

**Элементы
нелинейного
функциональног
о анализа**

Глава 2.

Гладкие многообразия

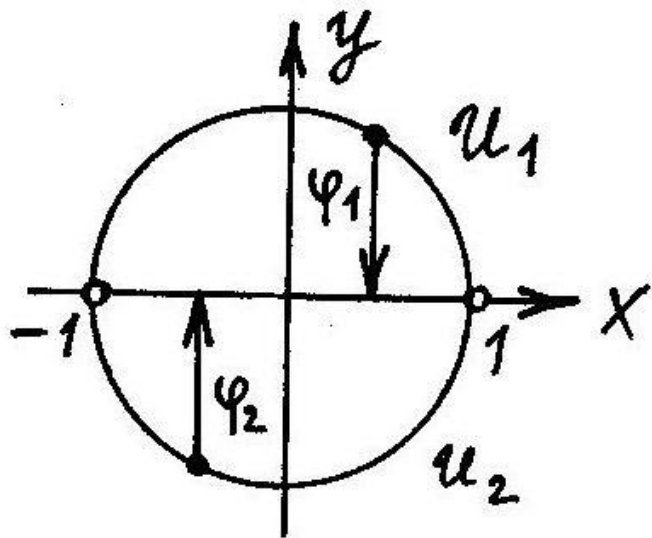
§ 3. Два способа задания атласа на окружности

1-й способ. Рассмотрим окружность

S^1 единичного радиуса с центром

в т. $O(0,0)$; $x^2 + y^2 = 1$ — уравнение

окружности.



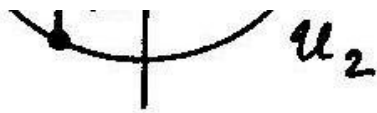
$1 \uparrow y$

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\},$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\},$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\},$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}.$$



$$u_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\},$$

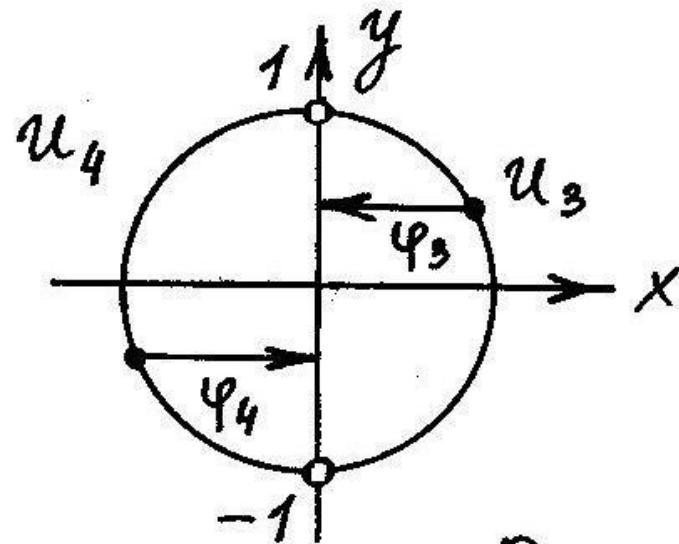
$$u_4 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}.$$

Му-ва u_i — открытые

в ТП S^1 (в смысле

индуцированной топологии).

Расси-и карту (u_1, φ_1) .



Рассм-м карту (U_1, φ_1) .

Отобр-е $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1 = (-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$;

$\varphi_1: (x, y) \mapsto x$:

а) φ_1 — биективное от-е;

б) φ_1 — невр. от-е, т.к. $\varphi_1 = \mathcal{P}_1|_{U_1}$,

где π_1 — проекция \mathbb{R}^2 на \mathbb{R}^1 ,

$$\pi_1: (x, y) \mapsto x;$$

б) обратное от-е $\varphi_1^{-1}: V_1 \rightarrow U_1$,

$\varphi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ — непр-но, т.к.

$\psi_1^1(x) = x$ и $\psi_1^2(x) = \sqrt{1-x^2}$ — непр. ср-ущи
на $(-1, 1)$.

След-но, $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ — гомеоморфизм.

Карта (U_2, φ_2) : $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2 = V_1,$

$$\varphi_2(x, y) = x, \quad \varphi_2^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}).$$

Карта (U_3, φ_3) : $\varphi_3: U_3 \rightarrow V_3 = V_1,$

$$\varphi_3(x, y) = y, \quad \varphi_3^{-1}(y) = (\sqrt{1-y^2}, y).$$

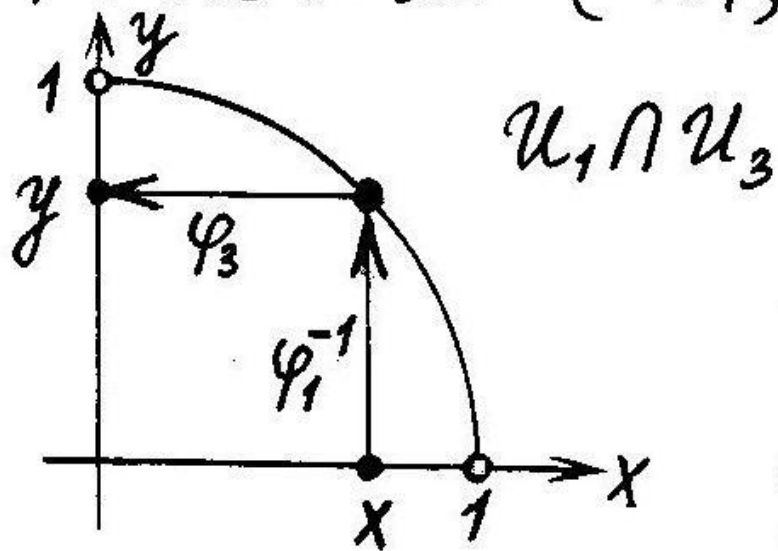
Карта (U_4, φ_4) : $\varphi_4: U_4 \rightarrow V_4 = V_1,$

$$\varphi_4(x, y) = y, \quad \varphi_4^{-1}(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y).$$

$\bigcup_{i=1}^4 U_i = S^1 \Rightarrow \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^4$ — атлас на S^1 .

C^2 -согласованность карт.

Рассм-м (U_1, φ_1) и (U_3, φ_3) .



$$\varphi_1(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$$

$$\varphi_3(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$$

$$\varphi_{31} = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : (0, 1) \longrightarrow (0, 1);$$

$$\varphi_{31} : x \mapsto y = \sqrt{1-x^2};$$

φ_{31} — класса C^∞ ;

$(\varphi_{31})^{-1}: y \mapsto \sqrt{1-y^2}$ — от-е кл. C^∞ .

Итак, $\varphi_{31}: \varphi_1(U_1 \cap U_3) \rightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_3)$

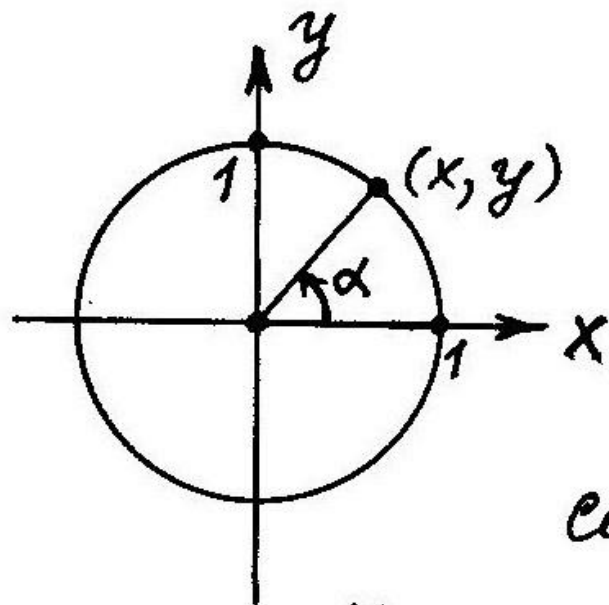
— диффеоморфизм кл. C^∞ .

Для ост-х пар карт C^∞ -согласованность также выполняется (проверьте самое-то!).

След-но, атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=4}^\infty$ —

C^∞ -атлас.

2-й способ.



$$\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha \end{cases} \quad \text{— параметр-е} \\ (R=1) \quad \text{ур-е} \\ \text{окруж-и.}$$

Рассм-и атлас,
состоящий из 2-х карт.

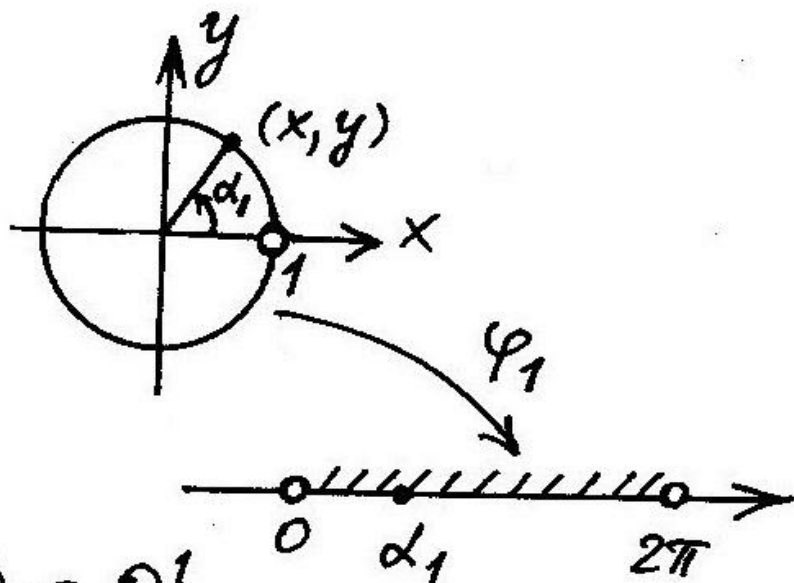
Карта (U_1, φ_1) .

$$U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$$

$$0 < \alpha_1 < 2\pi$$

$$\varphi_1: (x, y) \mapsto \alpha_1$$

$$\varphi_1: U_1 \longrightarrow V_1 = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^1$$



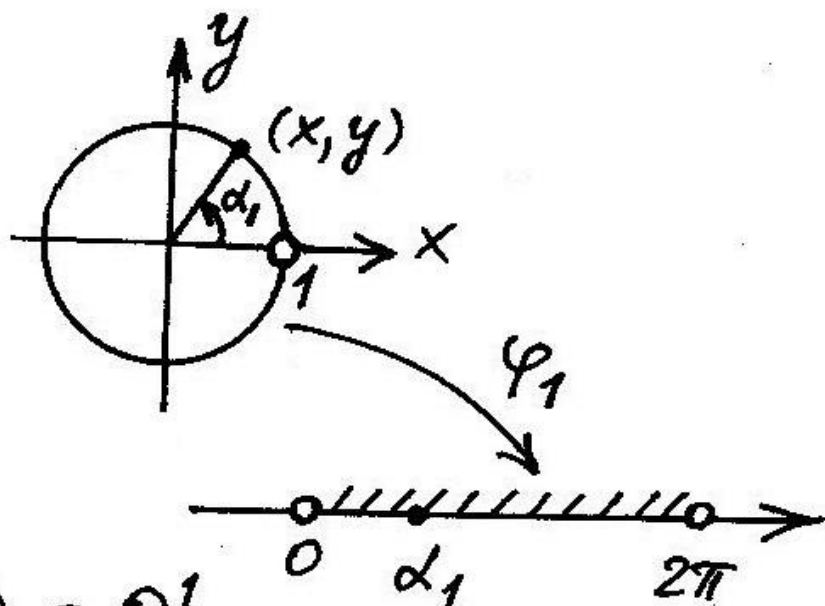
Карта (U_1, φ_1) .

$$U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$$

$$0 < \alpha_1 < 2\pi$$

$$\varphi_1: (x, y) \mapsto \alpha_1$$

$$\varphi_1: U_1 \longrightarrow V_1 = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^1$$



α_1 - локальная карта т. (x, y) ; \mathbb{R}^1 - модельное пр-во.

φ_1 - биективное от-е;

φ_1 - непрерывное от-е (при малом увеличении т. $(x, y) \in U_1$ угол α_1 также мало увеличивается);

φ_1 — биективное σ - e ;

φ_1 — непрерывное σ - e (при малом α_1 значение φ_1 мало);
т. $(x, y) \in \mathcal{U}_1$ угол α_1 , также мало φ_1);

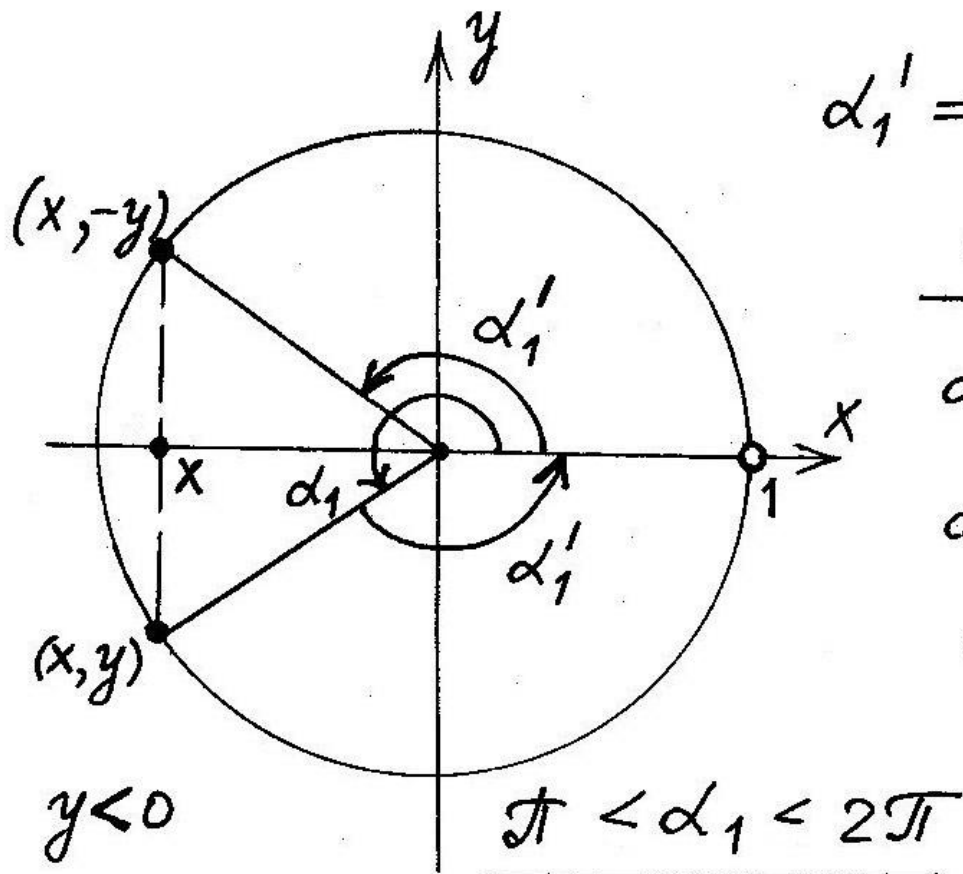
$\varphi_1^{-1}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix}$, $\varphi_1: V_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$ — непрерывное σ - e .

Т.о., $\varphi_1: \mathcal{U}_1 \rightarrow V_1$ — гомеоморфизм.

φ_1 можно задать форму:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \arccos x, & y \geq 0, \\ \alpha_1 = 2\pi - \arccos x, & y < 0, \end{cases}$$

$$(x, y) \in \mathcal{U}_1.$$



$$\alpha_1' = \arccos x$$

$$0 < \alpha_1' < \pi$$

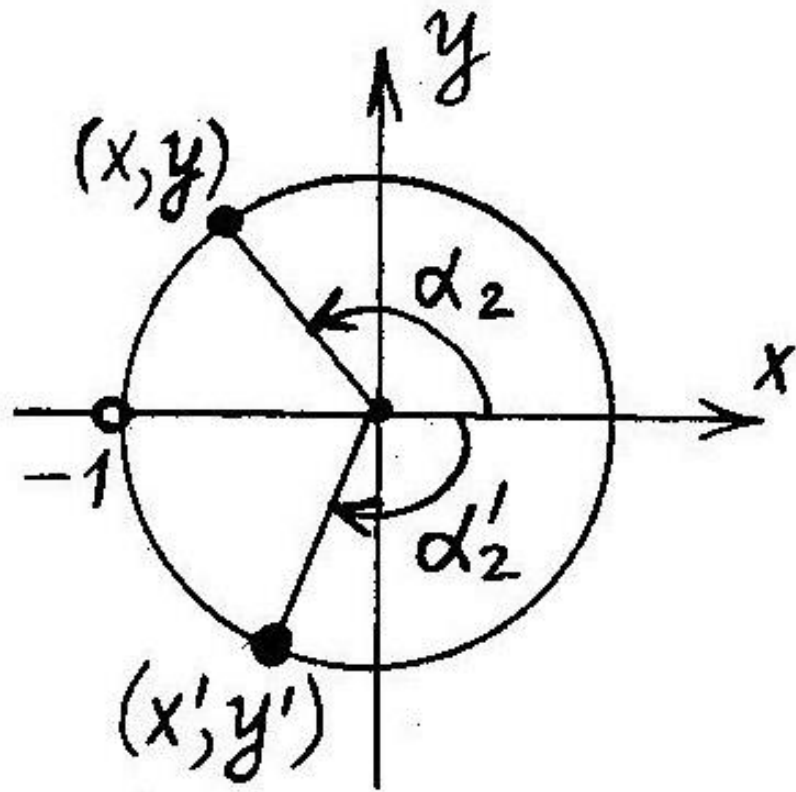
$$\alpha_1 + \alpha_1' = 2\pi$$

$$\alpha_1 = 2\pi - \alpha_1' =$$

$$= 2\pi - \arccos x$$

Карта (U_2, φ_2) : $U_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$,

$\varphi_2: (x, y) \mapsto \alpha_2$, $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2 = (-\pi, \pi)$.

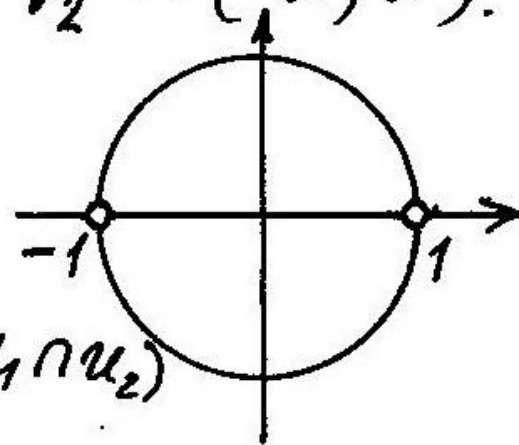


S^1 -согласованность карт

Карта (U_2, φ_2) : $U_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$,

$$\varphi_2: (x, y) \mapsto \alpha_2, \quad \varphi_2: U_2 \rightarrow V_2 = (-\pi, \pi).$$

$$U_1 \cap U_2 = S^1 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}.$$



$$\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

$$\varphi_{12}: (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \rightarrow (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$$

$$\varphi_{12}: \alpha_2 \mapsto \alpha_1$$

$$\alpha_1 = \varphi_{12}(\alpha_2) = \begin{cases} \alpha_2, & \alpha_2 \in (0, \pi), \\ \alpha_2 + 2\pi, & \alpha_2 \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

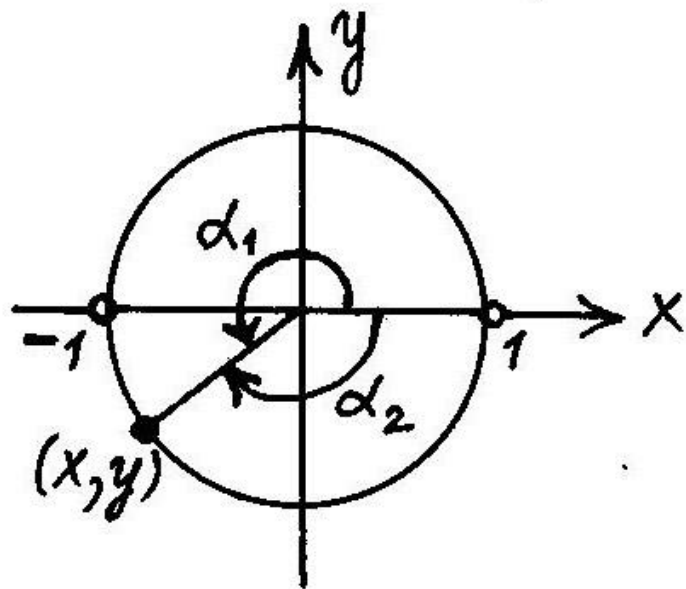
$$\varphi_{12}: \alpha_2 \mapsto \alpha_1$$

$$\alpha_1 = \varphi_{12}(\alpha_2) = \begin{cases} \alpha_2, & \alpha_2 \in (0, \pi), \\ \alpha_2 + 2\pi, & \alpha_2 \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

$$\alpha_2 \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} (x, y) \xrightarrow{\varphi_1} \alpha_1$$

$$\alpha_2 \in (-\pi, 0): \alpha_1 + (-\alpha_2) = 2\pi,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 2\pi.$$



Функции перехода φ_{12} — кл. C^∞ ;
обрат. ф-ция $\varphi_{21} = (\varphi_{12})^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ —
такие кл. C^∞ (проверить самое-то!)

След-но, φ_{12} — C^∞ -диффеоморфизм,

т.е. карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) —

C^∞ -согласованн.

Итак, построенный атлас из 2-х
карт является C^∞ -атласом.

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»