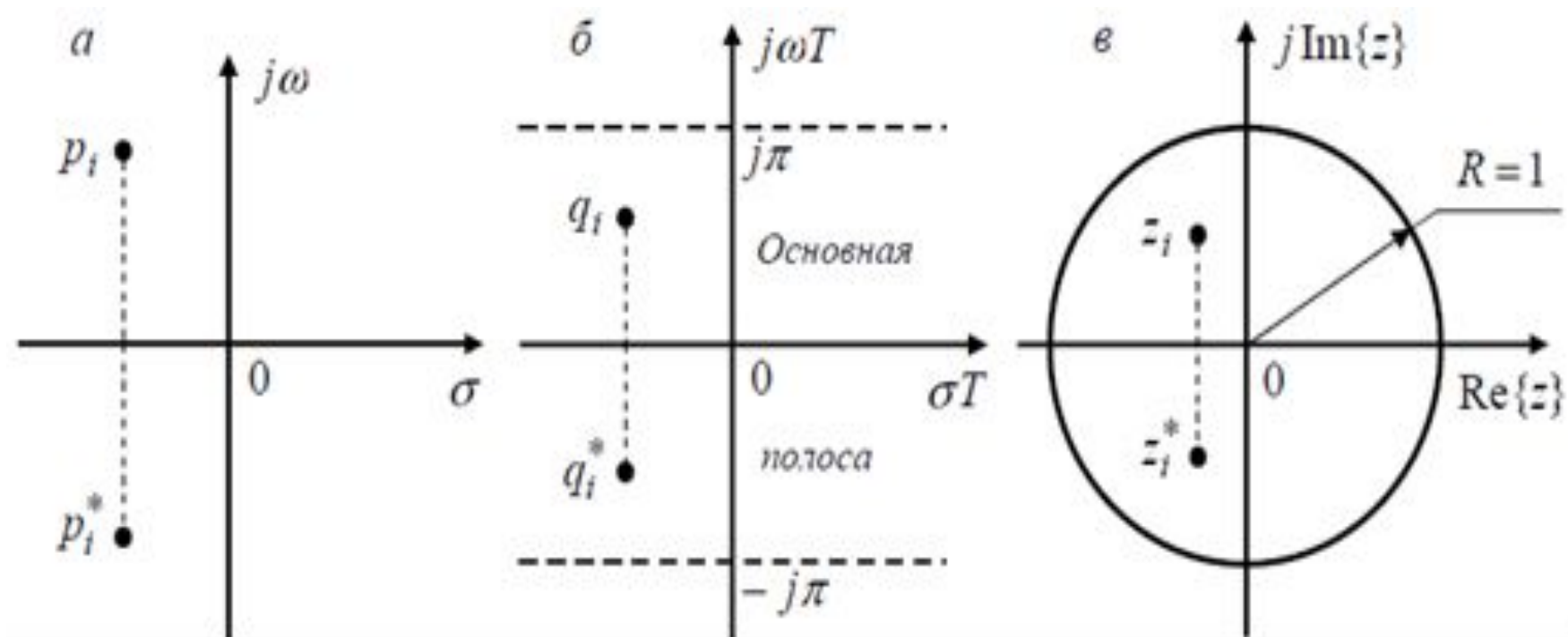


Рис.1. Расположение комплексно-сопряжённых полюсов изображений вещественных сигналов  $x(t)$  и  $x[n]$ : а —  $P$ -плоскость; б —  $Q$ -плоскость; в —  $Z$ -плоскость

При  $Re(q) < \sigma_0 T$  функция  $X(q)$  может иметь особые точки — полюсы, в которых  $X(q)$  обращается в бесконечность. Если решётчатая функция  $x[n]$  является вещественной, то в симметричной относительно оси  $\sigma T$  полосе каждому комплексному полюсу  $q_i = \sigma_i T + j\omega_i T$  функции  $X(q)$  соответствует комплексно-сопряжённый полюс  $q_i^* = \sigma_i T - j\omega_i T$ . Для комплексных решётчатых функций  $x[n]$  это утверждение не справедливо.

ДПЛ позволяет производить над разностными уравнениями такие же алгебраические действия, какие допускает обычное преобразование Лапласа над интегро-дифференциальными уравнениями. Однако проведение алгебраических действий над ДПЛ неудобно из-за того, что в выражении  $X(q)$  фактическим аргументом является экспонента  $e^{qT}$ . Для устранения этого недостатка вводится новая комплексная переменная

$$z = e^q = e^{pT} = \exp(\sigma T + j\omega T) \quad (4.5)$$

Замена комплексной переменной приводит к отображению одной комплексной плоскости в другую. При замене (4.5) левая полуплоскость  $P$ -плоскости и левая часть основной полосы  $Q$ -плоскости преобразуются в круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 1, в).

С учётом об

$$X(z) = Z \{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (4.6)$$

Полученное выражение является главной частью ряда Лорана, Лорана, представляющего функцию  $X(z)$  в  $Z$ -плоскости. Функция комплексного аргумента  $X(z)$  есть одностороннее  $Z$ -преобразование или просто  $Z$ -преобразование решётчатой функции  $x[n]$ .

Если оригиналы  $x(t)$  и  $x[n]$  являются вещественными функциями, то комплексным полюсам их изображений  $X(p)$  в  $P$ -плоскости,  $X(q)$  в  $Q$ -плоскости и  $X(z)$  в  $Z$ -плоскости соответствуют комплексно-сопряжённые полюсы в этих плоскостях (на рис.1 полюсы  $p_i$  и  $p_i^*$ ,  $q_i$  и  $q_i^*$ ,  $z_i$  и  $z_i^*$ ). В случае же комплексных оригиналов  $x(t)$  и  $x[n]$  это свойство не выполняется.

Как видно из сопоставления выражений (4.5), (4.4) и (4.6),  $z$ -преобразование тесно связано с ДПЛ и прямо вытекает из него. Вследствие замены переменной (4.4) выражения  $X(z)$  выглядят проще, чем  $X(q)$ , к тому же изображения  $X(z)$  однозначны и в большинстве практически важных случаев имеют дробно-рациональный вид. По этой причине аппарат  $Z$ -преобразований получил более широкое распространение для описания дискретных систем, чем аппарат ДПЛ.

Таким образом, взаимное соответствие между  $z$ -преобразованием  $X(z)$  и преобразованием Лапласа  $S(p)$  описывается следующим образом:

$$X(z) = S\left(1 \frac{1}{T} \ln z\right), \quad S(p) = X(e^{pT}).$$

Похожими формулами описывается и связь  $z$ -преобразования  $X(z)$  с преобразованием Фурье  $S(\omega)$  (заметим, что при рассмотрении этой связи нет необходимости считать последовательность

односторонней);

$$X(z) = S\left(1 \frac{1}{jT} \ln z\right) \quad S(\omega) = X(e^{j\omega T})$$