

Комплексные числа

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

☞ **Комплексным числом** z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая **мнимая единица**, $i^2 = -1$.

☞ Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется **чисто мнимым**; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x , а это означает, что множество \mathbb{R} всех действительных чисел является подмножеством множества \mathbb{C} всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

☞ Число x называется **действительной частью** комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — **мнимой частью** z , $y = \operatorname{Im} z$.

☞ Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными** ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

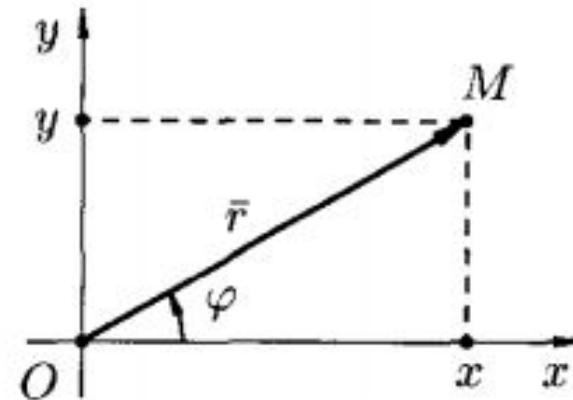
☞ Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**.



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$.

⇒ Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**. Ось абсцисс называется **действительной осью**, так как на ней лежат действительные числа $z = x + 0i = x$. Ось ординат называется **мнимой осью**, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy$.



⇒ Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$. Длина вектора \bar{r} , изображающего комплексное число z , называется **модулем** этого числа и обозначается $|z|$ или r . Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором \bar{r} , изображающим комплексное число, называется **аргументом** этого комплексного числа, обозначается $\text{Arg } z$ или φ .

⇒ Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ — величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$): $\text{Arg } z = \text{arg } z + 2\pi k$, где $\text{arg } z$ — **главное значение аргумента**, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, т. е. $-\pi < \text{arg } z \leq \pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$).



ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

⇒ Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

⇒ Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\vec{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$. Тогда получаем $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$ или

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Такая запись комплексного числа называется *тригонометрической формой*.



Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Например, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Аргумент φ определяется из формул

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Так как

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2k\pi,$$

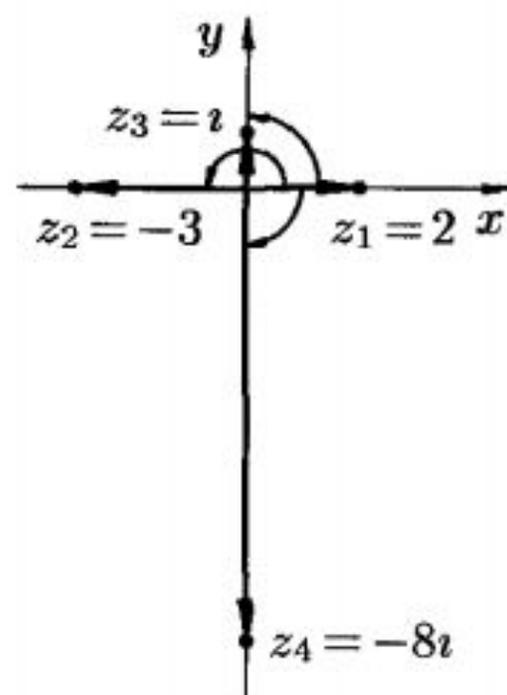
то

$$\cos \varphi = \cos(\operatorname{arg} z + 2k\pi) = \cos(\operatorname{arg} z), \quad \sin \varphi = \sin(\operatorname{arg} z).$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа z , т. е. считать $\varphi = \operatorname{arg} z$.



☉ Так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из формулы $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что



$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для внутренних точек} \\ & \text{I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек} \\ & \text{II четверти,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек} \\ & \text{III четверти.} \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно

Например, $\arg z_1 = 0$ для $z_1 = 2$;
 $\arg z_2 = \pi$ для $z_2 = -3$; $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$ для $z_3 = i$; и
 $\arg z_4 = -\frac{\pi}{2}$ для $z_4 = -8i$.



Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

☞ комплексное число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ можно записать в так называемой **показательной** (или **экспоненциальной**) **форме** $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ — модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \text{Arg } z = \text{arg } z + 2k\pi$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$).

В силу формулы Эйлера, функция $e^{i\varphi}$ периодическая с основным периодом 2π . Для записи комплексного числа z в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т. е. считать $\varphi = \text{arg } z$.



Пример . Записать комплексные числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.

○ Решение: Для z_1 имеем

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

т. е. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Поэтому

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}.$$

Для z_2 имеем

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \arg z = \arg(-1) = \pi,$$

т. е. $\varphi = \pi$. Поэтому $-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}$. ●

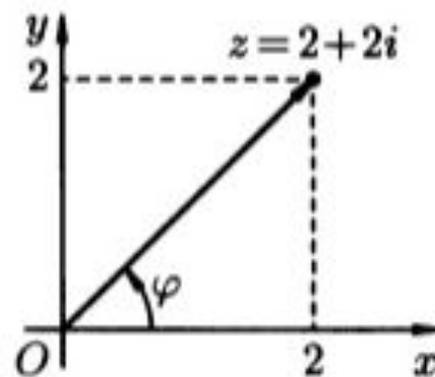


Пример. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$;

○ Решение: Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

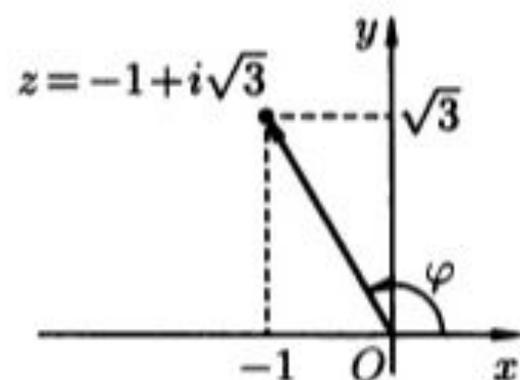


б) $z = -1 + i\sqrt{3}$;

○ Решение: Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi. \text{ Значит,}$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i \cdot \frac{2}{3}\pi}.$$



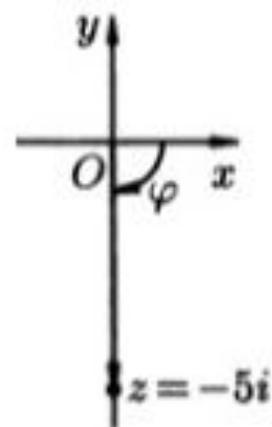
I



в) $z = -5i$;

Имеем: $r = \sqrt{0 + 25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$



г) $z = -3 - 2i$;

Имеем: $r = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi =$
 $= \operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi$. Значит,

$$\begin{aligned} -3 - 2i &= \sqrt{13} \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi\right) + i \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi\right) \right) = \\ &= \sqrt{13} e^{i(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi)}. \end{aligned}$$

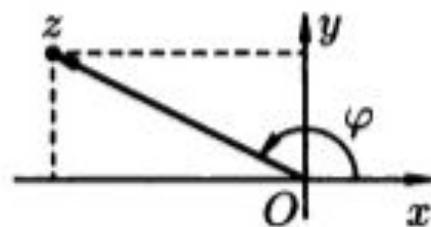


$$\text{д) } z = -3\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right).$$

Запись $z = -3\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Перепишем z в виде $z = 3\left(-\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$. Надо найти такой угол φ , что $\cos \varphi = -\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \varphi = \sin \frac{\pi}{5}$. Таким углом является $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, т.е. $\varphi = \frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z = 3\left(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi\right) = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{4}{5}\pi}.$$



Изобразить на комплексной плоскости \mathbb{C} множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$;

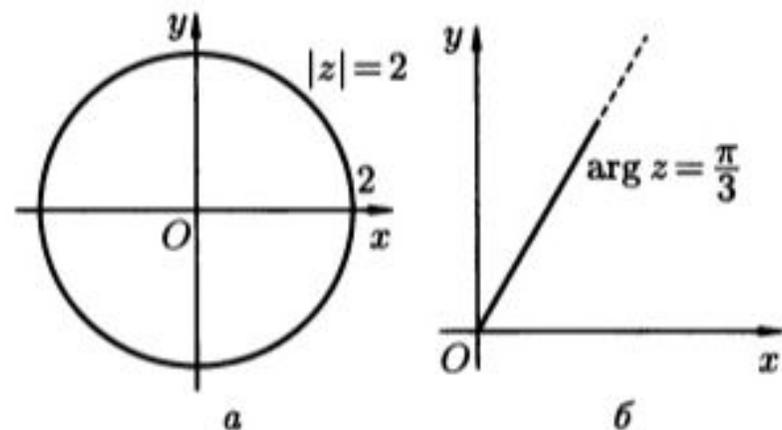
б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$;

○ а) Согласно формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$.

Множество точек, удовлетворяющих условию $|z|=2$, т.е. $x^2 + y^2 = 4$ представляет собой окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

б) Точки z лежат на луче, выходящем из точки $O(0; 0)$ под углом $\frac{\pi}{3}$ к действительной оси.



Изобразить на комплексной плоскости \mathbb{C} множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

в) $0 \leq \operatorname{Im} z < 1,5$;

г) $\operatorname{Re} z > 1$;

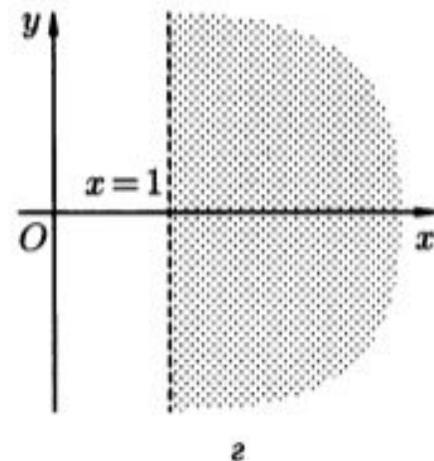
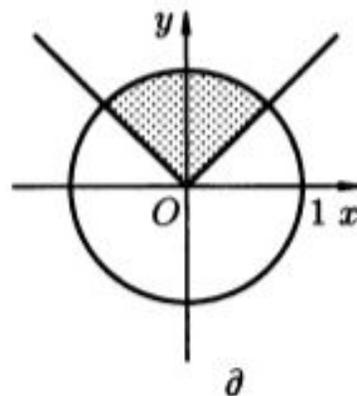
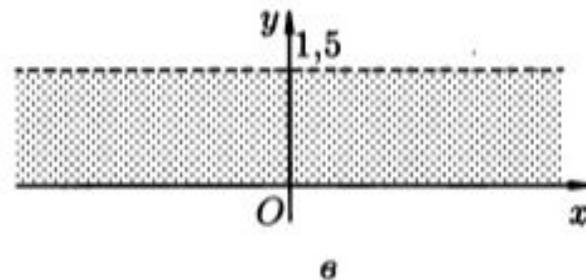
д) $\begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

в) Неравенство $0 \leq \operatorname{Im} z < 1,5$ можно переписать так $0 \leq y < 1,5$.

г) Условие $\operatorname{Re} z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$.

д) Множества точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \leq 1$, заключенных между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

удовлетворяют условию $\begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

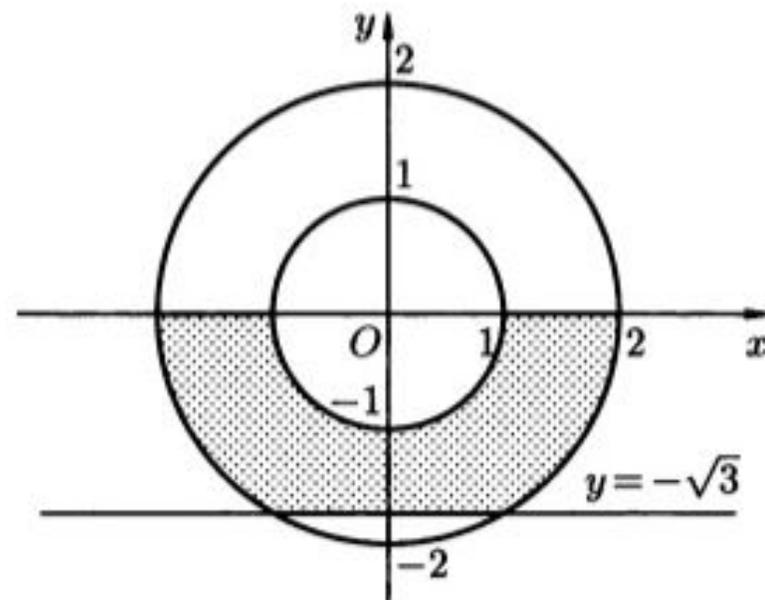


Пример. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

$$\begin{cases} 1 \leq z \cdot \bar{z} \leq 2, \\ -\sqrt{3} \leq \operatorname{Im} z \leq 0; \end{cases}$$

○ Так как $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде $\begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \\ -\sqrt{3} \leq y \leq 0. \end{cases}$

Неравенства $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R = 1$ и $R = 2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \leq y \leq 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$, включая прямые $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$. Искомое множество точек z заштриховано на рисунке.



Пример. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

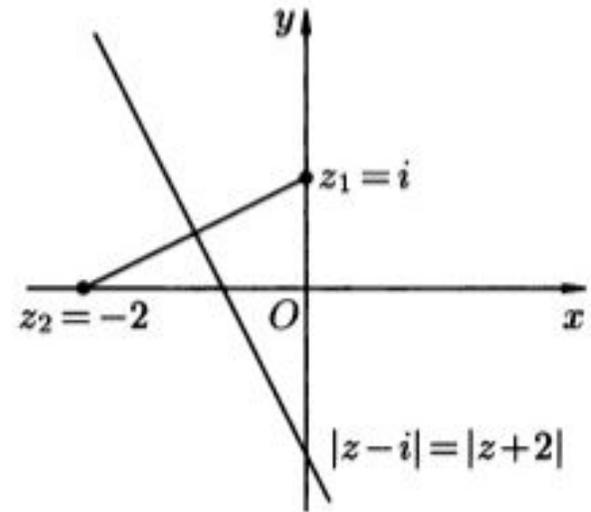
$$|z - i| = |z + 2|;$$

Согласно формуле

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

равенству $|z - i| = |z - (-2)|$ удовлетворяет множество точек z , равноудаленных от точек $z_1 = i$ и $z_2 = -2$.

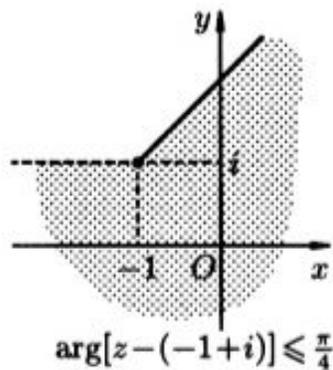
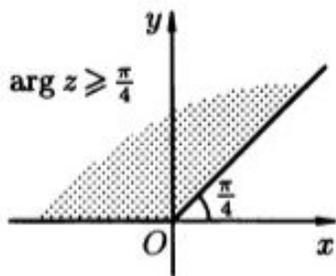
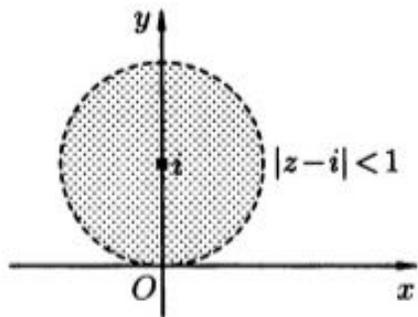
Это множество точек представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z_1 = i$ и $z_2 = -2$



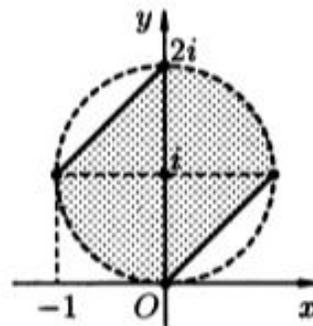
Пример. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

$$\begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Изобразим на отдельных рисунках множества точек, удовлетворяющих каждому из неравенств условия.



Находим пересечение трех полученных областей — это и будет искоемое множество. ●



ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение комплексных чисел

⇒ Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

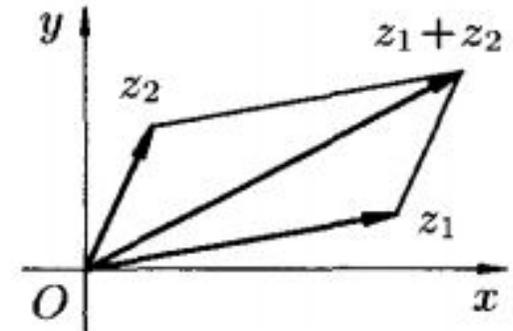
⊙ Сложение комплексных чисел обладает **переместительным** (коммутативным) и **сочетательным** (ассоциативным) свойствами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Из определения следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы.

Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Это соотношение называется **неравенством треугольника**.



Вычитание комплексных чисел

⇒ Вычитание определяется как действие, обратное сложению. **Разностью** двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z , которое, будучи сложеным с z_2 , дает число z_1 , т. е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то из этого определения легко получить z :

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

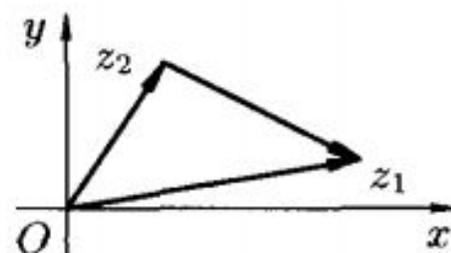
Из равенства следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы.

Непосредственно из рисунка видно, что $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$. Отметим, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d,$$

⇒ т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Поэтому, например, равенство $|z - 2i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z , находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, т. е. окружность с центром в $z_0 = 2i$ и радиусом 1.



Умножение комплексных чисел

☞ *Произведением* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2 = -1.$$

Действительно, $i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$.

Благодаря соотношению формула получается формально путем перемножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 = \\ &= x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).\end{aligned}$$



Например,

$$(2 - 3i)(-5 + 4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$$

Заметим, что $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ — действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

В этом легко убедиться, используя определение

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$



Найдем произведение комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

т. е.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

☉ Мы показали, что *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

➡ Формула называется *формулой Муавра.*



Пример. Найти $(1 + \sqrt{3}i)^9$.

○ Решение: Запишем сначала число $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} \implies \\ \implies \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

По формуле Муавра имеем

$$z^9 = (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left(\cos 9 \frac{\pi}{3} + i \sin 9 \frac{\pi}{3} \right) = \\ = 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 2^9 (-1) = -512. \quad \bullet$$



Деление комплексных чисел

☞ Деление определяется как действие, обратное умножению. **Частным двух комплексных чисел** z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z , которое, будучи умноженным на z_2 , дает число z_1 , т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$, то из равенства $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y :

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).



Пример. Выполнить деление $\frac{1+3i}{2+i}$.

○ Решение: $\frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

☉ При делении комплексных чисел их модули, соответственно, делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.



Пример Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

○ Решение: $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i;$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$



Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня n -й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

☞ **Корнем n -й степени из комплексного числа z** называется комплексное число ω , удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т. е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, а $\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$. То есть $\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$
$$k = 0, 1, \dots, n - 1.$$



Получим n различных значений корня. При других значениях k , в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k = n$ имеем

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi n}{n} \right) = \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) = \omega_0 \\ & \hspace{20em} (k = 0).\end{aligned}$$

Итак, для любого $z \neq 0$ корень n -й степени из числа z имеет ровно n различных значений.



Пример. Найти значения $\sqrt[3]{i} = \omega$;

○ Решение: Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$. Стало быть,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right),$$
$$k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ имеем

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

при $k = 1$ имеем

$$\omega_1 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

при $k = 2$ имеем

$$\omega_2 = \cos \frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$



Пример. Найти значения $\sqrt{-1} = \omega$.

запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi.$$

Поэтому

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}, \quad k = 0, 1.$$

При $k = 0$ получаем $\omega_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, а при $k = 1$ получаем

$\omega_1 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$. Таким образом, $\sqrt{-1} = i$ и $\sqrt{-1} = -i$. ●



Пример. Решить уравнение $z^5 + 32 = 0$ на множестве комплексных чисел.

○ Перепишем уравнение в виде $z = \sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представим в тригонометрической форме:

$$-32 = 32(\cos \pi + i \sin \pi).$$

По формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

находим

$$z = \sqrt[5]{32}(\cos \pi + i \sin \pi) = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, 4$, получим

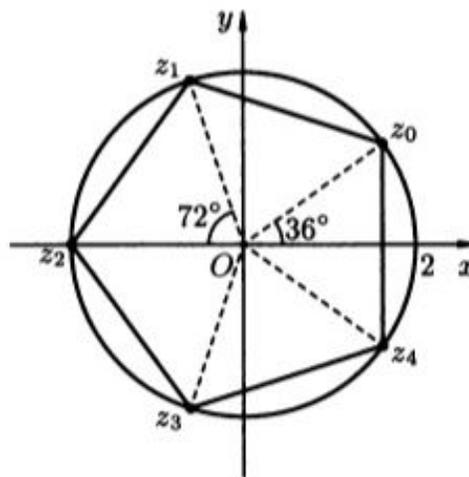
$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \approx 1,6180 + 1,1756 \cdot i,$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right) \approx -0,6180 + 1,9021 \cdot i,$$

$$z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right) \approx -0,6180 - 1,9021 \cdot i,$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right) \approx 1,6180 - 1,1756 \cdot i.$$



Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат. ●



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить:

а) $\frac{1+3i}{-2+i} \cdot (-2i) + 1;$

б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{160}.$

2. Найти модуль и аргумент комплексного числа z :

а) $z = (-5+i) \cdot (-5-i);$

б) $z = \left(\frac{4+3i}{5}\right)^{10}.$

3. Решить уравнение:

а) $z^2 - 8iz - 15 = 0;$

б) $z^3 + 8i = 0.$

4. Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z , удовлетворяющих условию:

а) $|z-2| - |1-2\bar{z}| = 0;$

б) $|z-1+i| \geq 1, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z \leq -1.$

5. Найти число с наименьшим аргументом среди чисел z , удовлетворяющих условию: $|z-8| = 4.$

6. Вычислить $(z_1 \cdot z_2)^{10}$, если $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{1}{4}(\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ).$

