НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ

Определение 1. Пусть на некотором промежутке X задана функция $y = f(x)$. Функция $y = F(x)$, определённая на X, называется *первообразной* для $f(x)$ на этом промежутке, если для всех $x \in X$ верно равенство $F'(x) = f(x)$.

Под промежутком X будем понимать отрезок, интервал, полуинтервал: $[a;b]$, $(a;b)$, $(a;b]$, $(0;\infty)$, $(-\infty;0)$, $[0;\infty)$, $(-\infty;0]$, $(-\infty;+\infty)$.

Примеры:

1) $f(x) = x^2$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $x \in R$

2) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$, $x \in R$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$, $x \in (0;\infty)$

4) $f(x) = 2x$, $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + \sqrt{3}$, $F(x) = x^2 + \pi$, $F(x) = x^2 + C$, $x \in R$

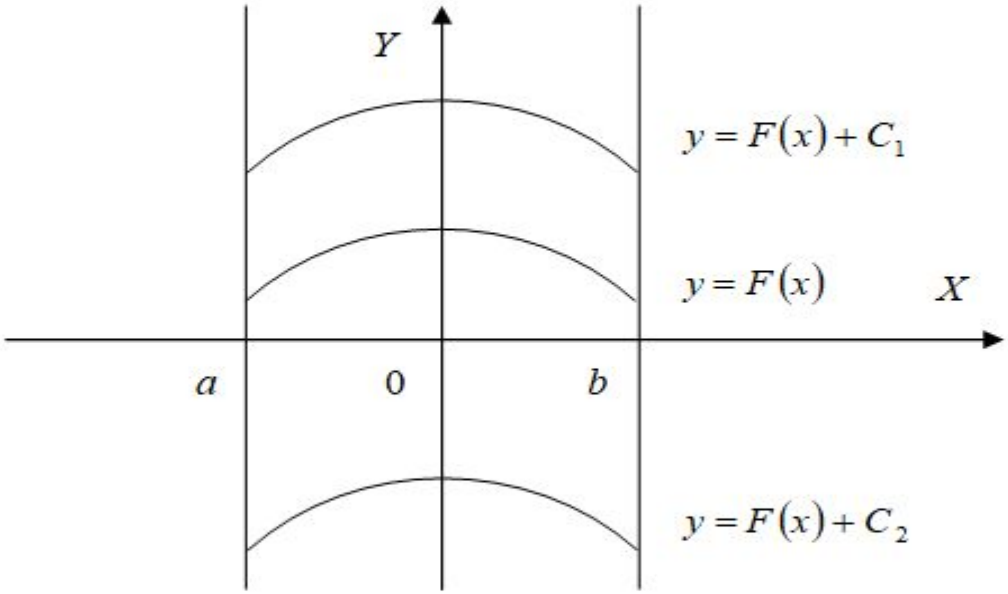
У всякой функции существует бесконечно много первообразных. Следующая теорема позволяет свести нахождение всех первообразных данной функции к отысканию одной из них.

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные от функции $f(x)$ на промежутке X, то

$$F_2(x) = F_1(x) + C .$$

Геометрическая иллюстрация первообразной



Графики всех первообразных получаются из графика одной первообразной параллельным переносом вдоль оси ординат.

Определение неопределённого интеграла

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $y = f(x)$ на промежутке X называется *неопределённым интегралом* от функции $y = f(x)$ на X и обозначается $\int f(x)dx$. Функция $y = f(x)$ называется *подынтегральной функцией* для $\int f(x)dx$, а произведение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C, \quad C \in R\}.$$

На практике принята более короткая запись:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F'(x)=f(x)$, то и

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=f(x).$$

Последнее равенство следует понимать в том смысле, что производная от любой первообразной равна подынтегральной функции.

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int d(F(x))=F(x)+C.$$

В частности, $\int dx=x+C$, где $F(x)=x+C$.

4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы (разности) двух или нескольких функций равен сумме (разности) их интегралов:

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $a=const$, то

$$\int a\cdot f(x)dx=a\int f(x)dx.$$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
1.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3.	$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
4.	$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
5.	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$
6.	$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$
7.	$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8.	$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
9.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
9′.		$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

10.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
10′.		$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11.		$\int tg\, x\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$
12.		$\int ctg\, x\, dx = \ln\|\sin x\| + C$
13.		$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$

Метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённых интегралов, называется *непосредственным интегрированием*.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Примеры:

1) $$\int\left(2x^4-3\sin x+5\sqrt[3]{x}\right)dx=\int 2x^4\,dx-\int 3\sin x\,dx+\int 5\sqrt[3]{x}\,dx=2\int x^4dx-3\int \sin x\,dx+$$

$$+5\int\sqrt[3]{x}\,dx=2\frac{x^5}{5}+C_1+3\cos x+C_2+5\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C_3=\frac{2x^5}{5}+3\cos x+\frac{15}{4}x\sqrt[3]{x}+$$

$$+(C_1+C_2+C_3)=\frac{2x^5}{5}+3\cos x+\frac{15}{4}x\sqrt[3]{x}+C$$

2) $$\int\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\cos x\,dx=\sin x+C$$

Используем формулу: $1-2\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$.

При вычислении неопределённого интеграла часто применяется следующее правило:

Если $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, *то* $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Примеры:

1) $$\int\frac{dx}{x+5}=\ln|x+5|+C$$

2) $$\int\sin(5x+7)\,dx=-\frac{1}{5}\cos(5x+7)+C$$

Интегрирование методом замены переменной

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причём непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ - непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$ и имеет место равенство:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (7)$$

Формула (7) называется *формулой замены переменной под знаком неопределённого интеграла.*

Пример: $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx = \int t^2 e^t \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$

Делаем замену $x = \frac{1}{t}$, тогда $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, $t = \frac{1}{x}$.

Интегрирование методом замены переменной

Замечание. При интегрировании иногда целесообразно подбирать замену переменной в виде не $x=\varphi(t)$, а $t=f(x)$. Пусть, например, требуется вычислить интеграл $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$. В результате *подстановки* $t=f(x)$, $dt=f'(x)dx$ получаем:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C.$$

Пример: $\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int e^t\,dt=-e^t+C=-e^{\cos x}+C$

Замена: $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$.

Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет следующий вид:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\ .$$

Этой формулой обычно пользуются, когда подынтегральное выражение $v\,du$ проще, чем подынтегральное выражение $u\,dv$.

Пример:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

$$\begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{pmatrix}$$

Замечание. При нахождении v не пишут промежуточную произвольную постоянную C_1, так как она не оказывает влияния на окончательный результат.

Пример:

$$\int x\,e^x dx = x\left(e^x + C_1\right) - \int \left(e^x + C_1\right)dx = e^x x + xC_1 - e^x - C_1 x + C_2 = xe^x - e^x + C$$

$$\begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x + C_1 \end{pmatrix}$$

Интегрирование по частям

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях, например, для интегралов вида

$$\int x^k \sin ax\,dx, \qquad \int x^k \cos ax\,dx,$$

$$\int x^k e^{ax}dx, \qquad \int e^{ax} \sin bx\,dx, \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx,$$

а также для некоторых интегралов, содержащих логарифмическую, обратные тригонометрические функции и корни.