МОУ “Гимназия №89”г. Саратов

Подготовка к ЕГЭ по математике. Задание 18 (Задачи по планиметрии)

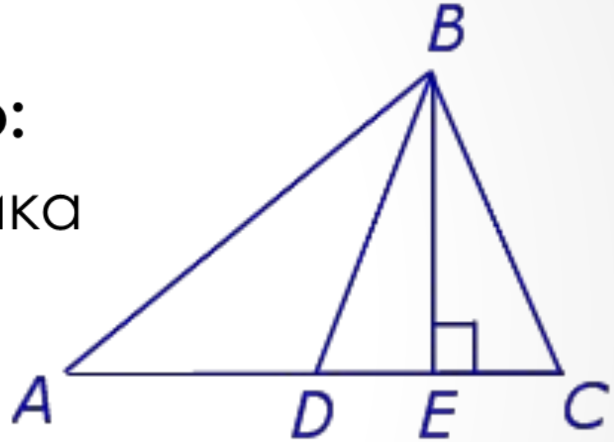
Учитель математики:
Кубракова Ирина Анатольевна

Курсы дистанционной подготовки к ЕГЭ

Infima.ru

Свойства медианы треугольника.

- Медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади(равновеликих треугольника).



Доказательство:

Проведем из вершины B треугольника ABC медиану BD и высоту BE.

Заметим, что

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE, S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BE.$$

Поскольку отрезок BD является медианой, то

$$AD = DC \Rightarrow S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBC},$$

что и требовалось доказать.

Медианы треугольника делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

Доказательство:

Докажем, что площадь каждого из шести треугольников, на которые медианы разбивают треугольник ABC, равна $\frac{1}{6}$ площади треугольника ABC. Для этого рассмотрим, например, треугольник AOF и опустим из вершины A перпендикуляр AK на прямую BF.

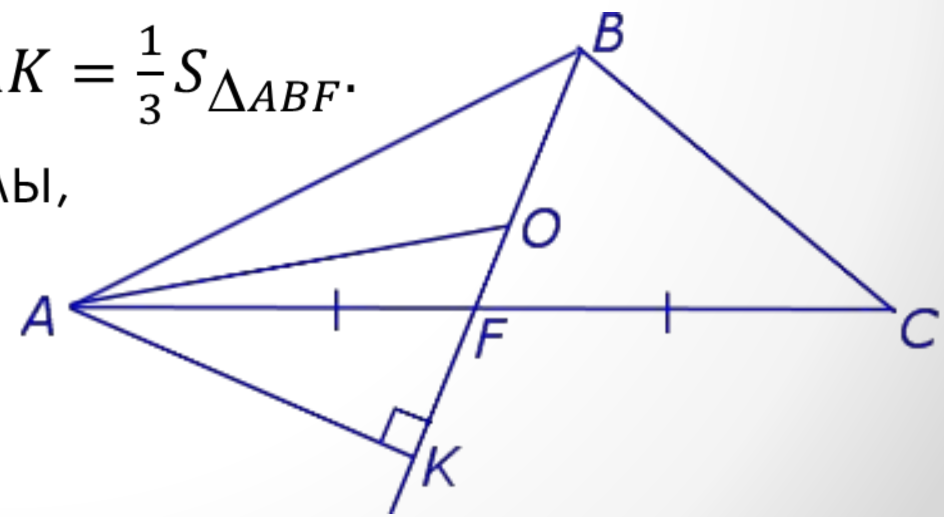
Тогда

$$S_{\Delta AOF} = \frac{1}{2} OF \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot BF \cdot AK = \frac{1}{3} S_{\Delta ABF}.$$

В силу предыдущей теоремы,

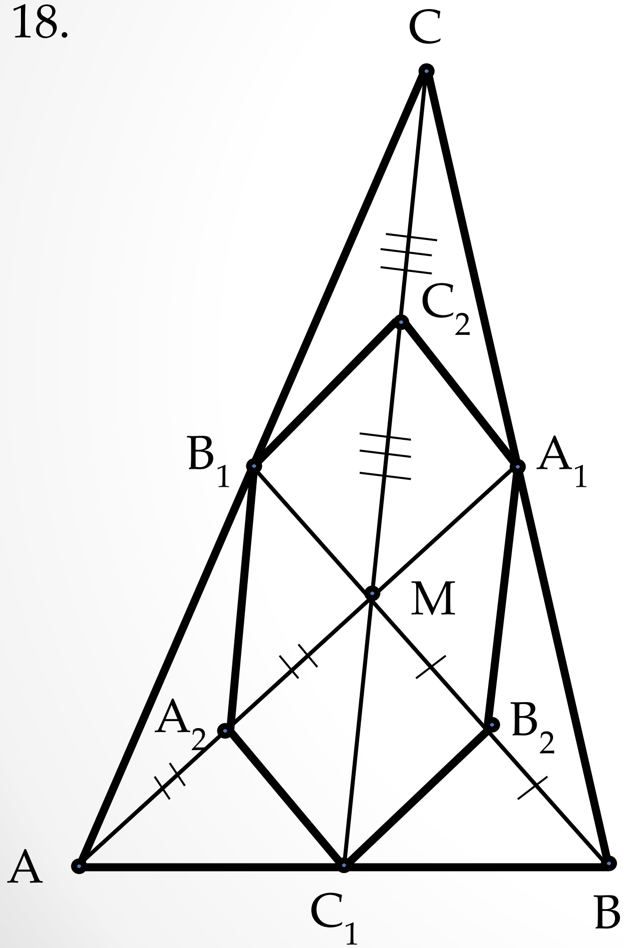
$$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AOF} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABF} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}.$$



Тренировочная работа № 2
(ЕГЭ. Математика. Типовые тестовые задания, под редакцией И.В. Ященко)

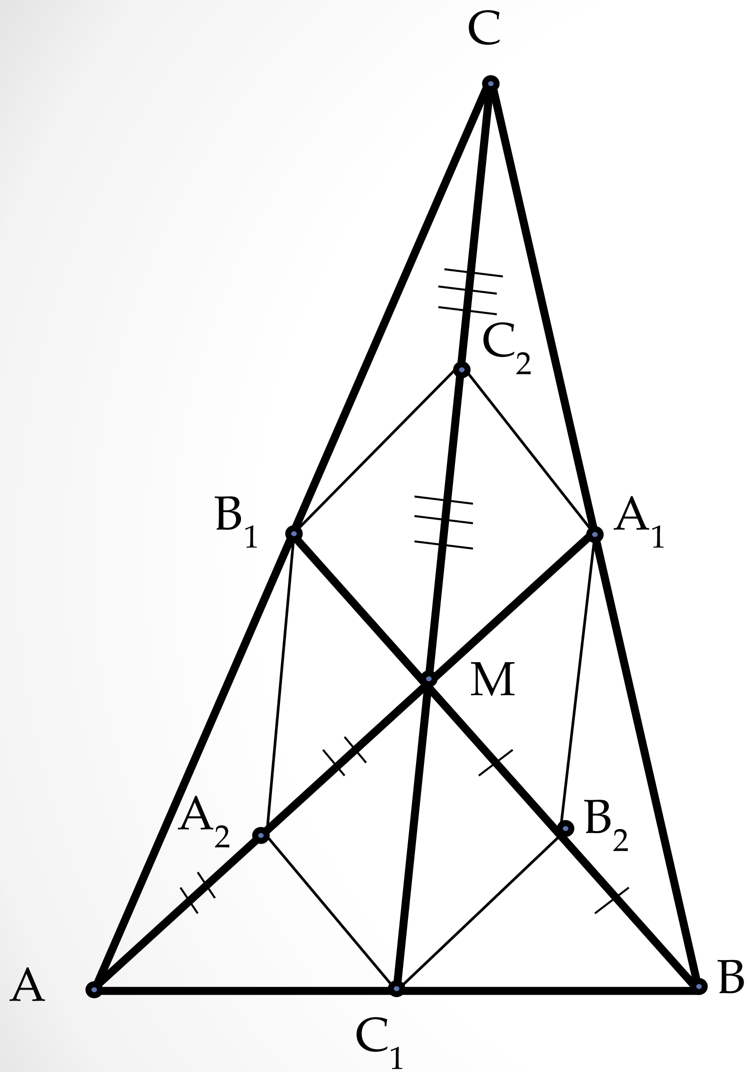
18.



Медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2, C_2 - середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

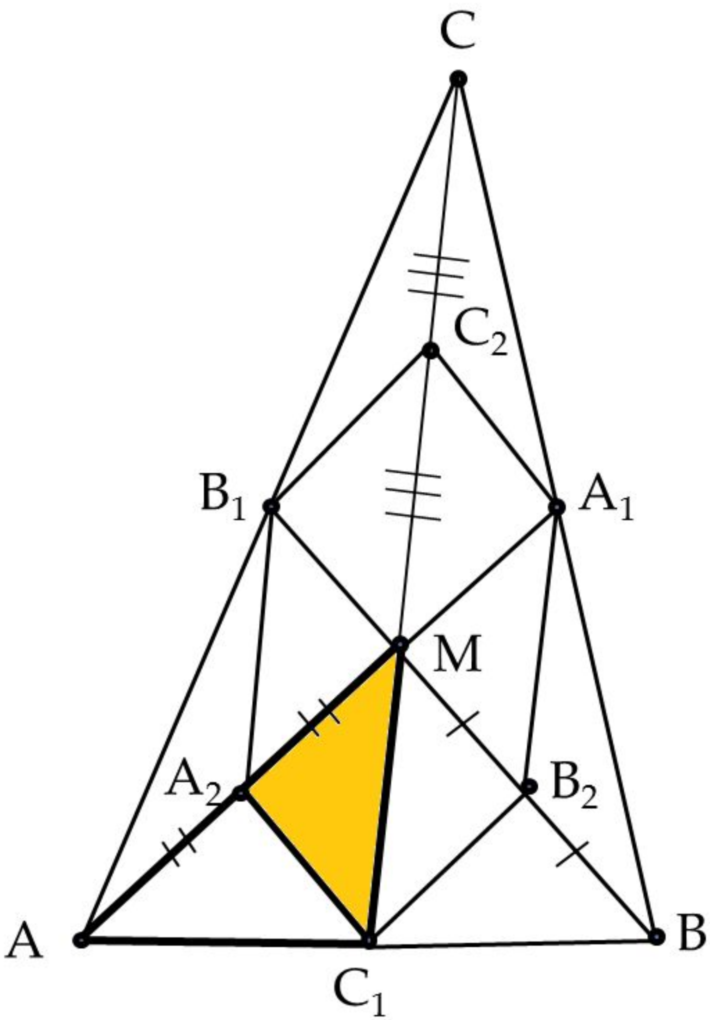
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.



Решение:

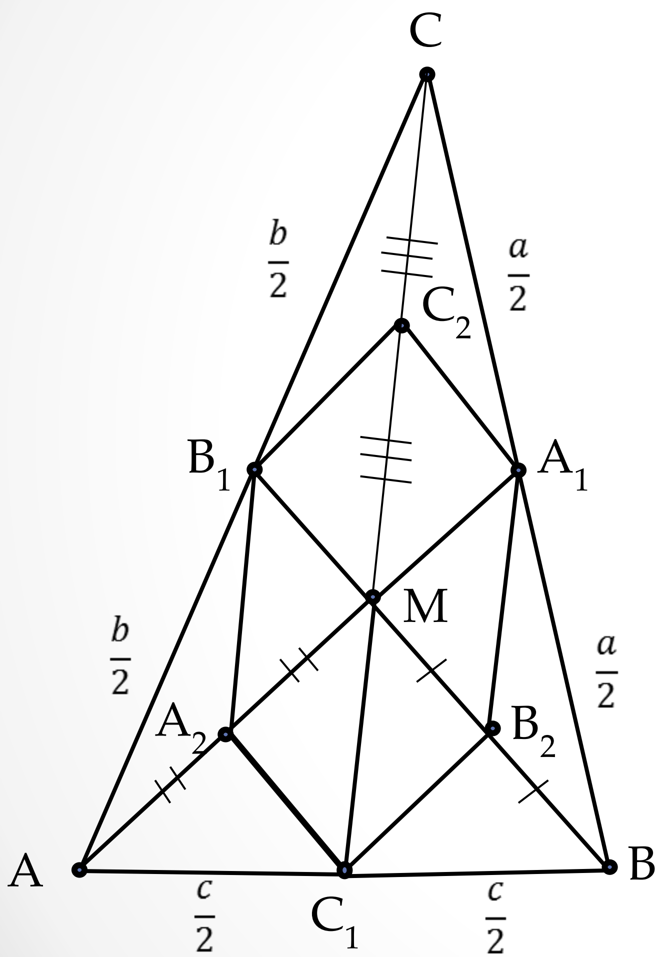
а) Обозначим $S_{\Delta ABC} = S$. Тогда площадь каждого из треугольников, на которые медианы разбивают треугольник ABC, равна $\frac{1}{6}S$.



Заметим, что C_1A_2 – медиана треугольника AC_1M, поэтому

$$S_{\Delta A_2MC_1} = \frac{1}{2}S_{\Delta AMC_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}S.$$

Аналогичные равенства выполняются для остальных пяти треугольников, составляющих шестиугольник $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Следовательно, площадь этого шестиугольника равна $6\cdot\frac{1}{12}S = \frac{1}{2}S$.



б) Обозначим

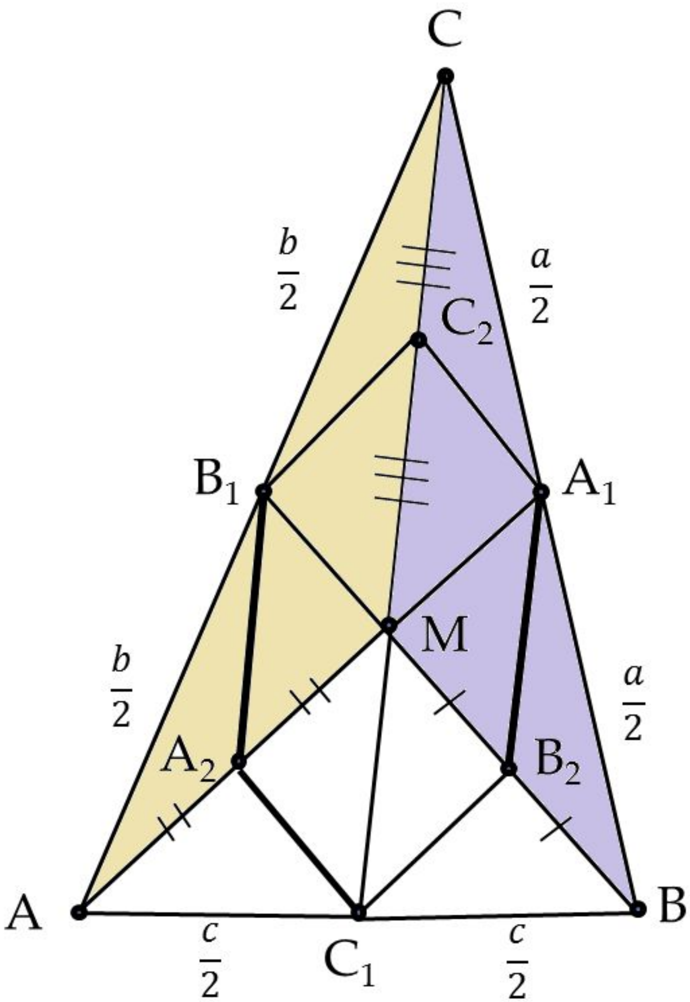
$$BC = a, AC = b, AB = c.$$

По формуле для квадрата медианы находим, что

$$AA_1{}^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

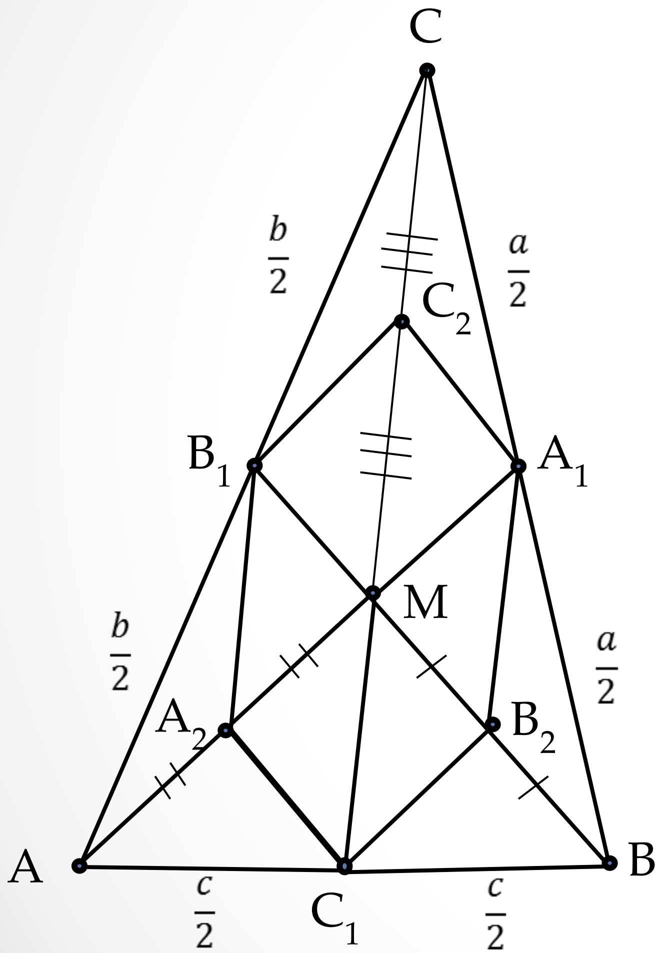
$$BB_1{}^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$CC_1{}^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$



- Медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому $AM = \frac{2}{3}AA_1$, $BM = \frac{2}{3}BB_1$, $CM = \frac{2}{3}CC_1$.

Стороны A_2B_1 и A_1B_2 – средние линии треугольников AMC и BMC, поэтому $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{2}CM$.

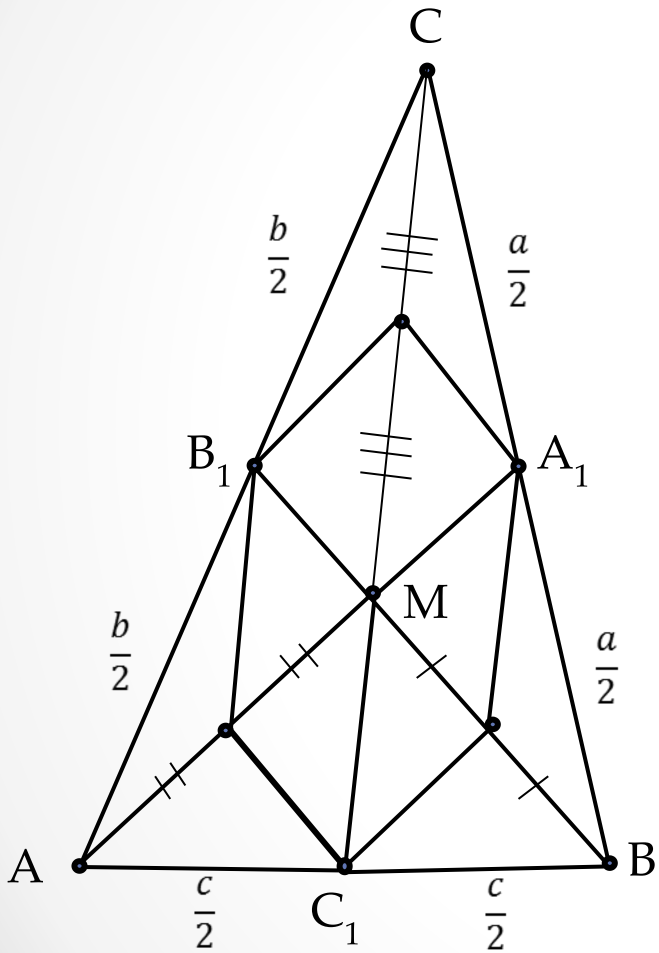


- $$A_2B_1^2 = A_1^2B_2 = \frac{1}{4}CM^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}CC_1{}^2 = \frac{1}{36}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Аналогично,

$$C_2A_1^2 = C_1A_2^2 = \frac{1}{36}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$B_2C_1^2 = B_1C_2^2 = \frac{1}{36}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$



Следовательно, сумма квадратов всех сторон шестиугольника равна

$$2A_2B_1^2 + 2C_2A_1^2 + 2B_2C_1^2 =$$

$$= \frac{1}{18}(2a^2 + 2b^2 - c^2 + 2a^2 +$$

$$+2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2) =$$

$$= \frac{1}{18}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2) =$$

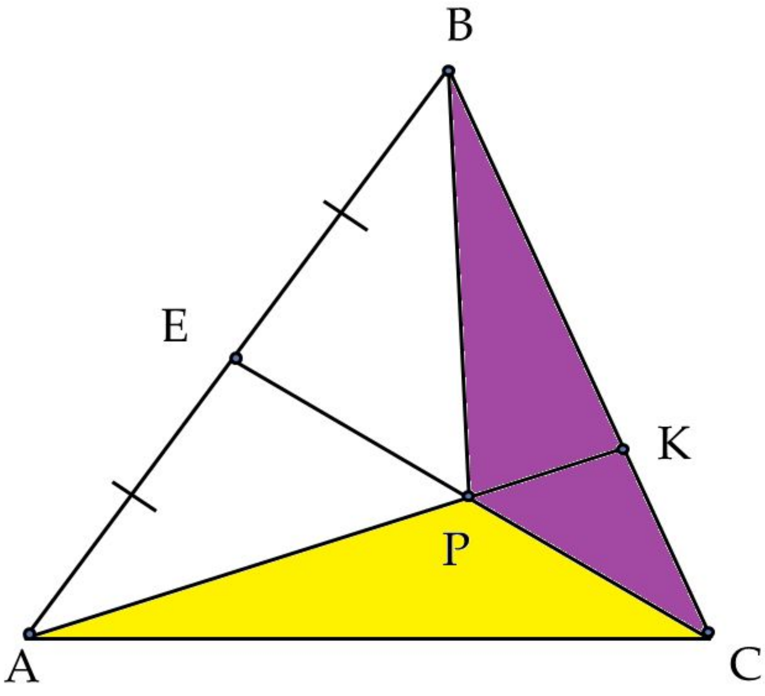
$$= \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) =$$

$$= \frac{1}{6}(49 + 64 + 16) = \frac{129}{6} = \frac{43}{2}.$$

Ответ: $\frac{43}{2}$.

Тренировочный вариант № 95

(alexlarin.net)



В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка K так, что $CK:BK = 1:2$. Точка E – середина стороны AB. Отрезки CE и AK пересекаются в точке P.

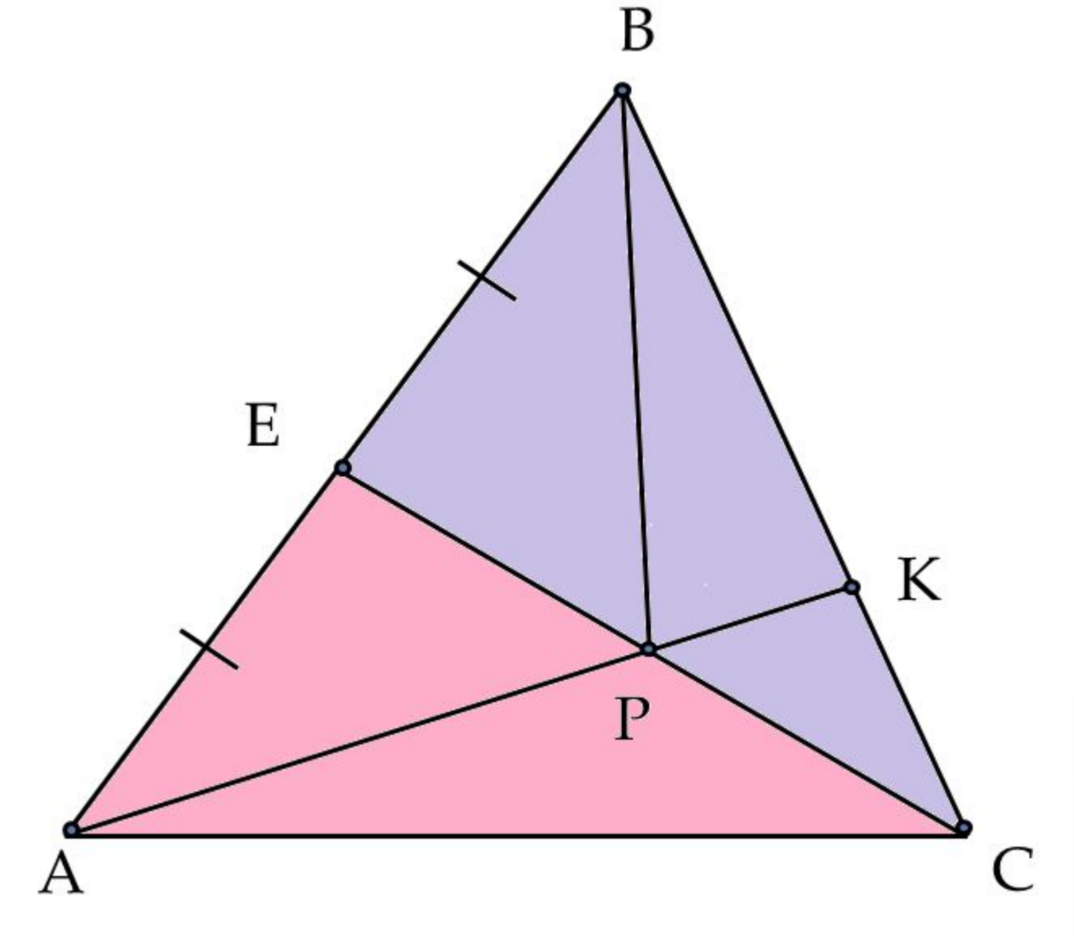
а) Докажите, что треугольники BPC и APC имеют равные площади.

б) Найдите площадь треугольника ABP, если площадь треугольника ABC равна 120.

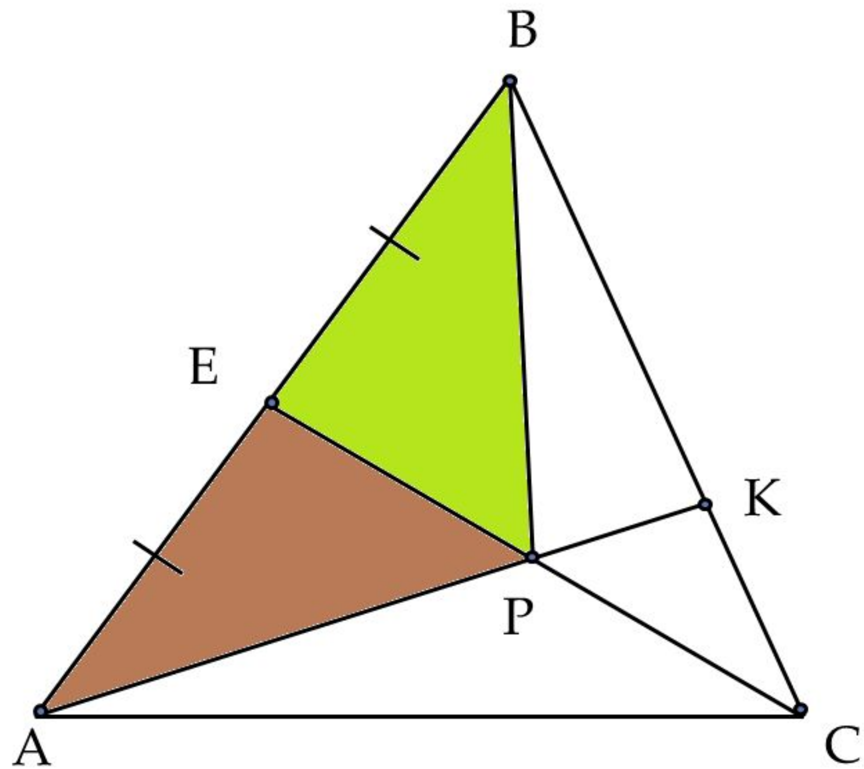
Решение:

а) CE – медиана треугольника ABC.

Следовательно, $S_{\Delta ACE} = S_{\Delta BCE}$.

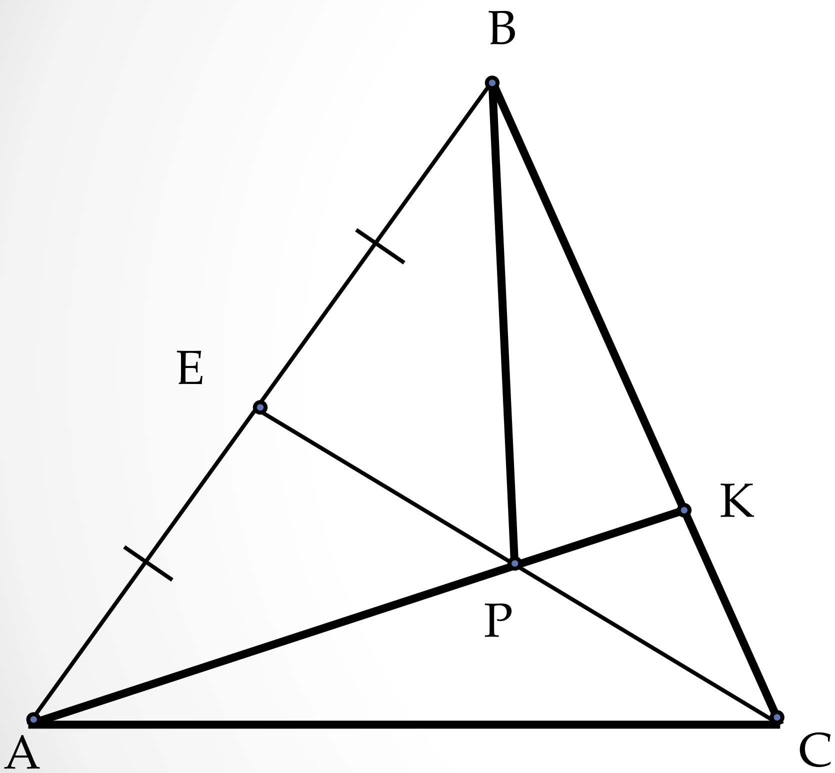


Аналогично, PE – медиана треугольника ABP.
Следовательно, $S_{\Delta APE} = S_{\Delta BPE}$.



$S_{\Delta ACE} - S_{\Delta APE} = S_{\Delta BCE} - S_{\Delta BPE}$

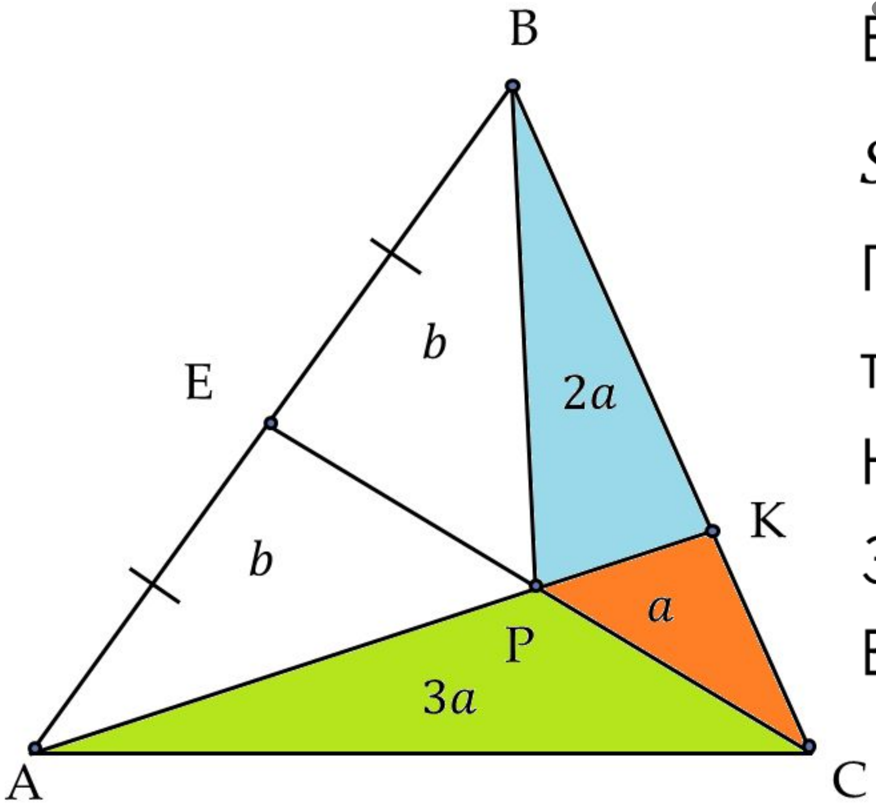
Или $S_{\Delta APC} = S_{\Delta BPC}$, что и требовалось доказать.



б) Из условия задачи относительно точки K также вытекает:

$$S_{\Delta ACK} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = 40,$$

$$S_{\Delta BPK} = 2S_{\Delta CPK}.$$



Если $S_{\Delta CPK} = a$, то $S_{\Delta BPK} = 2a$,

$S_{\Delta APC} = 3a$.

Пусть $S_{\Delta APE} = S_{\Delta BPE} = b$,

тогда $S_{\Delta ACK} = 4a = 40 \Rightarrow a = 10$.

Но $S_{\Delta BCE} = 3a + b = 60$.

Значит, $b = 60 - 3a = 30$.

В таком случае:

$$S_{\Delta ABP} = 2b = 60.$$

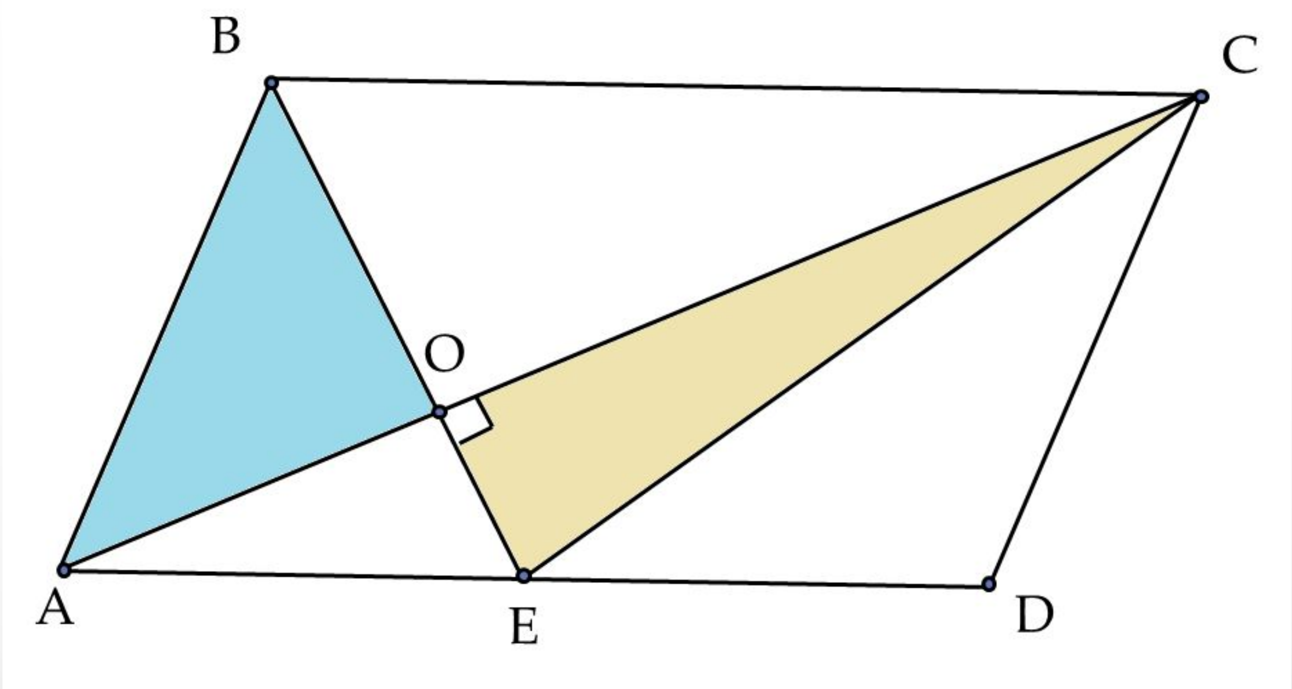
Тренировочный вариант № 99

(alexlarin.net)

Точка E – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$, прямые BE и AC взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади треугольников AOB и COE равны.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 3$, $BC = 4$.



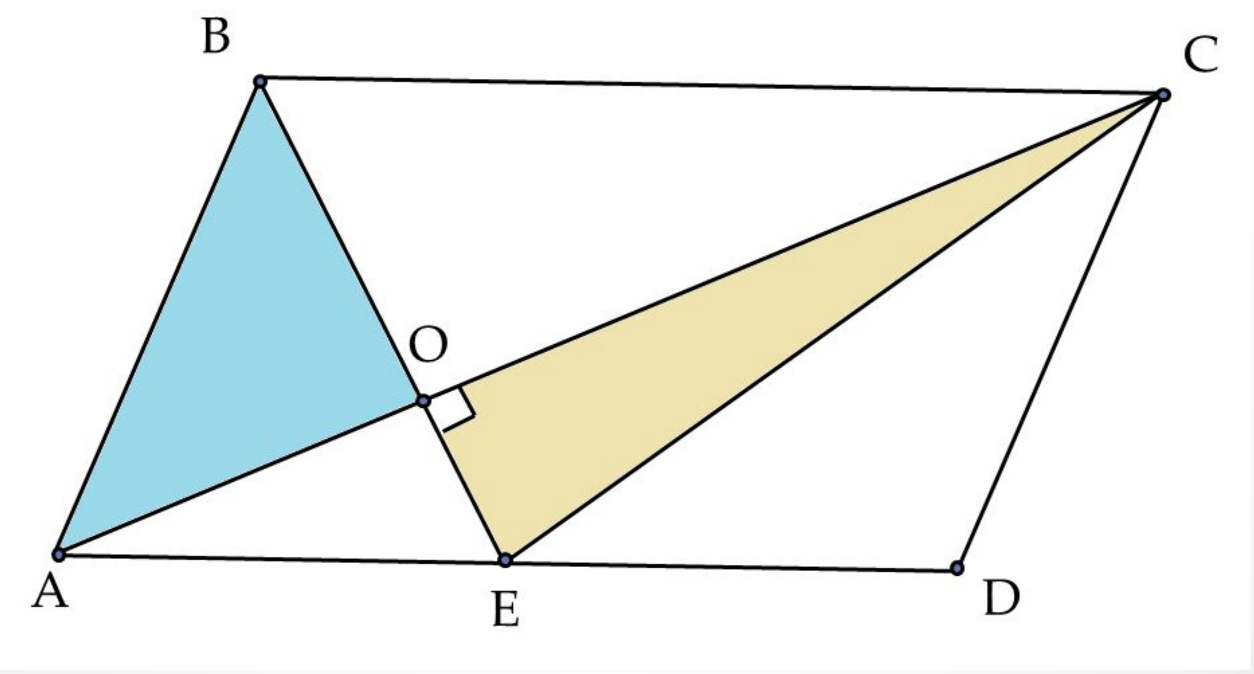
Решение:

а) $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABE} - S_{\Delta AOE}$,

$S_{\Delta COE} = S_{\Delta ACE} - S_{\Delta AOE}$,

$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta ACE}$, т.к. имеют общее основание AE и равные высоты.

Следовательно, $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COE}$



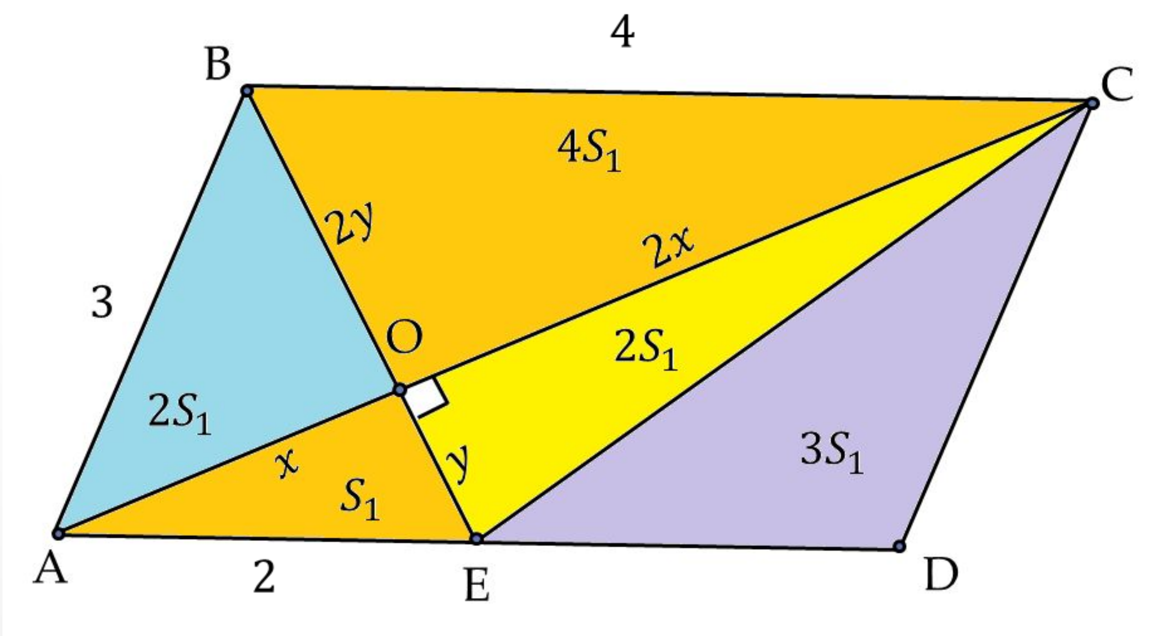
б) 1. $\Delta COB \sim \Delta AOE$ с $k = 2$.

Пусть $AO = x, OE = y$, тогда $OC = 2x, OB = 2y$.

$S_{\Delta AOE} = \frac{1}{2}xy = S_1$, тогда $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta EOC} = 2S_1$

$S_{\Delta BOC} = 4S_1$; $S_{\Delta DCE} = S_{\Delta ACE} = 3S_1$.

$S_{ABCD} = 12S_1 = 12 \cdot \frac{1}{2}xy = 6xy$.

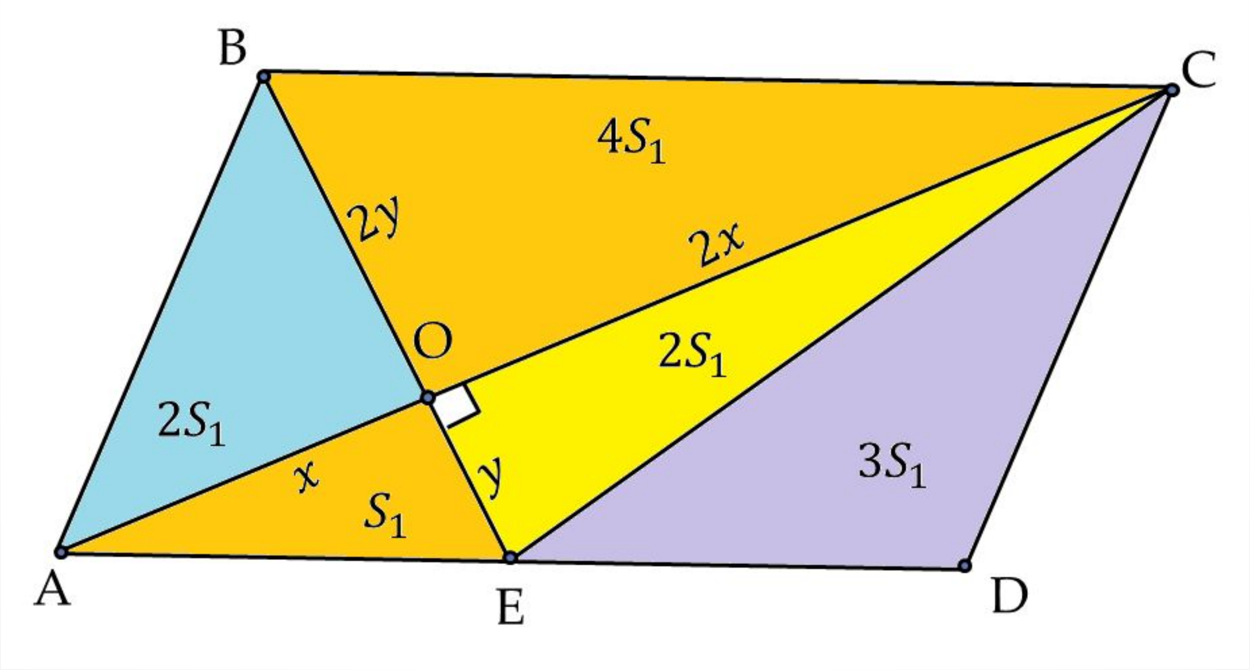


2. Из ΔAOE имеем $x^2 + y^2 = 4$.

Из ΔAOB: $x^2 + 4y^2 = 9$. Тогда $y^2 = \frac{5}{3}; x^2 = \frac{7}{3}$.

$xy = \frac{\sqrt{35}}{3}$ и $S_{ABCD} = 6 \cdot \frac{\sqrt{35}}{3} = 2\sqrt{35}$.

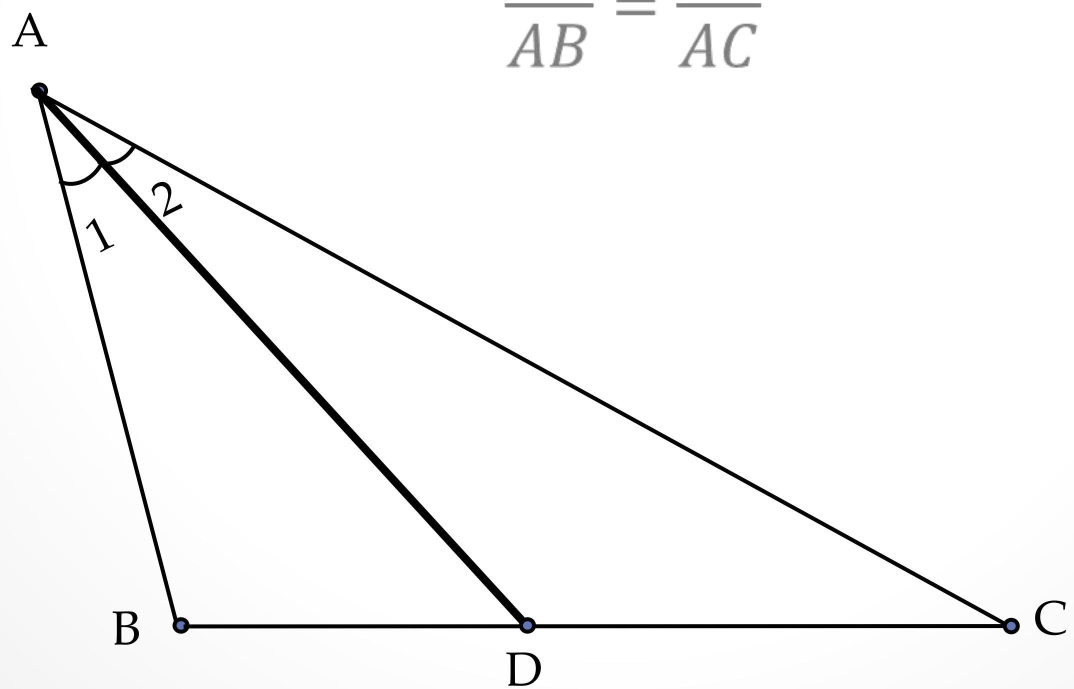
Ответ: $2\sqrt{35}$



Свойство биссектрисы треугольника.

- Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

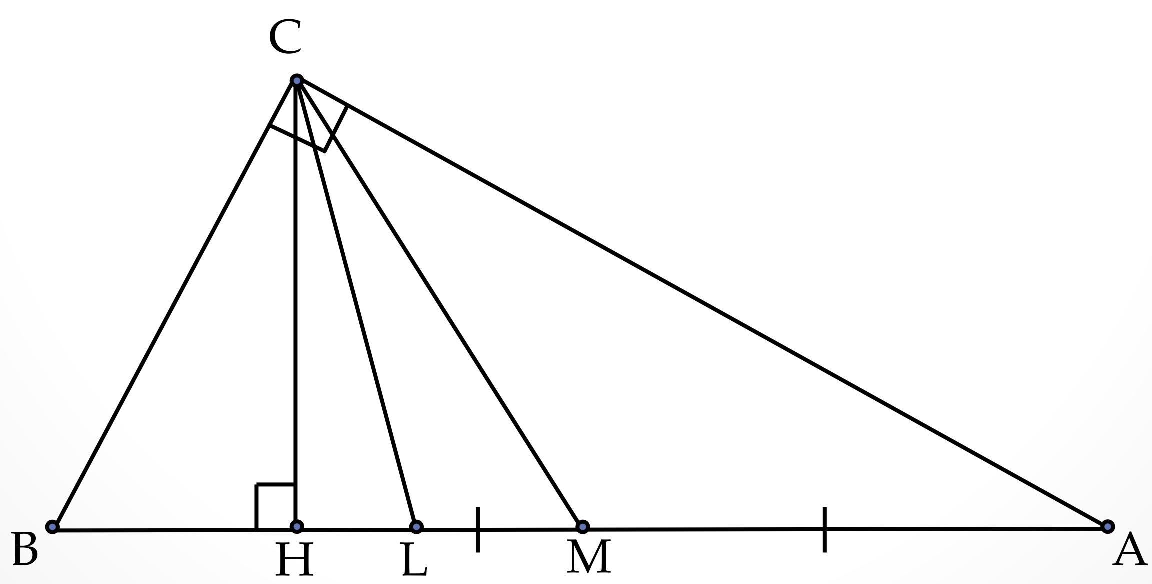


Тренировочный вариант № 98
(alexlarin.net)

В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведены высота CH, медиана CM и биссектриса CL.

а) Докажите, что CL является биссектрисой угла MCH.

б) Найдите длину биссектрисы CL, если $CH = 3$, $CM = 5$.



Решение:

а) Пусть катет $AC > BC$.

Медиана в прямоугольном треугольнике является радиусом описанной окружности.

Т.е. $CM = AM = BM$.

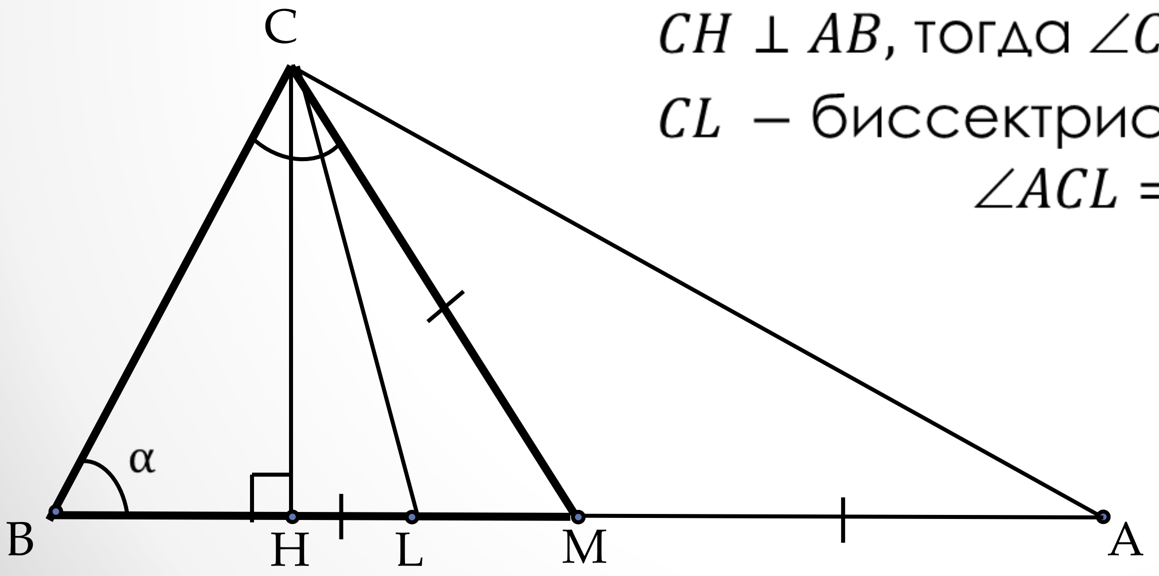
Значит, ΔCMB – равнобедренный,

$\angle MBC = \angle MCB = \alpha$.

$CH \perp AB$, тогда $\angle CHB = 90°$.

CL – биссектриса, тогда

$\angle ACL = \angle BCL = 45°$.



Найдем углы MCL и LCH и покажем, что они равны.

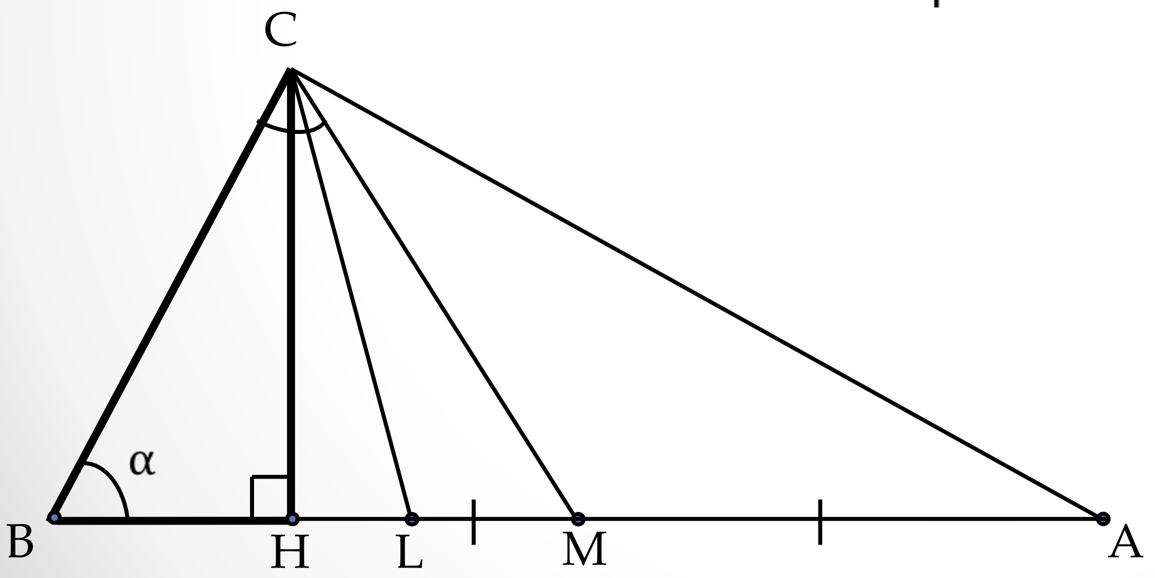
$\angle LCH = \angle BCL - \angle BCH$.

Из прямоугольного ΔCHB: $\angle BCH = 90° - \alpha$.

$\angle LCH = 45° - (90° - \alpha) = \alpha - 45°$;

$\angle MCL = \angle MCB - \angle BCL = \alpha - 45°$;

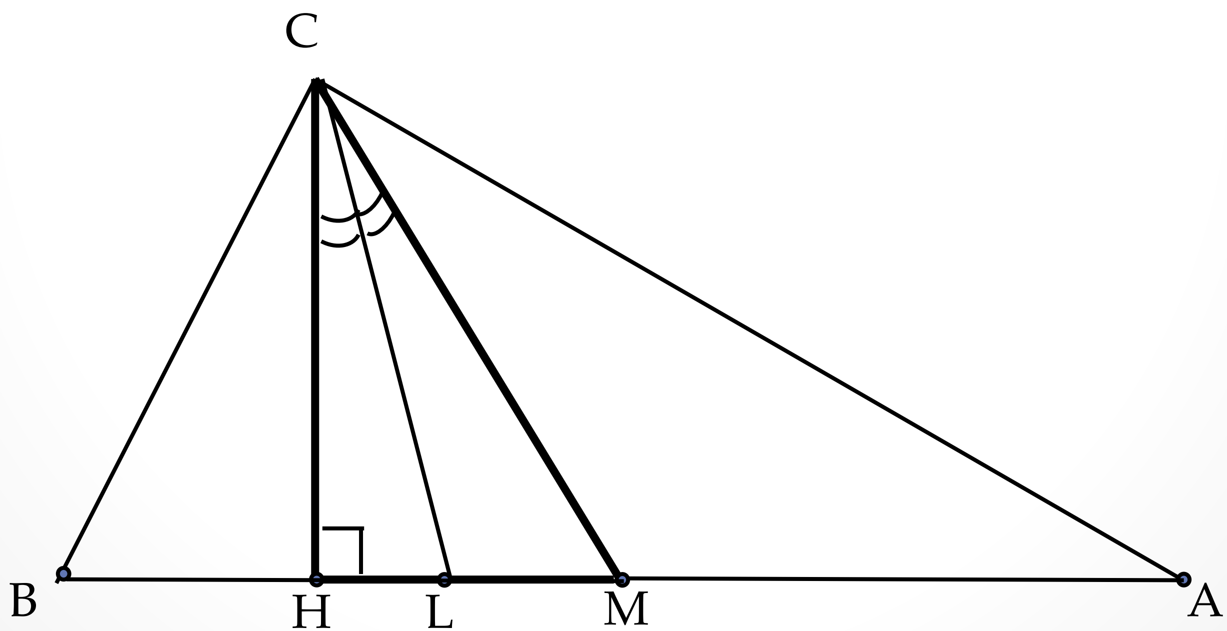
$\angle LCH = \angle MCL \mid \Rightarrow CL$ – биссектриса $\angle MCH$.



б) Биссектриса делит сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е.

$$\frac{CM}{CH} = \frac{ML}{LH} = \frac{5}{3}.$$

Пусть $ML = 5x$, $LH = 3x$, тогда $MH = 8x$.



Из прямоугольного ΔMHC имеем:

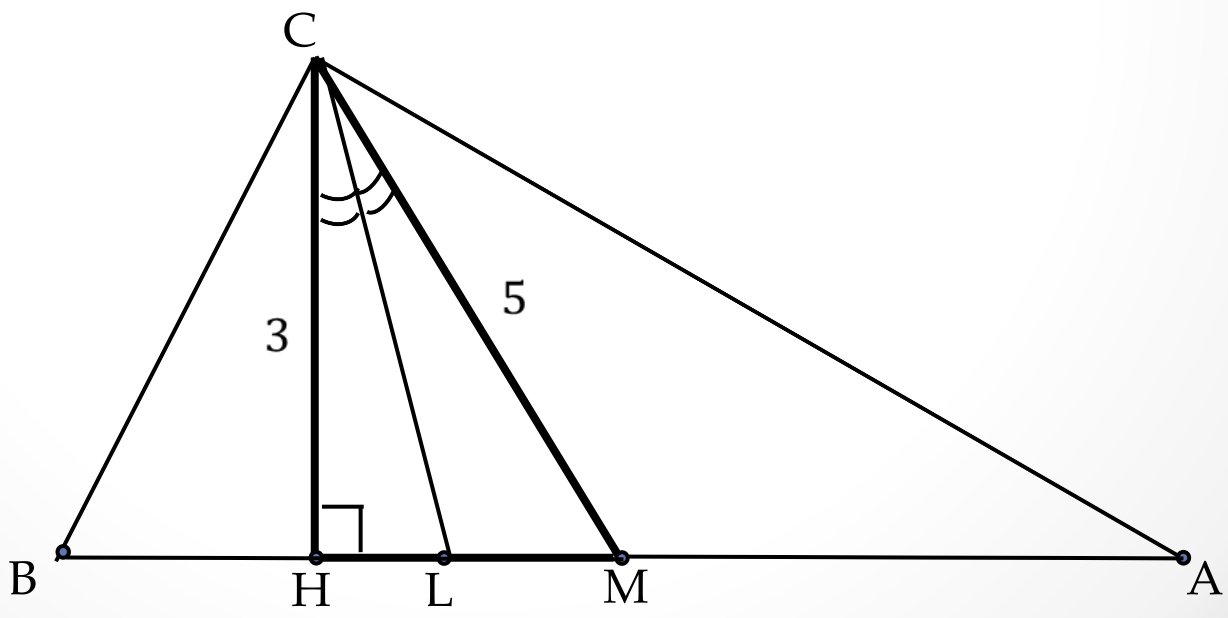
$$CM^2 = CH^2 + MH^2, \quad 9 + 64x^2 = 25, \quad 64x^2 = 16;$$

$$x^2 = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{1}{2}; \; LH = \frac{3}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника CHL:

$$CL^2 = CH^2 + LH^2; \; CL^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}, \; CL = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.



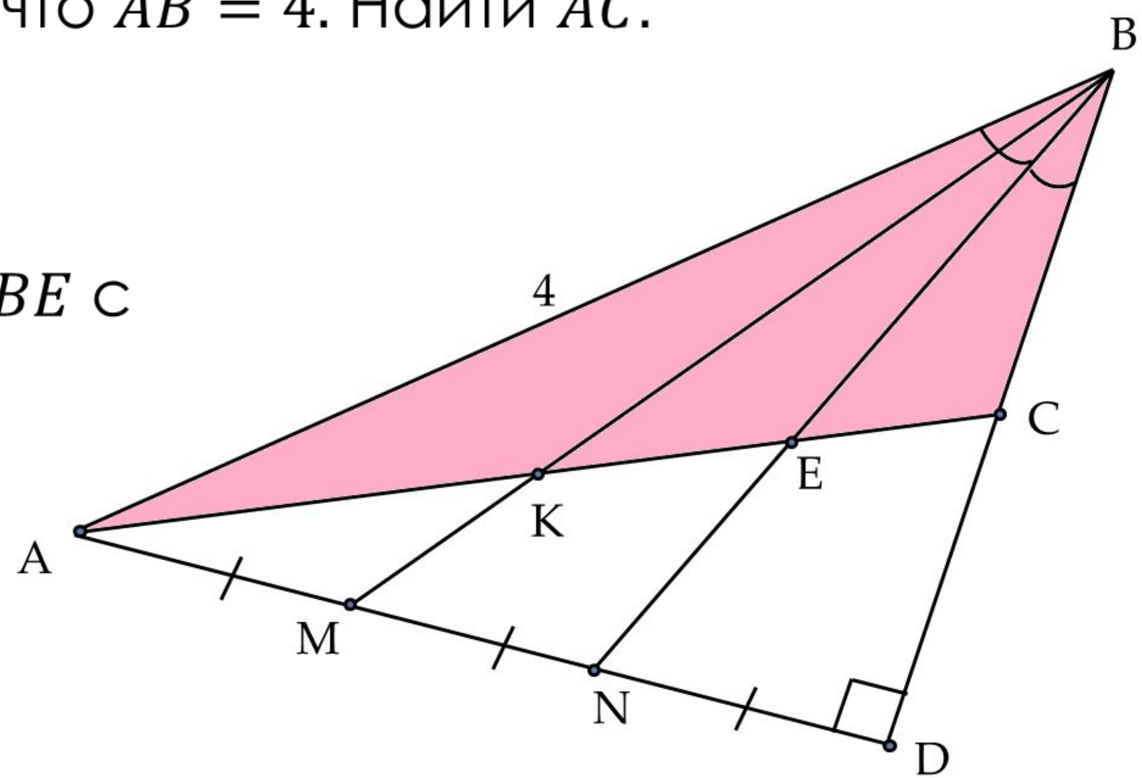
Задача 6.20 (Р.К.Гордин, ЕГЭ 2014 Математика. Решение задачи С4.)

В треугольнике ABC проведена высота AD. Прямые, одна из которых содержит медиану BK, а вторая биссектрису BE, делят эту высоту на три равных отрезка. Известно, что $AB = 4$. Найти AC.

Решение:

Пусть M и N - точки пересечения BK и BE с отрезком AD,

$AM = MN = ND$.



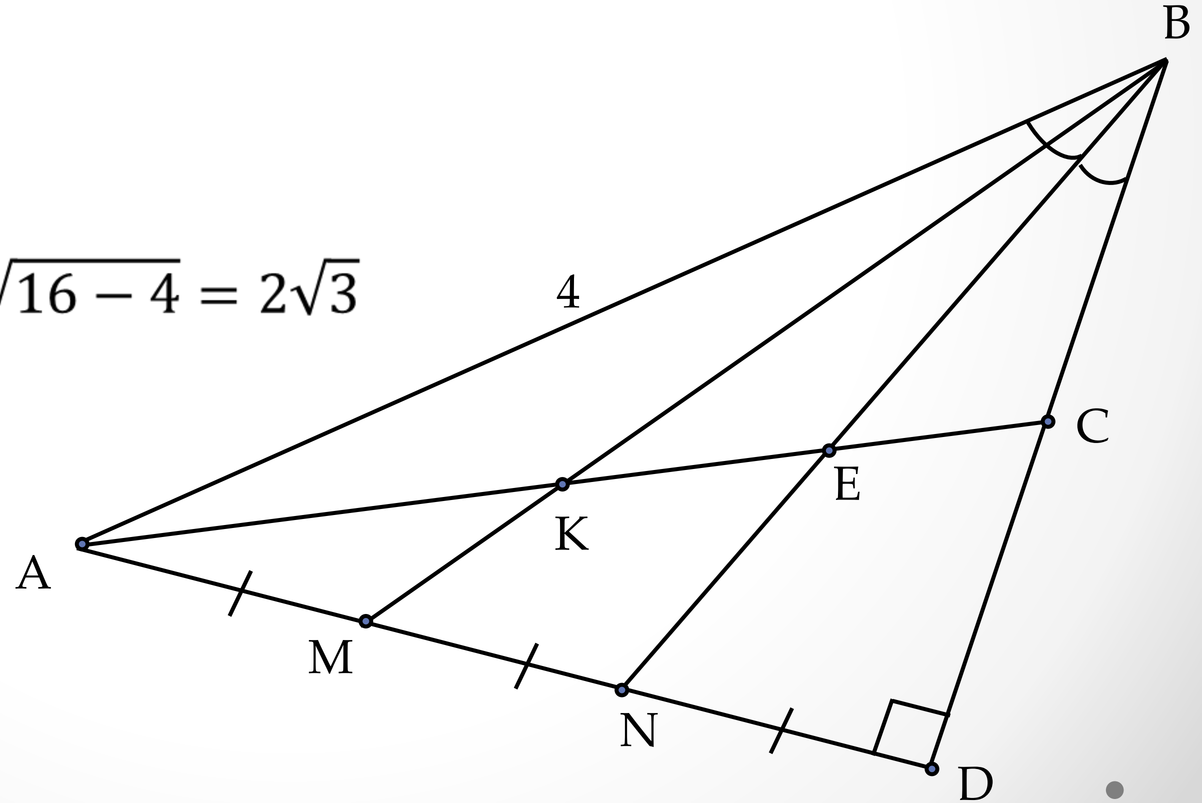
Заметим, что точка N не может лежать между точками A и M, т.к. по свойству биссектрисы в прямоугольном треугольнике ABD стороны AB и BD пропорциональны отрезкам AN и DN.

Т.о. $BD = 2AB$, т.е. гипотенуза меньше катета, что невозможно. Следовательно, точка N лежит между D и M.

Тогда, т.к. $\frac{BD}{AB} = \frac{DN}{NA} = \frac{1}{2}$, то

$$BD = \frac{1}{2}AB = 2,$$

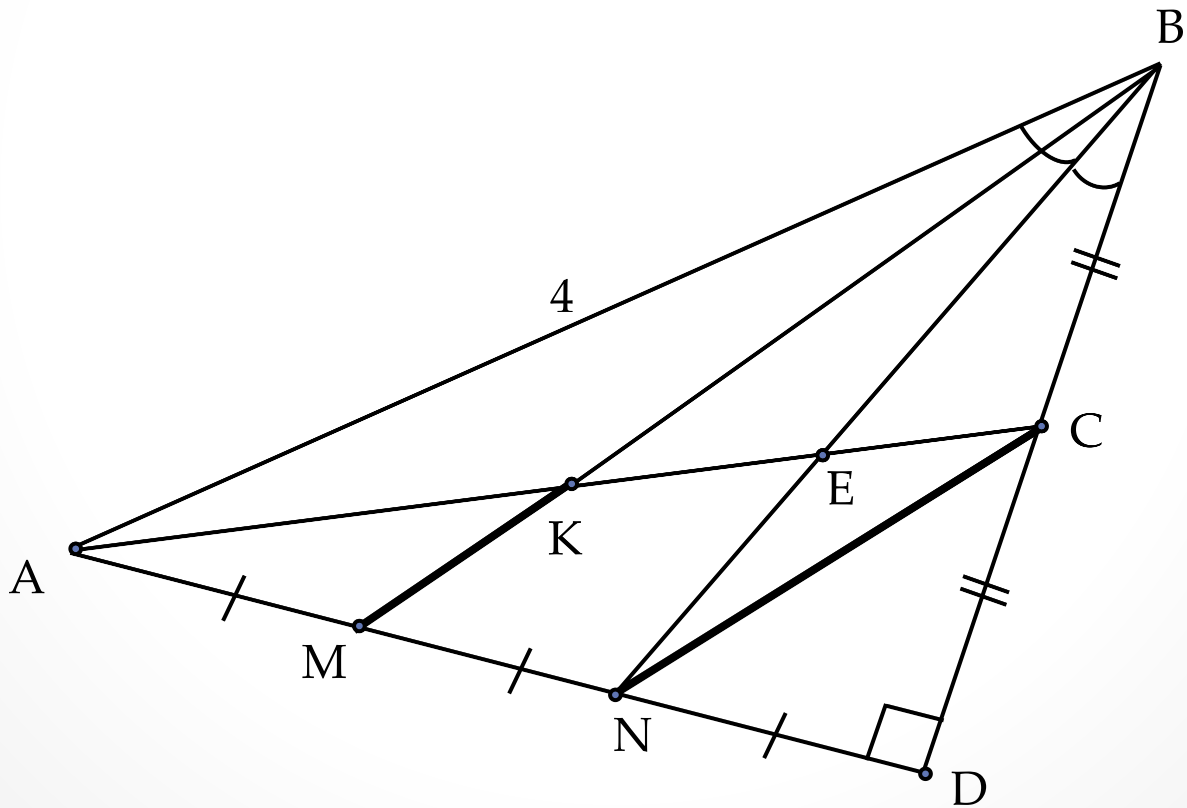
$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$



Поскольку M – середина AN, а K – середина AC, отрезок MK – средняя линия треугольника ACN.

Значит, $MK \parallel CN$.

Т.к. N – середина DM и $CN \parallel BM$, то CN – средняя линия ΔDBM.



Следовательно, C – середина BD.

Тогда, $CD = \frac{1}{2}BD = 1$ и из прямоугольного треугольника ACD находим, что

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13}.$$

Ответ: $\sqrt{13}.$