

Практическое занятие № 12

Решение задач с помощью дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением (ДУ)

называется уравнение, содержащее производные от искомой функции или её дифференциалы.

Решением ДУ является функция

- Общие

Решения

ДУ

- Частные

бывают:

Задача Коши

Коши

Найти

частное

-

Виды ДУ

- с ^{решение} разделёнными переменными

- с разделяющимися переменными

Определение логарифма

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

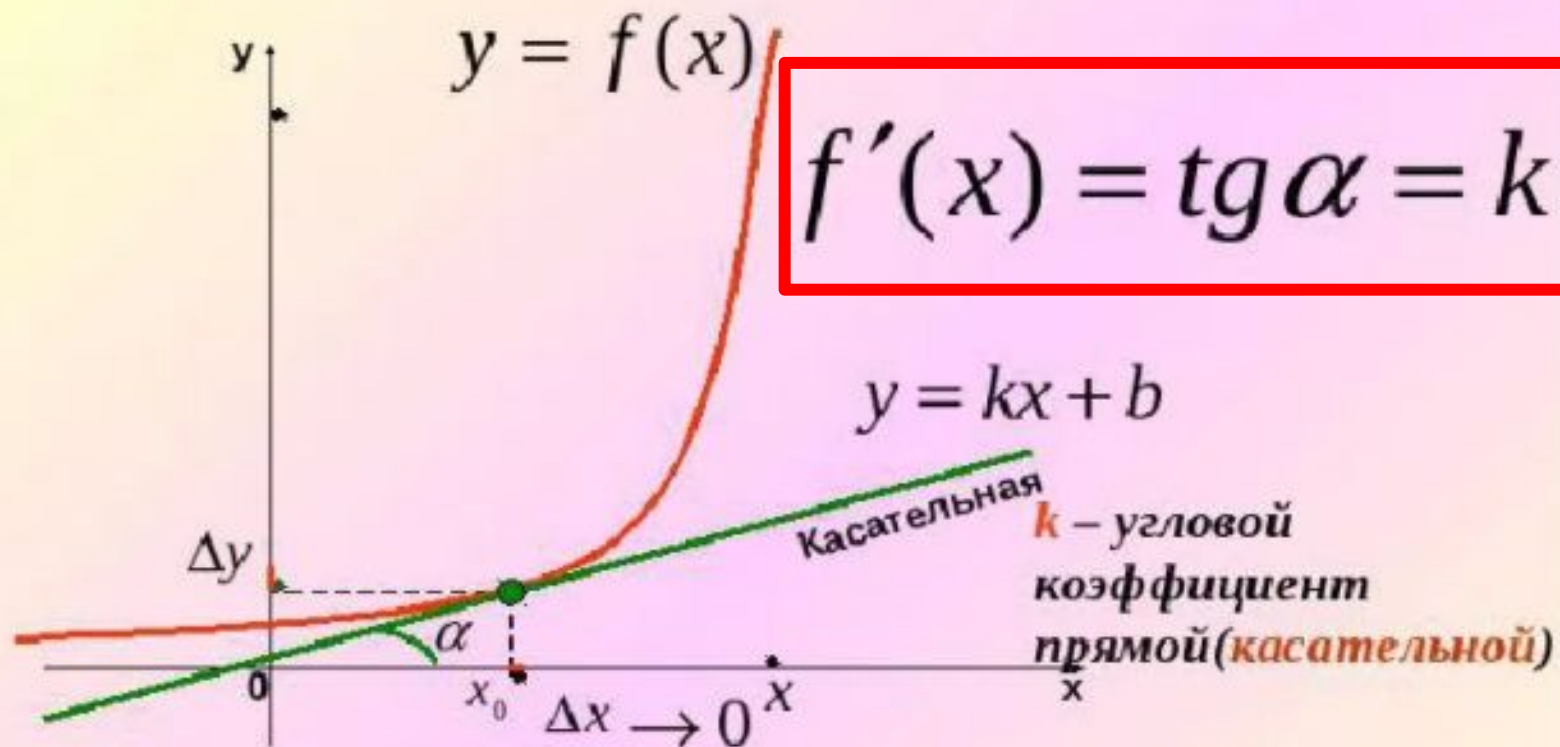
$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 81 = 4$$

$$\log_5 5 = 1$$

$$\lg 10 = 1$$

$$\ln e = 1$$



Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Физический смысл производной

- Скорость есть производная от пути по времени:

$$v(t) = S'(t)$$

- Ускорение есть производная скорости по времени:

$$a(t) = v'(t) = S''(t)$$

Пример 1. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' + y \cdot \sin x = 0$, если $y=2$, при $x = \frac{\pi}{2}$.

$$y' + y \cdot \sin x = 0$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} + y \sin x = 0 \quad | \cdot dx$$

$$dy + y \sin x dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\sin x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx$$

$$\ln|y| = \cos x + C$$

$$\ln|y| = \cos x \cdot \ln e + \ln C$$

$$\ln|y| = \ln C \cdot e^{\cos x}$$

$$y = C \cdot e^{\cos x} \text{ — общее решение}$$

$$y=2 \text{ при } x=\frac{\pi}{2}$$

$$2 = C \cdot y^{\cos \frac{\pi}{2}} = C \cdot e^0 = C \Rightarrow C = 2$$

$$y = 2e^{\cos x} \text{ — частное решение}$$

Пример 2. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/с по истечении t секунд.

Определите путь, пройденный телом за 3с.

Решение:

$$V = 5t^2$$

$$\frac{dS}{dt} = 5t^2$$

$$dS = 5t^2 dt$$

$$\int dS = \int 5t^2 dt$$

$$S = \frac{5t^3}{3} + C \text{ — общее решение}$$

Т. к. тело выходит из состояния покоя, то при $t = 0$ $S(0) = 0$

$$0 = \frac{5 \cdot 0^3}{3} + C \Rightarrow C = 0$$

$$S = \frac{5t^3}{3} \text{ — частное решение}$$

$$S(3) = \frac{5 \cdot 3^3}{3} = 45 \text{ м}$$

Пример 3. Найдите уравнение линии, проходящей через точку $M(1;3)$ и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен $2x-3$.

Решение:

$$y' = 2x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$dy = (2x - 3)dx$$

$$\int dy = \int (2x - 3)dx$$

$$y = x^2 - 3x + C$$

общее решение

(семейство парабол)

Для нахождения частного решения воспользуемся тем, что линия проходит через точку $M(1;3)$, т. е. $x=1$ и $y=3$.

$$3 = 1 - 3 + C \Rightarrow C = 5$$

$$y = x^2 - 3x + 5 - \text{парабола.}$$

Пример 4. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна их количеству в рассматриваемый момент времени t . Количество бактерий утроилось в течение 5ч. Найдите зависимость количества бактерий от времени.

Пример 5. Скорость распада радия пропорциональна его количеству в данный момент времени. Найдите закон радиоактивного распада, если известно, что через 1600 лет останется половина первоначального количества радия.

Пример 4. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна их количеству в рассматриваемый момент времени t . Количество бактерий утроилось в течение 5ч. Найдите зависимость количества бактерий от времени.

$$x_0 = C \cdot e^{k \cdot 0} \Rightarrow C = x_0$$

$$x = x_0 \cdot e^{kt}$$

за 5ч x увеличивается в 3раза

$$3x_0 = x_0 \cdot e^{5k}$$

$$e^{5k} = 3$$

$$5k = \log_e 3 = \ln 3$$

$$k = \frac{1}{5} \ln 3 = 0.2 \ln 3$$

$$x = x_0 \cdot e^{0.2 \ln 3 t}$$

$x = C \cdot e^{kt}$ – общее решение. $x \approx x_0 \cdot e^{0.22t}$.



Пример 5. Скорость распада радия пропорциональна его количеству в данный момент времени. Найдите закон радиоактивного распада, если известно, что через 1600 лет останется половина

$$t = 0 \quad R = R_0 \Rightarrow R_0 = Ce^0 \Rightarrow C = R_0$$

$$t = 1600 \quad R = \frac{1}{2}R_0 \Rightarrow \frac{1}{2}R_0 = R_0e^{-1600k} \Rightarrow e^{-1600k} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$-1600k = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

$$k = \frac{-\ln 2}{-1600} \approx \frac{0,6880}{1600} \approx 0,00043$$

$$R = R_0e^{-0,00043t} \text{ – частное решение}$$

$$R = Ce^{-kt} \text{ – общее решение}$$



Самостоятельно выполните задания Пр
12, которые находятся в группе

«291 СВ математика» в VK:

<https://vk.com/club202706316>

ИЛИ

«293 СВ математика» в VK:

<https://vk.com/club202706340>