ПОВТОРЕНИЕ тренировочные задания 11 класс

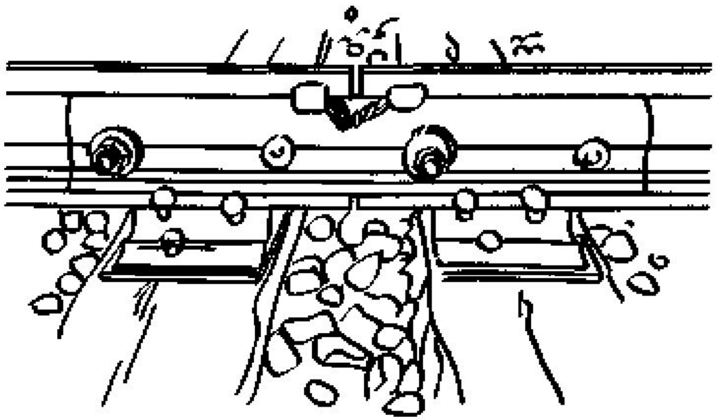
Решение задач на межпредметные связи.

подготовила учитель математики МБОУСОШ № 43 Ст.Северская Краснодарский край Шкребий Ирина Александровна

1. При температуре 0°С рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.



Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$l(t^\circ) - l_0 = 3 \text{ (мм)}$$

при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ\text{C})^{-1}$:

$$l(t^\circ) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l_0 \alpha t^\circ = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow 10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

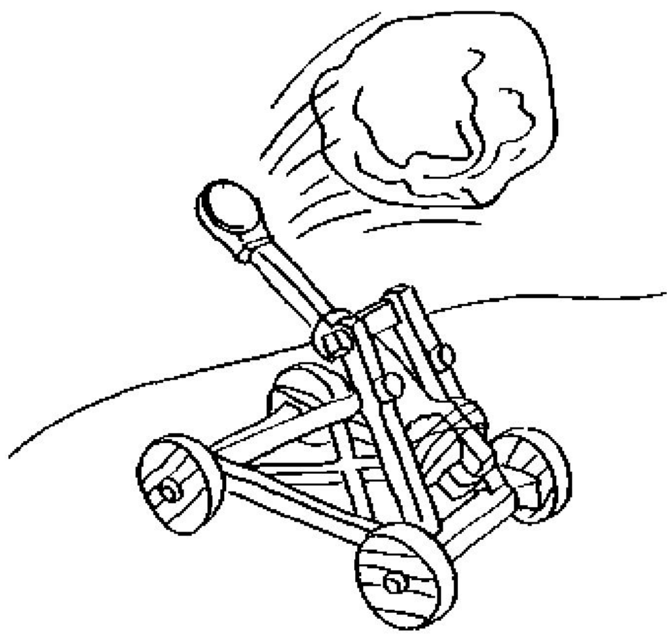
$$\Leftrightarrow t^\circ = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^\circ = 25\ ^\circ\text{C}.$$

Ответ: 25.

2. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?



Решение. Задача сводится к решению неравенства $y \geqslant 9$: при заданных значениях параметров a и b

$$y \geqslant 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2+x \geqslant 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-100x+900 \leqslant 0 \Leftrightarrow 10 \leqslant x \leqslant 90 \text{ м.}$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние — 90 метров.

Ответ: 90.

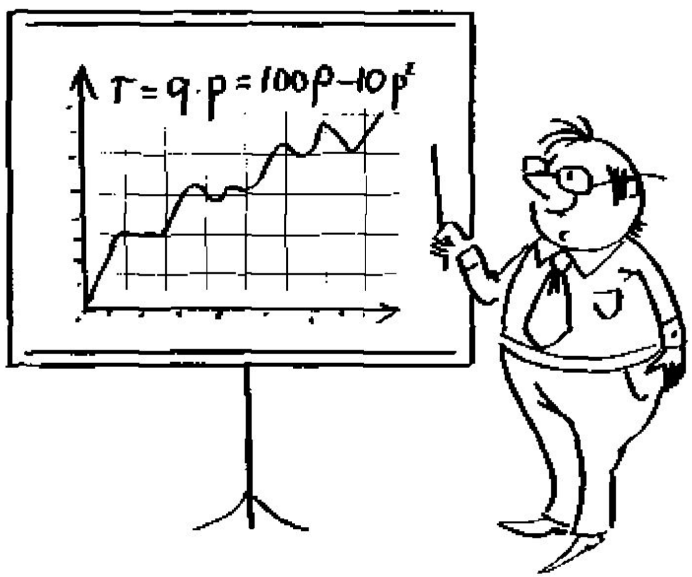
2а. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 100 - 10p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как

$$r(p) = q \cdot p.$$

Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.



Решение. Задача сводится к решению неравенства $r(p) \geqslant$
$\geqslant 240$:

$$r(p) = q \cdot p = (100 - 10p)p = 100p - 10p^2,$$

$$r(p) \geqslant 240 \iff 10p^2 - 100p + 240 \leqslant 0 \iff$$

$$\iff p^2 - 10p + 24 \leqslant 0 \iff 4 \leqslant p \leqslant 6.$$

Ответ: 6.

26. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,441 м? Ответ выразите в м/с.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geqslant 0$: при заданной длине верёвки $L = 0{,}441$ м

$$P \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geqslant 0 \;\overset{m>0}{\Leftrightarrow}\; \frac{v^2}{0{,}441} - 10 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

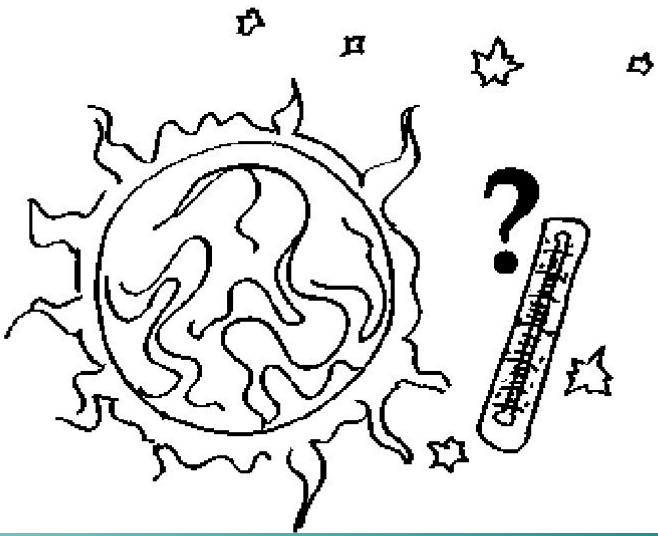
$$\Leftrightarrow\; v^2 \geqslant 4{,}41 \;\overset{v>0}{\Leftrightarrow}\; v \geqslant 2{,}1 \text{ м/с}.$$

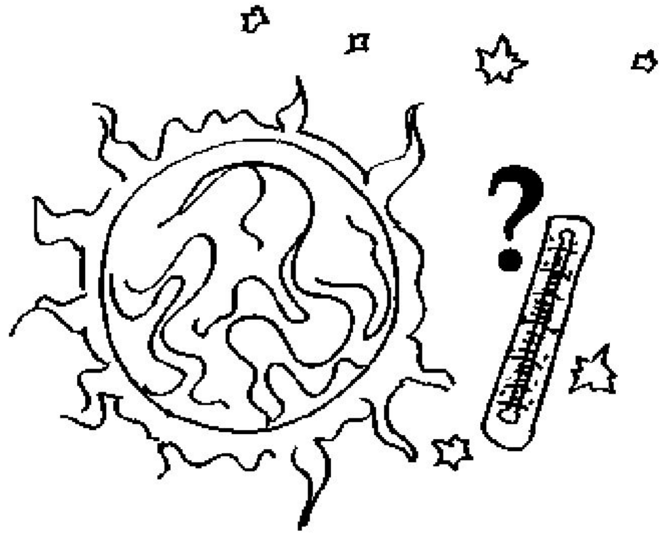
Ответ: 2,1.

3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.





Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$P \geqslant 9{,}12 \cdot 10^{25}$$

при известном значении постоянной $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ и заданной площади звезды $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2:

$$P \geqslant 9{,}12 \cdot 10^{25} \Leftrightarrow \sigma S T^4 \geqslant 9{,}12 \cdot 10^{25} \Leftrightarrow T^4 \geqslant \frac{9{,}12 \cdot 10^{25}}{\sigma S} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T \geqslant \sqrt[4]{\frac{9{,}12 \cdot 10^{25}}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{20}}} \Leftrightarrow T \geqslant \sqrt[4]{256 \cdot 10^{12}} = 4000 \text{ К}.$$

Ответ: 4000.

3а. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выраженная в ньютонах, будет определяться по формуле:

$$F_{\text{А}} = \rho g l^3,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, l — длина ребра куба в метрах, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ м/с^2). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить эксплуатацию аппарата в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 78 400 Н? Ответ выразите в метрах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$F_{\text{А}} \leqslant 78\,400$$

при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

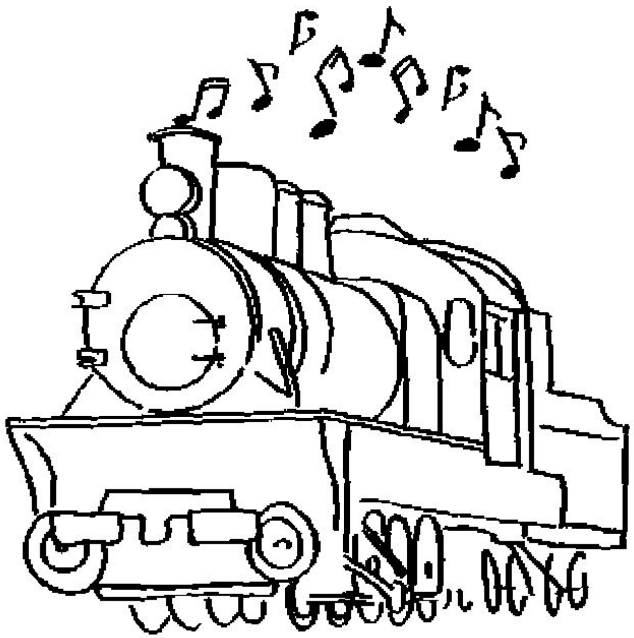
$$F\text{А} \leqslant 78\,400 \iff 1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3 \leqslant 78\,400 \iff l^3 \leqslant 8 \iff l \leqslant 2 \text{ (м)}.$$

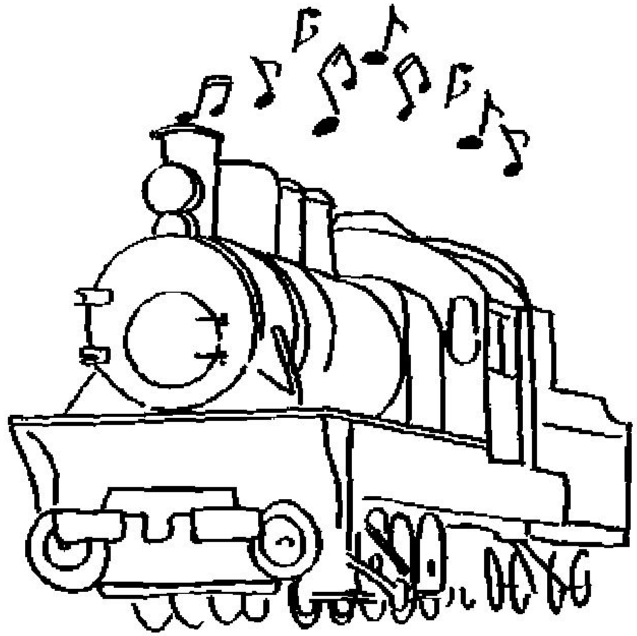
Ответ: 2.

4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.





Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$f(v) - f_0 \geqslant 10$$

при известном значении постоянной $f_0 = 440$ Гц:

$$f(v) - f_0 \geqslant 10 \iff \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geqslant 10 \iff \frac{440}{1 - \frac{v}{315}} - 440 \geqslant 10 \iff$$

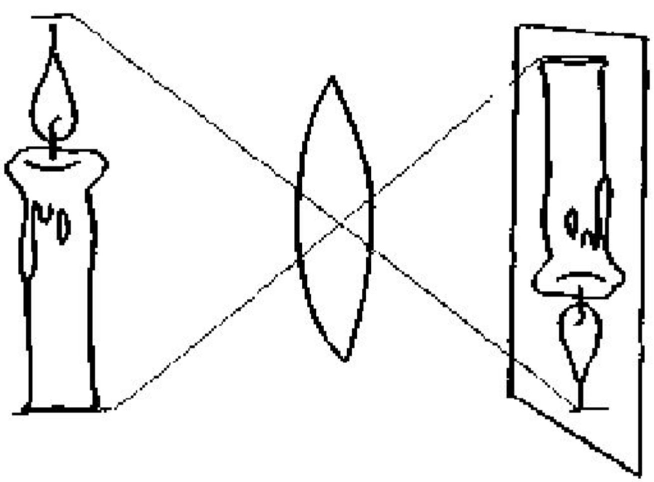
$$\iff 1 - \frac{v}{315} \leqslant \frac{44}{45} \iff v \geqslant \frac{315}{45} = 7 \text{ м/с}.$$

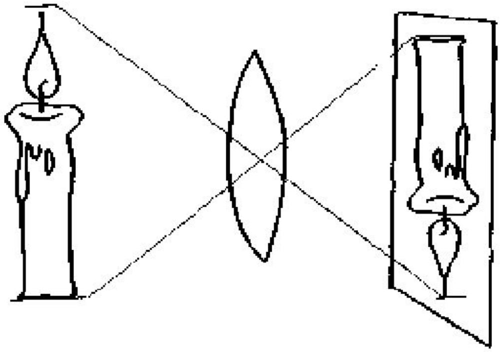
Ответ: 7.

4а. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.





Решение. Поскольку $f = 30$, имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному значению d_1 соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36 \text{ см}.$$

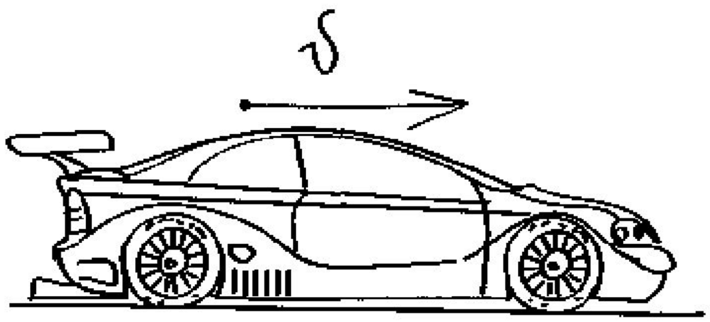
По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение $d_1 = 36$ см удовлетворяет условию.

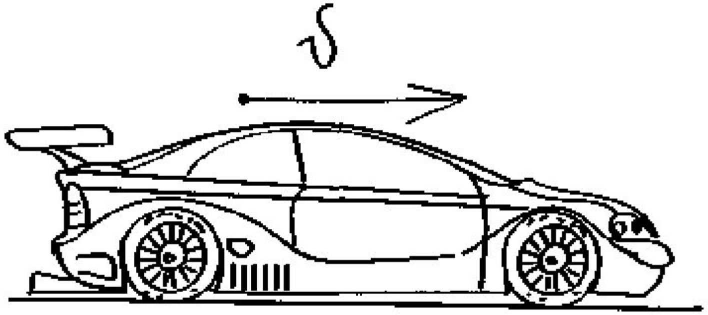
Ответ: 36.

5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.





Решение. Найдём, при каком ускорении автомобиль достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2la} = 100$ при известном значении длины пути $l = 1$ км:

$$\sqrt{2la} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{2a} = 100 \Leftrightarrow 2a = 10\,000 \Leftrightarrow a \geqslant 5000 \text{ км/ч}^2.$$

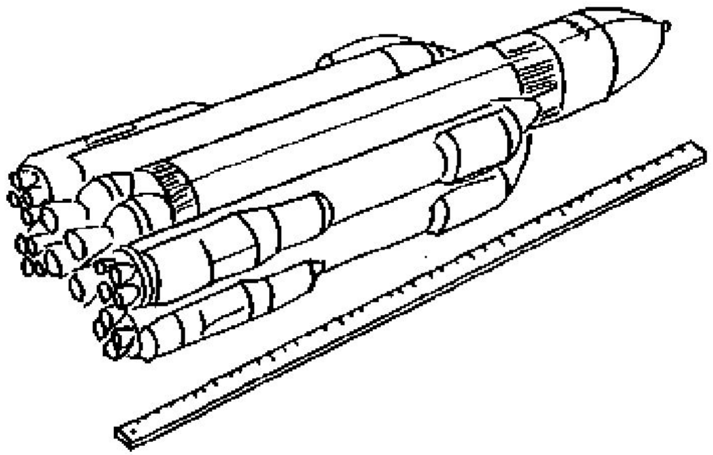
Если его ускорение будет превосходить найденное, то, проехав один километр, автомобиль наберёт большую скорость, поэтому наименьшее необходимое ускорение равно 5000 км/ч^2.

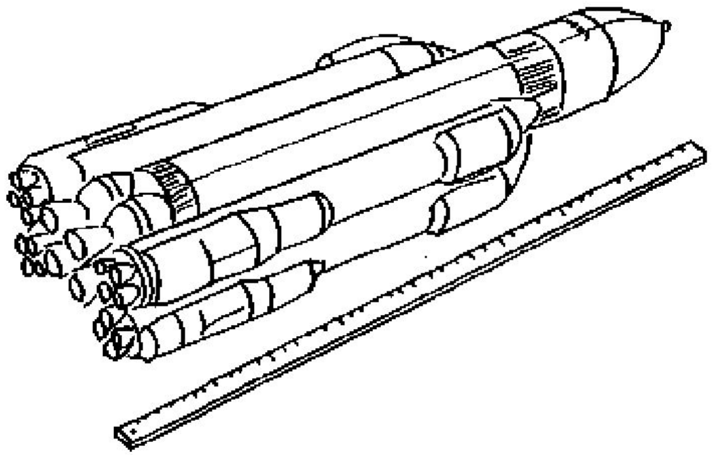
Ответ: 5000.

5а. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 10$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 8 м? Ответ выразите в км/с.





Решение. Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 8 м. Задача сводится к решению уравнения

$$l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=8$$

при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0 = 10$ м и известной величине скорости света $c = 3 \cdot 10^5$ км/с:

$$10\sqrt{1-\frac{v^2}{9\cdot 10^{10}}}=8 \iff \frac{v^2}{9\cdot 10^{10}}=\frac{36}{100} \iff$$

$$\iff v=\frac{6}{10}\cdot 3\cdot 10\cdot 10^5 \iff v=180\,000 \text{ км/с}.$$

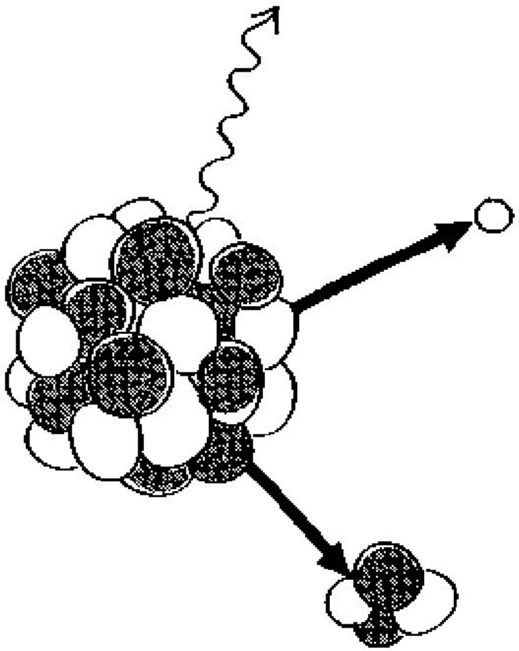
Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 8 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

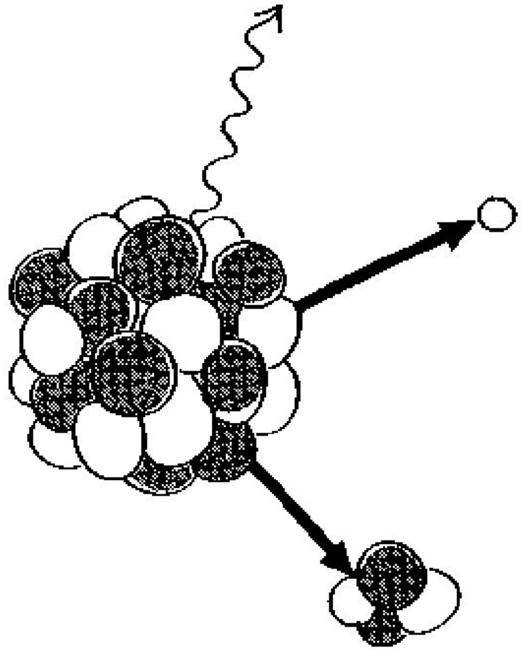
Ответ: 180 000.

6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?





Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$m(t) > 10$$

при заданных значениях параметров $m_0 = 40$ мг и $T = 10$ мин:

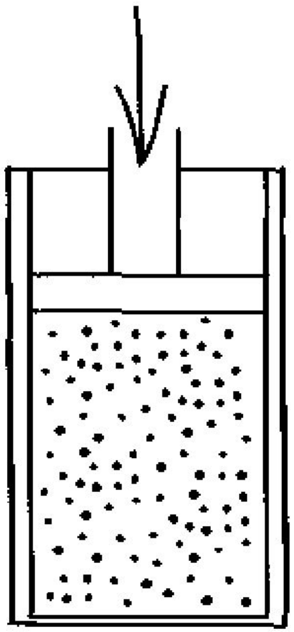
$$40 \cdot 2^{-t/10} > 10 \iff 2^{-t/10} > 2^{-2} \iff -\frac{t}{10} > -2 \iff t < 20 \text{ мин.}$$

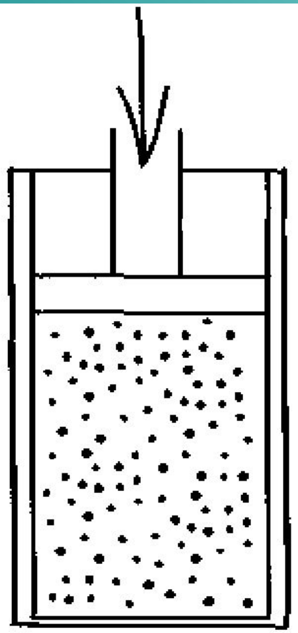
Ответ: 20.

6а. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5$ Па $\cdot$ м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $3{,}2 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.





Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$p(V) \geqslant 3{,}2 \cdot 10^6$$

при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и const $=$ $= 10^5$ Па $\cdot$ м^5:

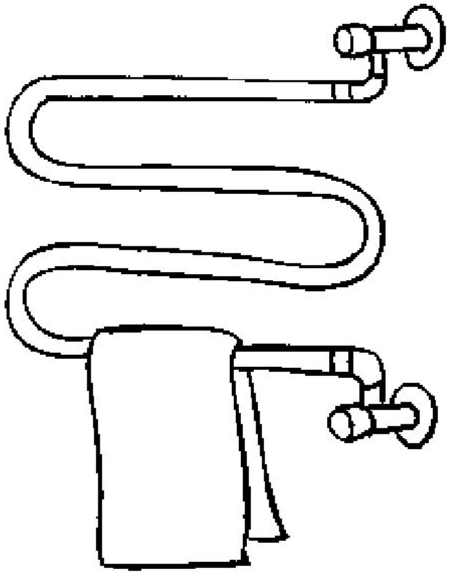
$$10^5 \cdot V^{-5/3} \geqslant 3{,}2 \cdot 10^6 \;\Leftrightarrow\; V^{5/3} \leqslant \frac{1}{32} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{32}\right)^{3/5} \;\Leftrightarrow\; V \leqslant \frac{1}{8}\ \text{м}^3.$$

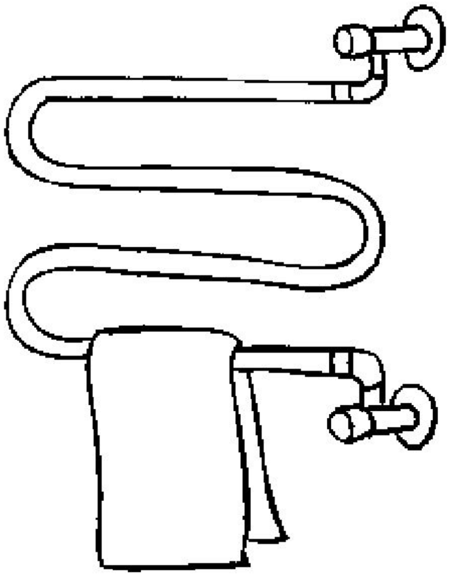
Ответ: 0,125.

7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_п = 20°C$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в = 60°C$. Через радиатор проходит $m = 0{,}3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры T(°C), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п},$$

где $c = 4200\ \frac{Дж}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\ \frac{Вт}{°C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?





Решение. Задача сводится к решению уравнения $x = 84$ при заданных значениях теплоёмкости, коэффициента теплообмена и постоянной α:

$$x = 84 \Leftrightarrow \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}7 \cdot \frac{4200 \cdot 0{,}3}{21} \cdot \log_2 \frac{60 - 20}{T - 20} = 84 \Leftrightarrow$$

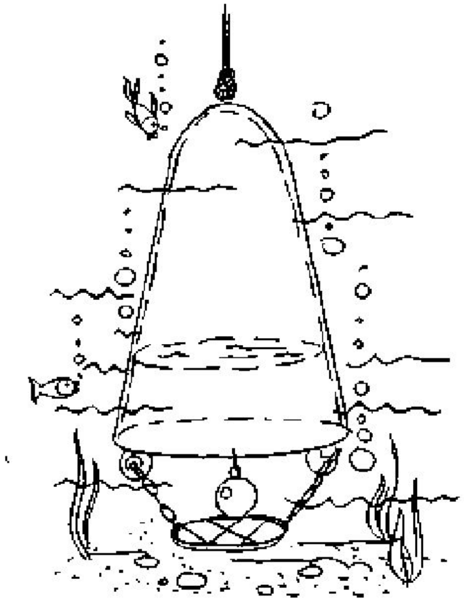
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{40}{T-20} = 2 \Leftrightarrow \frac{40}{T-20} = 4 \Leftrightarrow T - 20 = 10 \Leftrightarrow T = 30°\text{C}.$$

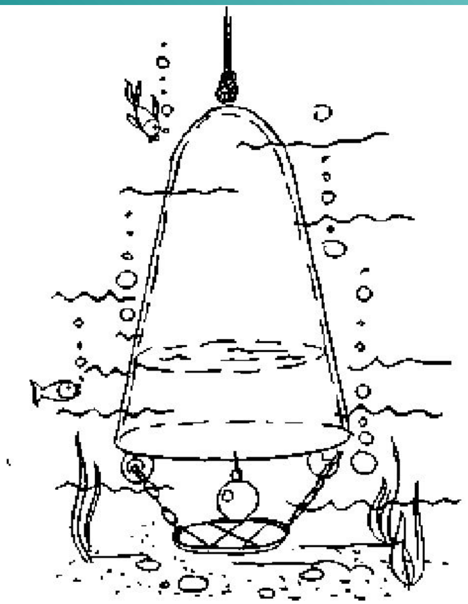
Ответ: 30.

7а. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 20 700 Дж?





Решение. Задача сводится к решению неравенства $A \leqslant 20\,700$ при заданных значениях количества воздуха, его начального давления и температуры, а также постоянной α:

$$A \leqslant 20\,700 \;\Leftrightarrow\; \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \leqslant 20\,700 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 5{,}75 \cdot 4 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 20\,700 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \log_2 \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 3 \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 8 \;\Leftrightarrow\; 0 < p_2 \leqslant 9{,}6.$$

Ответ: 9,6.