КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

КТО?

Кто внес вклад в изучение квадратных уравнений? Кто в истории математики одним из первых начал их решать? Выполнив следующее задание, вы узнаете ответ на этот вопрос.

Задание 1.

Решите неполные квадратные уравнения. Расположите корни по Возрастанию и замените каждое число соответствующей буквой (см. таблицу ниже). Прочитайте ключевое слово.

0	-2	2\3	2	-7	7	4
О	И	Ф	А	Д	Т	Н

1) $x^2 - 49 = 0$ -7; 7

2) $2x^2 = 8$ -2; 2

3) $3x^2 - 2x = 0$ 0; 2/3

4) $8x^2 = 0$ 0

5) $x^2 = 4x$ 0; 4

-7; -2; 0; 2/3; 2; 4; 7

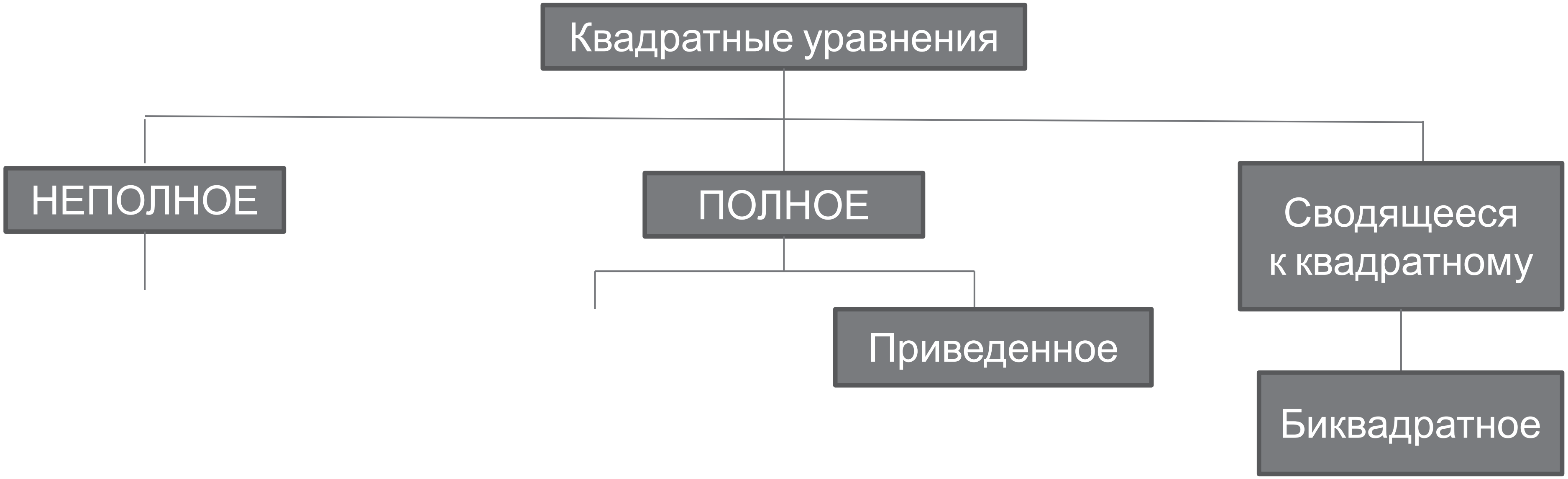
Д И О Ф А Н Т

ЧТО?

Квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Схема 1.



ЗАДАЧА №1.

На две партии разбившись,

Забавлялись обезьяны.

Часть восьмая их в квадрате

В роще весело резвилась.

Криком радостным двенадцать

Воздух свежий оглашали.

Вместе сколько, ты мне скажешь,

Обезьян там было в роще?

Решение.
Пусть в роще было x обезьян, тогда $(x/8)^2 + 12 = x$. Решив полученное
квадратное уравнение, находим, что обезьян было 16 или 48.

ЗАДАЧА №2

Одна сторона прямоугольника на 5м больше другой. Площадь его равна 36м^2.

Вычислите стороны прямоугольника.

Решение.
Пусть меньшая сторона прямоугольника x м, тогда $x(x + 5) = 36$. Решив полученное
квадратное уравнение, получим: стороны прямоугольника 4 м и 9 м.

Задача № 3.

Определите, сколько секунд будет падать камень, брошенный вертикально с высоты 12 м.

Решение.
Из курса физики вам известна формула $S = gt^2/2$.
После подстановки в формулу известных величин, мы получим квалратное уравнение, корнем которого является $t = \sqrt{2.4} \approx 1.5$.
Ответ. 1,5 с.

ЗАДАЧА № 4.

Известно, что фасад здания в виде прямоугольника размером a × b

Производит наиболее приятное впечатление, когда отношение суммы его

длины и высоты к длине равно отношению длины к высоте. (Такой выбор

размера фасада называется выбором по правилу «золотого деления»).

Чему равна длина и высота фасада?

Решение.

Составим уравнение: (a + b)/a = a/b,

1 + b/a = a/b.

Заменим a/b = t, тогда 1 + 1/t = t,

t^2 – t – 1

Решив полученное

квадратное уравнение, получим: $t_1 \approx$ 1,618; $t_2 \approx$ - 0,618

-0,618 не удовлетворяет условию t > 0. Значит, a/b ≈ 1,618. Как видно из этой задачи, квадратные уравнения рассматриваются и в архитектуре.

ЗАДАЧА № 5

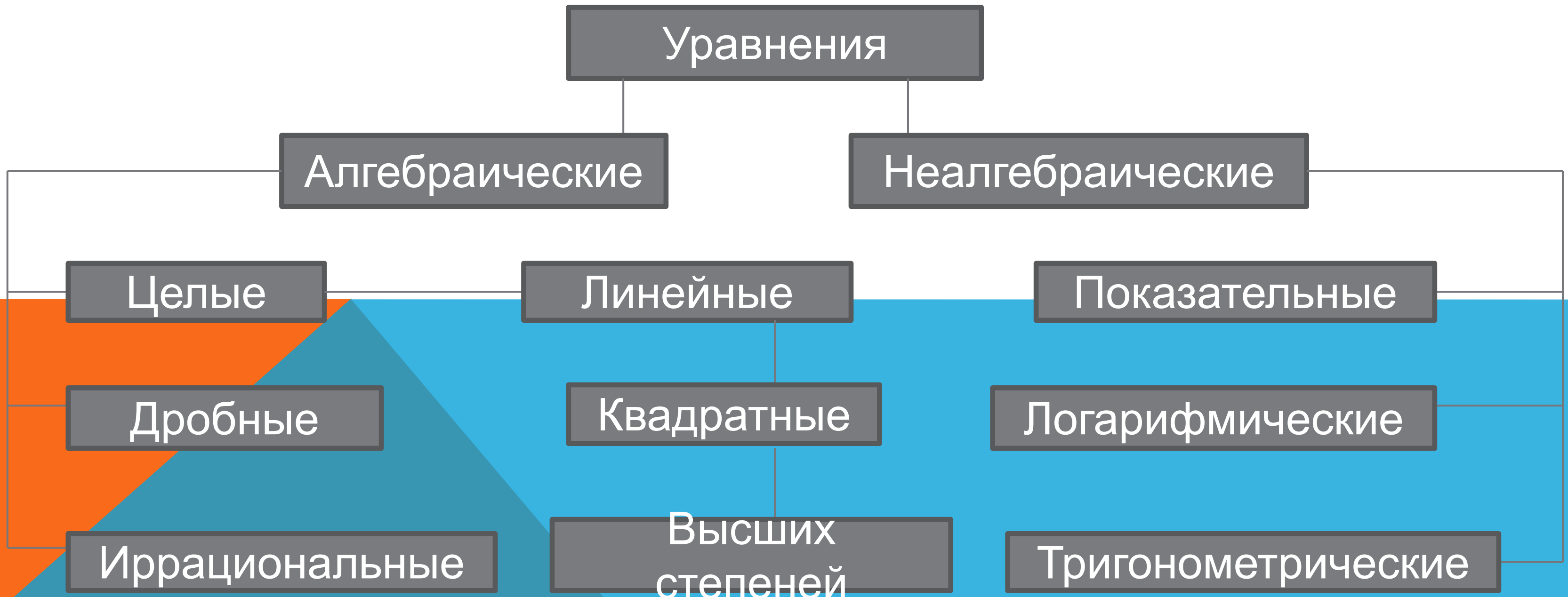
ФИПИ ЕГЭ – 2015
31 декабря 2014 г. Антон взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Антон переводит очередной транш. Антон выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 510 тыс. рублей (X), во второй раз 649 тыс. рублей (Y). Под какой процент банк выдал кредит Антону?

Решение.
Пусть сумма кредита равна S, годовые составляют a %, тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент b = 1+ 0,01a . После первой выплаты сумма долга составит S_1 = Sb - X. После второй выплаты сумма долга составит S ² = (Sb – X)b – Y. По условию задачи двумя выплатами Антон должен погасить кредит, поэтому
S ² = 0, составим уравнение:
Sb ² – bX - Y = 0. Решив полученное квадратное уравнение, получим: b_1 = 1,1;
b_2 = - 0,59.
-0,59 не удовлетворяет условию задачи.
Если b = 1,1 , то a =10.
Ответ. Под 10% банк выдал кредит Антону.

ЗАЧЕМ? И ГДЕ?

Мы выяснили, ЗАЧЕМ нужно уметь решать квадратные уравнения и рассмотрели примеры их применения в математике, физике, архитектуре, экономике.

Следующий вопрос: ГДЕ? (на каком этапе) решаются квадратные уравнения?
Какое место они занимают среди всех уравнений, изучаемых в школе?
Попытаемся разобраться в этом. А поможет нам вспомогательная схема.



КАК?

Как же решать квадратные уравнения?
Помимо известных вам способов решения – по формулам корней и с помощью теоремы. Обратной теореме Виета, есть и другие способы, упрощающие решение некоторых уравнений. Рассмотрим два способа.

I способ. Применение свойства коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x = c/a$.
Если $a + c = b$, то $x_1 = -1$, $x_2 = - c/a$.
Решите устно.

Пример 1.
$2016x^2 - 2015x - 1 = 0$.
$x_1 = 1$, $x_2 = - 1/2016$.
Ответ. -1/2016; 1.

Пример 2:
$2015x^2 + 2016x + 1 = 0$.
$x_1 = -1$, $x_2 = - 1/2015$.
Ответ. -1/2015; -1.

II способ. С помощью теоремы, обратной теореме Виета.
Умножим обе части уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на a и сделаем замену $ax = t$, тогда получим уравнение $t^2 + bt + ac = 0$. Решив полученное квадратное уравнение, получим
корни t_1 и t_2, тогда корни исходного уравнения $x_1 = t_1 /a$; $x_2 = t_2 /a$.

Пример.
Решите уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.
Умножим обе части уравнения на 2 и сделаем
замену переменной, получим уравнение
$t^2 - 11t + 30 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, находим $t_1 = 5$, $t_2 = 6$,
тогда $x_1 = 5/2$; $x_2 = 6/2$;
$x_1 = 2{,}5$; $x_2 = 3$.
Ответ. 2,5; 3.

КОГДА?

Осталось ответить на вопрос: КОГДА?
Когда изучаются квадратные уравнения и будет ли эта тема иметь
Продолжение? Начинается изучение темы в курсе алгебры 8 класса, затем используется в 9 классе при изучении тем «Квадратичная функция» и «Квадратные неравенства», «Прогрессии», в 10-11 классах при решении неалгебраических уравнений.

Итак. Мы ответили на семь ключевых вопросов:

КТО?	Математики древнего Вавилона, Индии, Греции, Европы
ЧТО?	Квадратные уравнения
ЗАЧЕМ?	Для решения уравнений и неравенств школьного курса математики
ГДЕ?	Решение задач алгебры, геометрии, физики, а также практических задач
ЧЕМ?	Предметные знания и умения, личностные качества
КАК?	Формулы, специальные приемы
КОГДА?	8 класс. Используются с 8 по 11класс