РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА

Кафедра управления образованием и кадрового менеджмента

Симплекс-метод

Выполнила студентка гр. ЗМвО 5-18:
Остапенко К.В.

Симплекс-метод

- Данный метод является методом целенаправленного перебора опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимальное решение отсутствует.

Историческая справка

- В работе Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства» (1939) были впервые изложены принципы новой отрасли математики, которая позднее получила название линейного программирования.
- Исторически общая задача линейного программирования была впервые поставлена в 1947 году Джорджем Бернардом Данцигом, Маршаллом Вудом и их сотрудниками в департаменте военно-воздушных сил США. В то время эта группа занималась исследованием возможности использования математических и смежных с ними методов для военных задач и проблем планирования. В дальнейшем для развития этих идей в ВВС была организована исследовательская группа под названием Project SCOOP. Первое успешное решение задачи линейного программирования на ЭВМ SEAC было проведено в январе 1952 года.

Основное содержание симплексного метода заключается в следующем:

1. Указать способ нахождения оптимального опорного решения;
2. Указать способ перехода от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному, т.е. указать способ улучшения опорного решения;
3. Задать критерии, которые позволяют своевременно прекратить перебор опорных решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии оптимального решения.

Для того, чтобы решить задачу симплексным методом необходимо выполнить следующий алгоритм:

1. Привести задачу к каноническому виду;
2. Найти начальное опорное решение с "единичным базисом" (если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решение ввиду несовместимости системы ограничений);
3. Вычислить оценки разложений векторов по базису опорного решения и заполнить таблицу симплексного метода;
4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается;
5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора находят все оптимальные решения.

- Симплекс-метод включает в себя целую группу алгоритмов и способов решения задач линейного программирования. Один из таких способов, предусматривающий запись исходных данных и их пересчет в специальной таблице, носит наименование табличного симплекс-метода.
- Рассмотрим алгоритм табличного симплекс-метода на примере решения производственной задачи, которая сводится к нахождению производственного плана обеспечивающего максимальную прибыль.

Исходные данные для решения задачи симплекс-методом:

- Предприятие выпускает 4 вида изделий, обрабатывая их на 3-х станках. Нормы времени (мин./шт.) на обработку изделий на станках, заданы матрицей А:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Фонд времени работы станков (мин.) задан в матрице B:

$$B = \begin{pmatrix} 252 \\ 144 \\ 80 \end{pmatrix}$$

- Прибыль от продажи каждой единицы изделия (руб./шт.) задана матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 48 & 33 & 16 & 22 \end{pmatrix}$$

- Целью данной задачи является составление такого плана производства, при котором прибыль предприятия будет максимальной.

Проводим вычисления с помощью табличного симплекс-метода:

1. Обозначим X1, X2, X3, X4 планируемое количество изделий каждого вида. Тогда искомый план: (X1, X2, X3, X4)
2. Запишем ограничения плана в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 6X_1 + 3X_2 + X_3 + 4X_4 \le 252 \\ 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + X_4 \le 144 \\ X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_4 \le 80 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{cases}$$

3. Тогда целевая прибыль:

$$P(X) = 48X_1 + 33X_2 + 16X_3 + 22X_4 \rightarrow max$$

- То есть прибыль от выполнения производственного плана должна быть максимальной.

4. Для решения получившейся задачи на условный экстремум, заменим систему неравенств системой линейных уравнений путем ввода в нее дополнительных неотрицательных переменных (X5, X6, X7).

$$\begin{cases} 6X_1 + 3X_2 + X_3 + 4X_4 + X_5 = 252 \\ 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + X_4 + X_6 = 144 \\ X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_4 + X_7 = 80 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \ge 0 \end{cases}$$

5. Примем следующий опорный план:

X1 = 0, X2 = 0, X3 = 0, X4 = 0, X5 = 252, X6 = 144, X7 = 80

6. Занесем данные в симплекс-таблицу:

Базис	Н	*X1*	*X2*	*X3*	*X4*	*X5*	*X6*	*X7*	*b*
X5	252	6	3	1	4	1	0	0	
X6	144	2	4	5	1	0	1	0	
X7	80	1	2	4	3	0	0	1	
c		-48	-33	-16	-22	0	0	0	

- ! В последнюю строку заносим коэффициенты при целевой функции и само ее значение с обратным знаком;

7. Выбираем в последней строке наибольшее (по модулю) отрицательное число.

- Вычислим b = Н / Элементы_выбранного_столбца

Базис	Н	$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$X5$	$X6$	$X7$	b
$X5$	252	6	3	1	4	1	0	0	**42**
$X6$	144	2	4	5	1	0	1	0	**72**
$X7$	80	1	2	4	3	0	0	1	**80**
c		**-48**	-33	-16	-22	0	0	0	

- Среди вычисленных значений b выбираем наименьшее.

- Пересечение выбранных столбца и строки даст нам разрешающий элемент. Меняем базис на переменную соответствующую разрешающему элементу (X5 на X1).

Базис	Н	*X1*	*X2*	*X3*	*X4*	*X5*	*X6*	*X7*	*b*
X1	252	6	3	1	4	1	0	0	**42**
X6	144	2	4	5	1	0	1	0	72
X7	80	1	2	4	3	0	0	1	80
c		-48	-33	-16	-22	0	0	0	

- 8. Теперь необходимо пересчитать все элементы симплекс-таблицы, кроме столбца b. Вот как это можно сделать:
- Сам разрешающий элемент обращается в 1.
- Для элементов разрешающей строки – aij(*) = aij / РЭ (то есть каждый элемент делим на значение разрешающего элемента и получаем новые данные).
- Для элементов разрешающего столбца – они просто обнуляются.
- Остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника.

РЭ	...	A
...	...	...
B	...	a_{ij}

AIJ(*) = AIJ – (A * B / РЭ)

- Берем текущую пересчитываемую ячейку и ячейку с разрешающим элементом. Они образуют противоположные углы прямоугольника. Далее перемножаем значения из ячеек 2-х других углов этого прямоугольника. Это произведение (A * B) делим на разрешающий элемент (РЭ). И вычитаем из текущей пересчитываемой ячейки (aij) то, что получилось. Получаем новое значение - aij(*).

Базис	H	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	b
X1	42	1	1/2	1/6	2/3	1/6	0	0	
X6	60	0	3	14/3	-1/3	-1/3	1	0	
X7	38	0	3/2	23/6	7/3	-1/6	0	1	
c		0	-9	-8	10	8	0	0	

- 9. Вновь проверяем последнюю строку (c) на наличие отрицательных чисел. Если их нет – оптимальный план найден, переходим к последнему этапу решения задачи. Если есть – план еще не оптимален, и симплекс-таблицу вновь нужно пересчитать.
- Так как у нас в последней строке снова имеются отрицательные числа, начинаем новую итерацию вычислений.

Базис	Н	*X1*	*X2*	*X3*	*X4*	*X5*	*X6*	*X7*	*b*
X1	42	1	1/2	1/6	2/3	1/6	0	0	84
X6	60	0	3	14/3	-1/3	-1/3	1	0	20
X7	38	0	3/2	23/6	7/3	-1/6	0	1	76/3
c		0	-9	-8	10	8	0	0	

Базис	Н	*X1*	*X2*	*X3*	*X4*	*X5*	*X6*	*X7*	*b*
X1	***32***	1	0	-11/18	13/18	2/9	-1/6	0	
X2	***20***	0	1	14/9	-1/9	-1/3	1/3	0	
X7	8	0	0	3/2	15/6	0	-1/2	1	
P	***2 196***	0	0	6	9	7	3	0	

- 10. Так как в последней строке нет отрицательных элементов, это означает, что нами найден оптимальный план производства! А именно: выпускать мы будем те изделия, которые перешли в колонку «Базис» - X1 и X2. Прибыль от производства каждой единицы продукции нам известна (матрица С). Осталось перемножить найденные объемы выпуска изделий 1 и 2 с прибылью на 1 шт., получим итоговую (максимальную!) прибыль при данном плане производства.
- ОТВЕТ:
- X1 = 32 шт., X2 = 20 шт., X3 = 0 шт., X4 = 0 шт.
- P = 48 * 32 + 33 * 20 = 2 196 руб.

Спасибо за внимание!