Комплексные числа

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i так называемая ***мнимая единица***, $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется ***чисто мнимым***; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

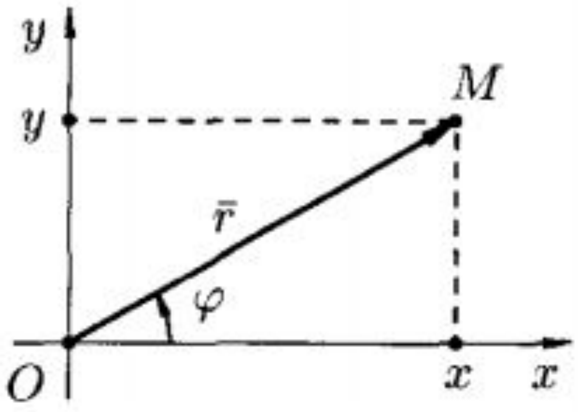
Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y ***мнимой частью*** z, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными*** ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются ***сопряженными***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$.



Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью***. Ось абсцисс называется ***действительной осью***, так как на ней лежат действительные числа $z = x + 0i = x$. Ось ординат называется ***мнимой осью***, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется ***модулем*** этого числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ — величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2 \ldots$): $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ — ***главное значение аргумента***, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, т. е. $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$).

ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$. Тогда получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая запись комплексного числа называется ***тригонометрической формой***.

Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Например, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Так как

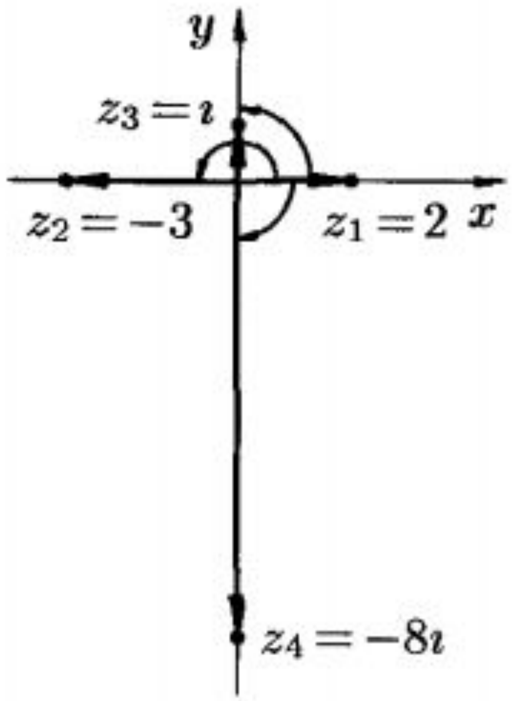
$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$

то

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2k\pi) = \cos(\arg z), \quad \sin\varphi = \sin(\arg z).$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа z, т. е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что



$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно Например, $\arg z_1 = 0$ для $z_1 = 2$; $\arg z_2 = \pi$ для $z_2 = -3$; $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$ для $z_3 = i$; и $\arg z_4 = -\frac{\pi}{2}$ для $z_4 = -8i$.

Используя *формулу Эйлера*

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$$

комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой ***показательной*** (или ***экспоненциальной***) ***форме*** $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ — модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots)$.

В силу формулы Эйлера, *функция* $e^{i\varphi}$ *периодическая с основным периодом* 2π. Для записи комплексного числа z в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т. е. считать $\varphi = \arg z$.

Пример . Записать комплексные числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение: Для z_1 имеем

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

т. е. $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Поэтому

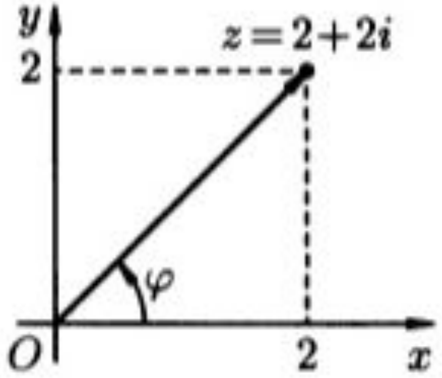
$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Для z_2 имеем

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \arg z = \arg(-1) = \pi,$$

т. е. $\varphi = \pi$. Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$. ●

Пример. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:
а) $z = 2 + 2i$;



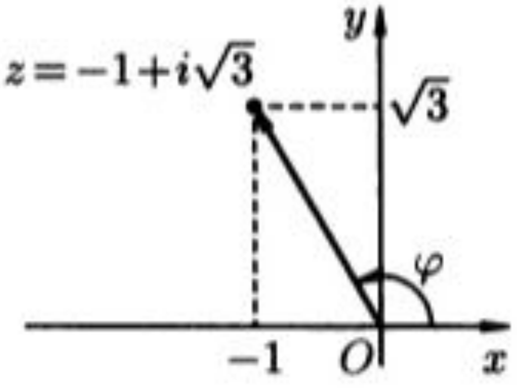
Решение: Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

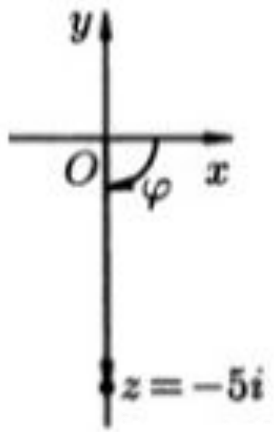
б) $z = -1 + i\sqrt{3}$;

- **Решение:** Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Значит,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}.$$



в) $z = -5i$;



Имеем: $r = \sqrt{0+25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

г) $z = -3 - 2i$;

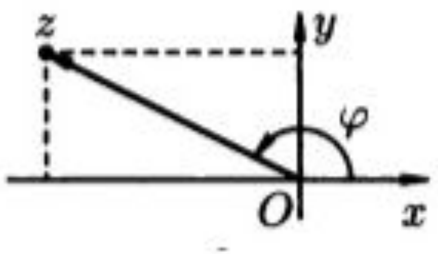
Имеем: $r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi = \operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi$. Значит,

$$-3 - 2i = \sqrt{13}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt{13}e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)}.$$

д) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

Запись $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



Перепишем z в виде $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Надо найти такой угол φ, что $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$. Таким углом является $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, т.е. $\varphi = \frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z = 3\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right) = 3\cdot e^{i\cdot\frac{4}{5}\pi}.$$

Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$;

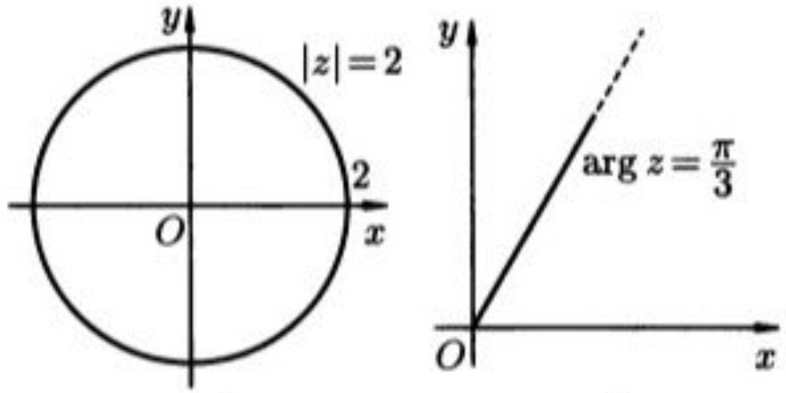
б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$;

а) Согласно формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$.

Множество точек, удовлетворяющих условию $|z| = 2$, т.е. $x^2 + y^2 = 4$ представляет собой окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

б) Точки z лежат на луче, выходящем из точки $O(0; 0)$ под углом $\frac{\pi}{3}$ к действительной оси.



а б

Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

в) $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$;

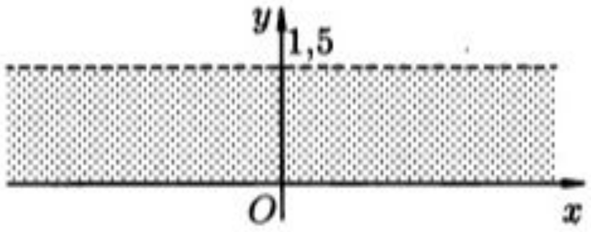
г) $\operatorname{Re} z > 1$;

д) $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$

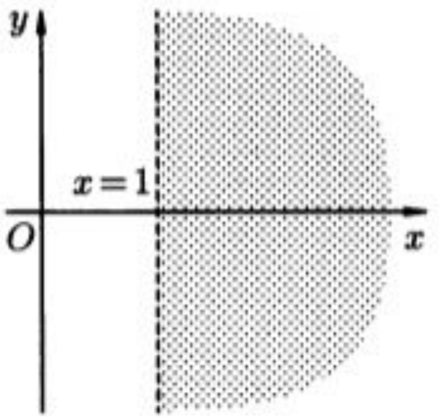
в) Неравенство $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$ можно переписать так $0 \leqslant y < 1{,}5$.

г) Условие $\operatorname{Re} z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$.

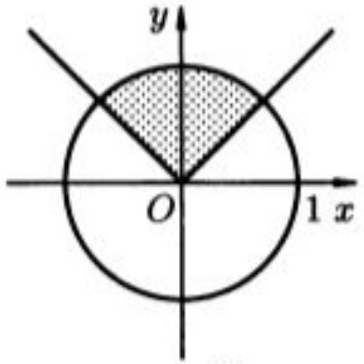
д) Множества точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \leqslant 1$, заключенных между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ удовлетворяют условию $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$



в



г



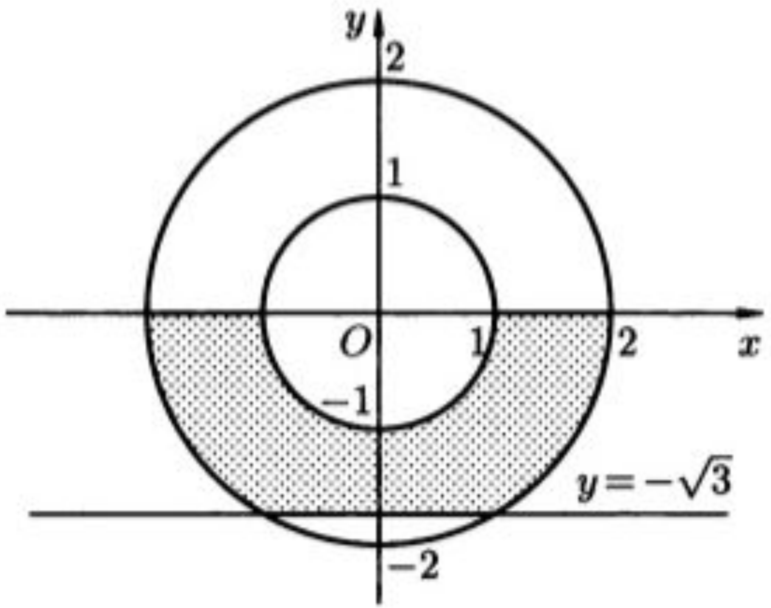
д

Пример. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

$$\begin{cases} 1 \leqslant z \cdot \bar{z} \leqslant 2, \\ -\sqrt{3} \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0; \end{cases}$$

Так как $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде $\begin{cases} 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2, \\ -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$

Неравенства $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R=1$ и $R=2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y=-\sqrt{3}$ и $y=0$, включая прямые $y=-\sqrt{3}$ и $y=0$. Искомое множество точек z заштриховано на рисунке ·

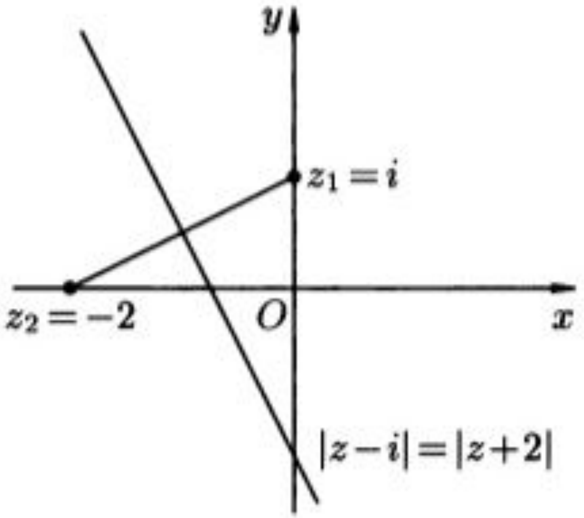


Пример. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

$$|z - i| = |z + 2|;$$

Согласно формуле

$$\boxed{|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2},}$$



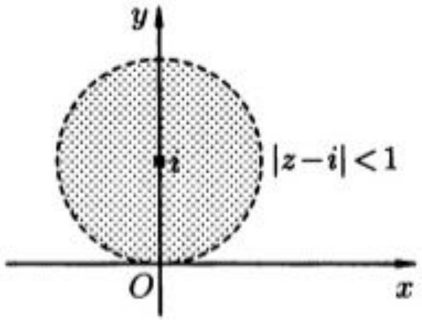
равенству $|z - i| = |z - (-2)|$ удовлетворяет множество точек z , равноудаленных от точек $z_1 = i$ и $z_2 = -2$.

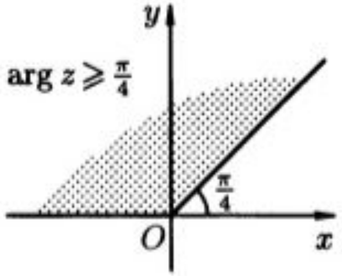
Это множество точек представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z_1 = i$ и $z_2 = -2$

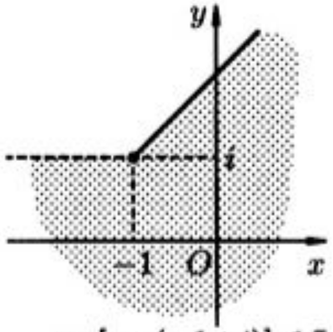
Пример. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

$$\begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \geqslant \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

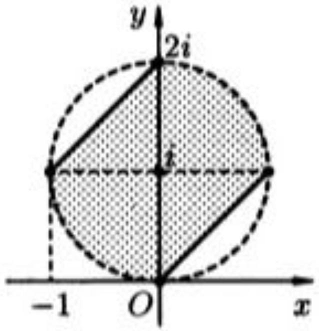
Изобразим на отдельных рисунках множества точек, удовлетворяющих каждому из неравенств условия .







Находим пересечение трех полученных областей — это и будет искомое множество.



ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

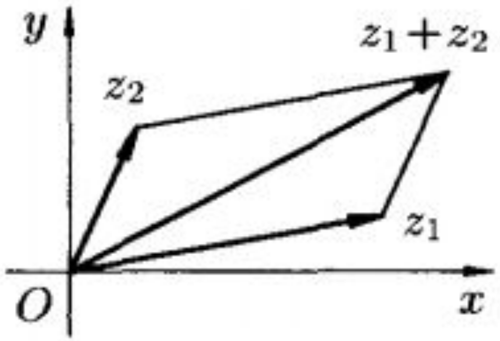
$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).}$$

Сложение комплексных чисел обладает ***переместительным*** (коммутативным) и ***сочетательным*** (ассоциативным) свойствами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Из определения следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы.



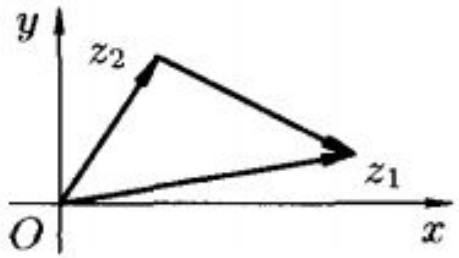
Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Это соотношение называется *неравенством треугольника.*

Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. ***Разностью*** двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1, т. е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то из этого определения легко получить z:

$$\boxed{z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).}$$



Из равенства следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы .

Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$. Отметим, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d,$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Поэтому, например, равенство $|z - 2i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, т. е. окружность с центром в $z_0 = 2i$ и радиусом 1.

Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).}$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Действительно, $i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1.$

Благодаря соотношению формула получается формально путем перемножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 =$$

$$= x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Например,

$$(2-3i)(-5+4i) = -10+8i+15i-12i^2 = -10+23i+12 = 2+23i.$$

Заметим, что $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ — действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

В этом легко убедиться, используя определение

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).}$$

Найдем произведение комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

т. е.

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).}$$

Мы показали, что ***при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.***

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то

$$\boxed{z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

Формула называется ***формулой Муавра.***

Пример. Найти $(1+\sqrt{3}i)^9$.

❍ Решение: Запишем сначала число $z = 1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра имеем

$$z^9 = (1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9\left(\cos 9\frac{\pi}{3} + i\sin 9\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9(-1) = -512. \quad \bullet$$

Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению. ***Частным двух комплексных чисел*** z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$, то из равенства $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.}$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример. Выполнить деление $\dfrac{1+3i}{2+i}$.

Решение: $\dfrac{1+3i}{2+i} = \dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+6i+3}{4+1} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i$.

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид

$$\boxed{\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).}$$

При делении комплексных чисел их модули, соответственно, делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

Пример Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

❍ Решение:
$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i;$$
$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4 + 3i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$
●

Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня n-й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т. е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$ То есть $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Получим n различных значений корня. При других значениях k, в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k = n$ имеем

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \omega_0$$

$$(k = 0).$$

Итак, для любого $z \neq 0$ корень n-й степени из числа z имеет ровно n различных значений.

Пример. Найти значения $\sqrt[3]{i} = \omega$;

Решение: Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Стало быть,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right),$$

$$k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ имеем

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 1$ имеем

$$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 2$ имеем

$$\omega_2 = \cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Пример. Найти значения $\sqrt{-1} = \omega$.

запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Поэтому

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{2}, \quad k = 0, 1.$$

При $k = 0$ получаем $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, а при $k = 1$ получаем $\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$. Таким образом, $\sqrt{-1} = i$ и $\sqrt{-1} = -i$. ●

Пример. Решить уравнение $z^5+32=0$ на множестве комплексных чисел.

Перепишем уравнение в виде $z=\sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представим в тригонометрической форме:

$$-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi).$$

По формуле

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad \text{где } k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,n-1.}$$

находим

$$z = \sqrt[5]{32(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right),$$

где $k=0,1,2,3,4$.

Полагая $k=0,1,2,3,4$, получим

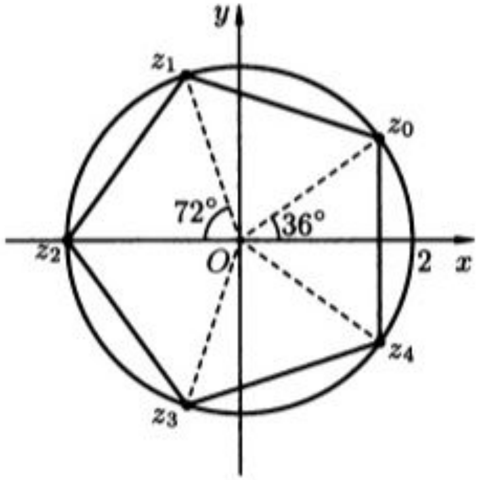
$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) \approx 1{,}6180 + 1{,}1756\cdot i,$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right) \approx -0{,}6180 + 1{,}9021\cdot i,$$

$$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right) \approx -0{,}6180 - 1{,}9021\cdot i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right) \approx 1{,}6180 - 1{,}1756\cdot i.$$



Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R=2$ с центром в начале координат.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить:
   а) $\dfrac{1+3i}{-2+i}\cdot(-2i)+1$;
   б) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{160}$.

2. Найти модуль и аргумент комплексного числа z:
   а) $z=(-5+i)\cdot(-5-i)$;
   б) $z=\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)^{10}$.

3. Решить уравнение:
   а) $z^2-8iz-15=0$;
   б) $z^3+8i=0$.

4. Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z, удовлетворяющих условию:
   а) $|z-2|-|1-2\bar{z}|=0$;
   б) $|z-1+i|\geqslant 1$, $\operatorname{Re} z<1$, $\operatorname{Im} z\leqslant -1$.

5. Найти число с наименьшим аргументом среди чисел z, удовлетворяющих условию: $|z-8|=4$.

6. Вычислить $(z_1\cdot z_2)^{10}$, если $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=\frac{1}{4}(\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ)$.