

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ

Определение 1. Пусть на некотором промежутке X задана функция $y = f(x)$. Функция $y = F(x)$, определённая на X , называется *первообразной* для $f(x)$ на этом промежутке, если для всех $x \in X$ верно равенство $F'(x) = f(x)$.

Под промежутком X будем понимать отрезок, интервал, полуинтервал: $[a; b]$, $(a; b)$, $(a; b]$, $(0; \infty)$, $(-\infty; 0)$, $[0; \infty)$, $(-\infty; 0]$, $(-\infty; +\infty)$.

Примеры:

1) $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$, $x \in (0; \infty)$

4) $f(x) = 2x$, $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + \sqrt{3}$, $F(x) = x^2 + \pi$, $F(x) = x^2 + C$, $x \in \mathbb{R}$

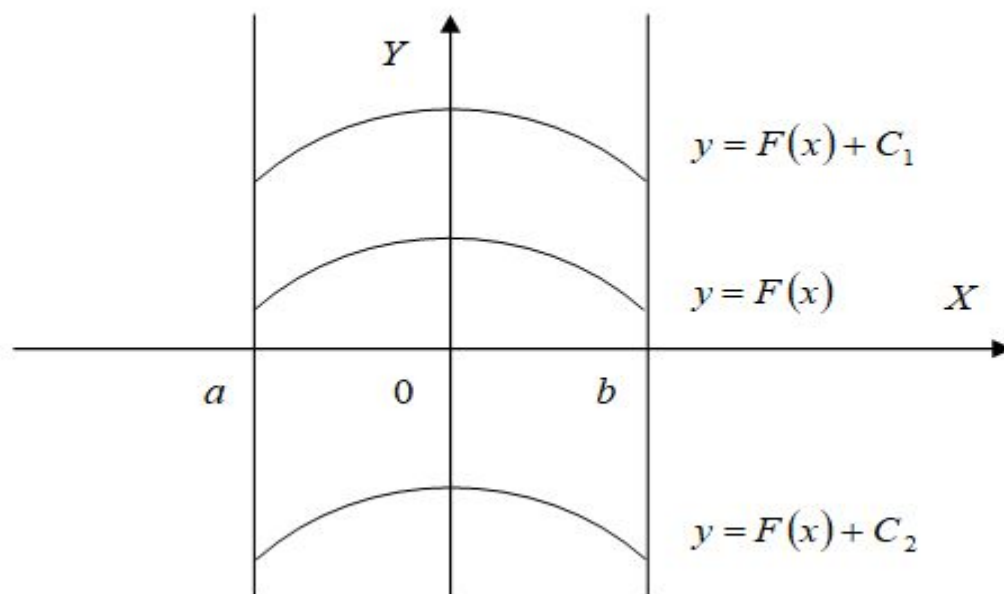
У всякой функции существует бесконечно много первообразных. Следующая теорема позволяет свести нахождение всех первообразных данной функции к отысканию одной из них.

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные от функции $f(x)$ на промежутке X , то

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Геометрическая иллюстрация первообразной



Графики всех первообразных получаются из графика одной первообразной параллельным переносом вдоль оси ординат.

Определение неопределённого интеграла

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $y = f(x)$ на промежутке X называется *неопределённым интегралом* от функции $y = f(x)$ на X и обозначается $\int f(x)dx$. Функция $y = f(x)$ называется *подынтегральной функцией* для $\int f(x)dx$, а произведение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C, \quad C \in R\}.$$

На практике принята более короткая запись:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F'(x) = f(x)$, то и

$$\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

Последнее равенство следует понимать в том смысле, что производная от любой первообразной равна подынтегральной функции.

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

В частности, $\int dx = x + C$, где $F(x) = x + C$.

4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы (разности) двух или нескольких функций равен сумме (разности) их интегралов:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $a = \text{const}$, то

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

	$f'(x)$	$\int f(x) dx$
1.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
3.	$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
4.	$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
5.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
6.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7.	$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8.	$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
9.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
9'.		$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

10.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
10'.		$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11.		$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
12.		$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
13.		$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$

Метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённых интегралов, называется непосредственным интегрированием.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \int (2x^4 - 3 \sin x + 5\sqrt[3]{x}) dx &= \int 2x^4 dx - \int 3 \sin x dx + \int 5\sqrt[3]{x} dx = 2 \int x^4 dx - 3 \int \sin x dx + \\ &+ 5 \int \sqrt[3]{x} dx = 2 \frac{x^5}{5} + C_1 + 3 \cos x + C_2 + 5 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C_3 = \frac{2x^5}{5} + 3 \cos x + \frac{15}{4} x \sqrt[3]{x} + \\ &+ (C_1 + C_2 + C_3) = \frac{2x^5}{5} + 3 \cos x + \frac{15}{4} x \sqrt[3]{x} + C \\ 2) \int \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx &= \int \cos x dx = \sin x + C \end{aligned}$$

Используем формулу: $1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$.

При вычислении неопределённого интеграла часто применяется следующее правило:

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Примеры:

$$1) \int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5| + C$$

$$2) \int \sin(5x+7) dx = -\frac{1}{5} \cos(5x+7) + C$$

Интегрирование методом замены переменной

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причём непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ - непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и имеет место равенство:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (7)$$

Формула (7) называется *формулой замены переменной под знаком неопределённого интеграла*.

Пример:
$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int t^2 e^t \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

Делаем замену $x = \frac{1}{t}$, тогда $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, $t = \frac{1}{x}$.

Интегрирование методом замены переменной

Замечание. При интегрировании иногда целесообразно подбирать замену переменной в виде не $x = \varphi(t)$, а $t = f(x)$. Пусть, например, требуется вычислить интеграл $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$. В результате *подстановки* $t = f(x)$, $dt = f'(x)dx$ получаем:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Пример: $\int e^{\cos x} \sin x dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$

Замена: $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$.

Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет следующий вид:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Этой формулой обычно пользуются, когда подынтегральное выражение $v du$ проще, чем подынтегральное выражение $u dv$.

Пример:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right)$$

Замечание. При нахождении v не пишут промежуточную произвольную постоянную C_1 , так как она не оказывает влияния на окончательный результат.

Пример:

$$\int x e^x dx = x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1) dx = e^x x + xC_1 - e^x - C_1 x + C_2 = xe^x - e^x + C$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x + C_1 \end{array} \right)$$

Интегрирование по частям

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях, например, для интегралов вида

$$\int x^k \sin ax \, dx, \quad \int x^k \cos ax \, dx,$$

$$\int x^k e^{ax} \, dx, \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx,$$

а также для некоторых интегралов, содержащих логарифмическую, обратные тригонометрические функции и корни.