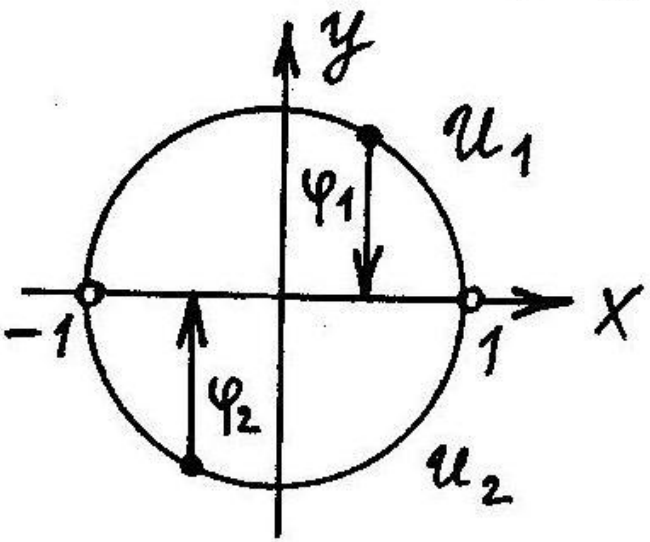
Элементы нелинейного функционального анализа

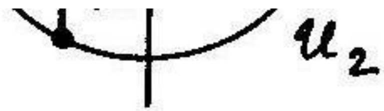
Глава 2.
Гладкие многообразия

§ 3. Два способа задания атласа на окружности

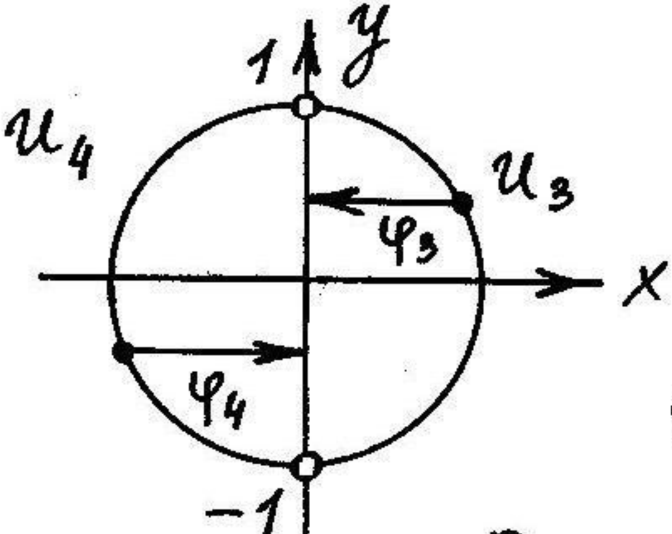
1-й способ. Рассм-м окружность S^1 единичного радиуса с центром в т. $O(0,0)$; $x^2+y^2=1$ – ур-е окруж-ти.



$$U_1=\{(x,y)\in S^1 : y>0\},$$
$$U_2=\{(x,y)\in S^1 : y<0\},$$
$$U_3=\{(x,y)\in S^1 : x>0\},$$
$$U_4=\{(x,y)\in S^1 : x<0\}.$$



$$U_3 = \{(x,y)\in S^1 : x>0\},$$
$$U_4 = \{(x,y)\in S^1 : x<0\}.$$



Мн-ва U_i — открытые в ТП S^1 (в смысле индуцированной топологии).

Рассм-м карту (U_1, φ_1).

Рассм-м карту $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$.

Отобр-е $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1 = (-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$;

$\varphi_1 : (x, y) \longmapsto x$:

а) φ_1 – биективное от-е;

б) φ_1 – непр. от-е, т.к. $\varphi_1 = \Pi_1 \big|_{\mathcal{U}_1}$, где π_1 — проекция $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^1$,

$$\pi_1 : (x, y) \longmapsto x;$$

в) обратное от-е $\varphi_1^{-1} : V_1 \longrightarrow U_1$,

$\varphi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ — непр-но, т.к.

$\psi_1^1(x) = x$ и $\psi_1^2(x) = \sqrt{1-x^2}$ — непр. ф-ции

на $(-1, 1)$.

След-но, $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ — гомеоморфизм.

Карта $(\mathcal{U}_2, \varphi_2)$: $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow V_2 = V_1$,

$\varphi_2(x, y) = x$, $\varphi_2^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$.

Карта $(\mathcal{U}_3, \varphi_3)$: $\varphi_3 : \mathcal{U}_3 \longrightarrow V_3 = V_1$,

$\varphi_3(x, y) = y$, $\varphi_3^{-1}(y) = (\sqrt{1-y^2}, y)$.

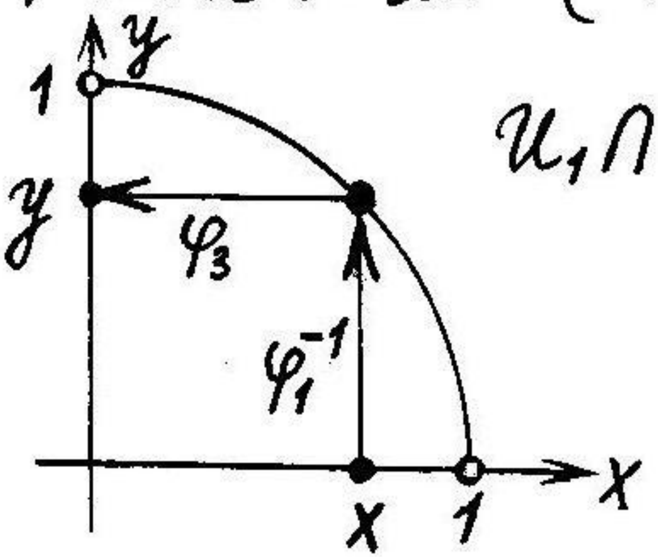
Карта $(\mathcal{U}_4, \varphi_4)$: $\varphi_4 : \mathcal{U}_4 \longrightarrow V_4 = V_1$,

$\varphi_4(x, y) = y$, $\varphi_4^{-1}(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y)$.

$\bigcup\limits_{i=1}^{4} \mathcal{U}_i = S^1 \Rightarrow \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{4}$ — атлас на S^1.

C^2-согласованность карт.

Рассм-м (U_1, φ_1) и (U_3, φ_3).



$U_1 \cap U_3$

$$\varphi_1(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$$

$$\varphi_3(U_1 \cap U_3) = (0, 1)$$

$$\varphi_{31} = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : (0,1) \longrightarrow (0,1);$$

$$\varphi_{31} : x \longmapsto y = \sqrt{1 - x^2};$$

φ_{31} – класса C^∞;

$(\varphi_{31})^{-1}: y \longmapsto \sqrt{1-y^2}$ — от-е кл. C^∞.

Итак, $\varphi_{31}: \varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3) \longrightarrow \varphi_3(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3)$

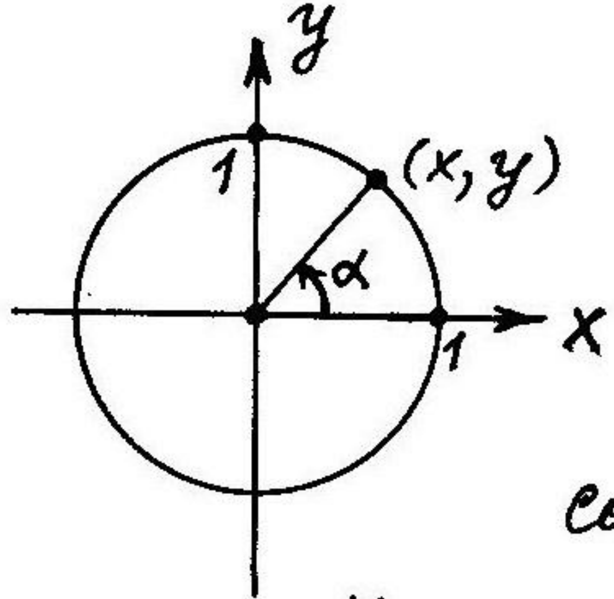
— диффеоморфизм кл. C^∞.

Для ост-х пар карт C^∞-согласованность также выполняется (проверьте самост-но!).

След-но, атлас $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=4}^{\infty}$ —

C^∞-атлас.

2-й способ.



$$\begin{cases} x = \cos\alpha, \\ y = \sin\alpha \end{cases}$$ — параметр-е ур-е окруж-ти.

$(R = 1)$

Рассм-м атлас, состоящий из 2-х карт.

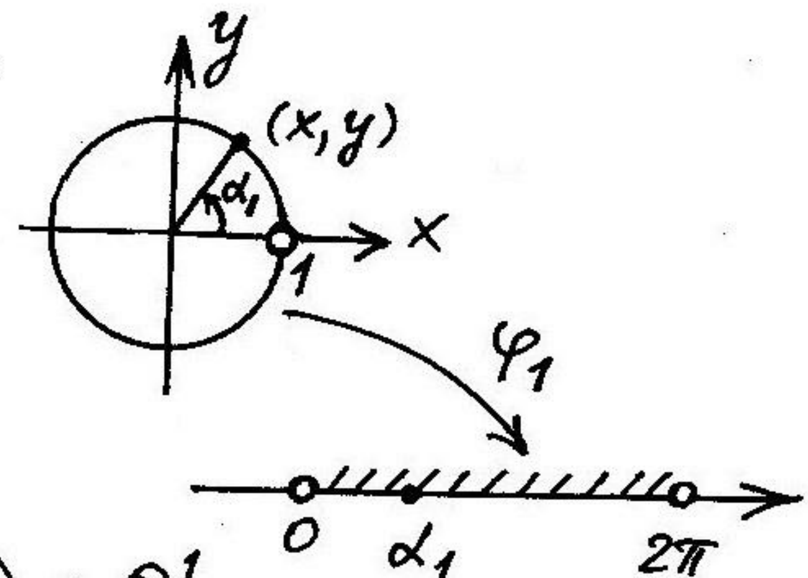
Карта $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$.

$\mathcal{U}_1 = S^1 \setminus \{(1,0)\}$

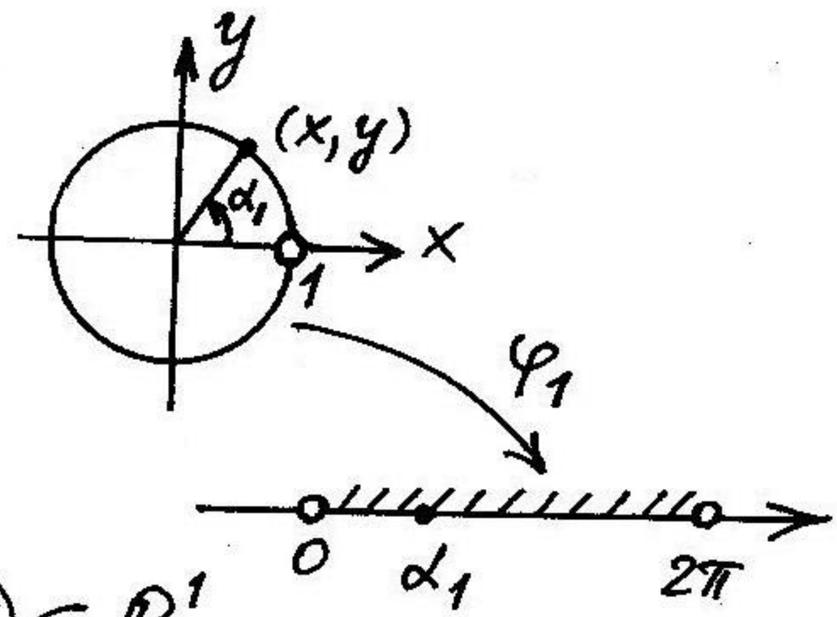
$0 < \alpha_1 < 2\pi$

$\varphi_1 : (x, y) \longmapsto \alpha_1$

$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1 = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^1$



Карта (U_1, φ_1).



$U_1 = S^1 \setminus \{(1,0)\}$

$0 < \alpha_1 < 2\pi$

$\varphi_1 : (x, y) \longmapsto \alpha_1$

$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow V_1 = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^1$

α_1 – локальная к-та т. (x,y); $\mathbb{R}^1$ – модельное пр-во.

φ_1 – биективное от-е;

φ_1 – непр-е от-е (при малом изменении т. $(x,y) \in U_1$ угол α_1 также мало изменяется);

φ_1 – биективное от-е;

φ_1 – непр-е от-е (при малом изменении т. $(x,y) \in U_1$ угол α_1 также мало изменяется);

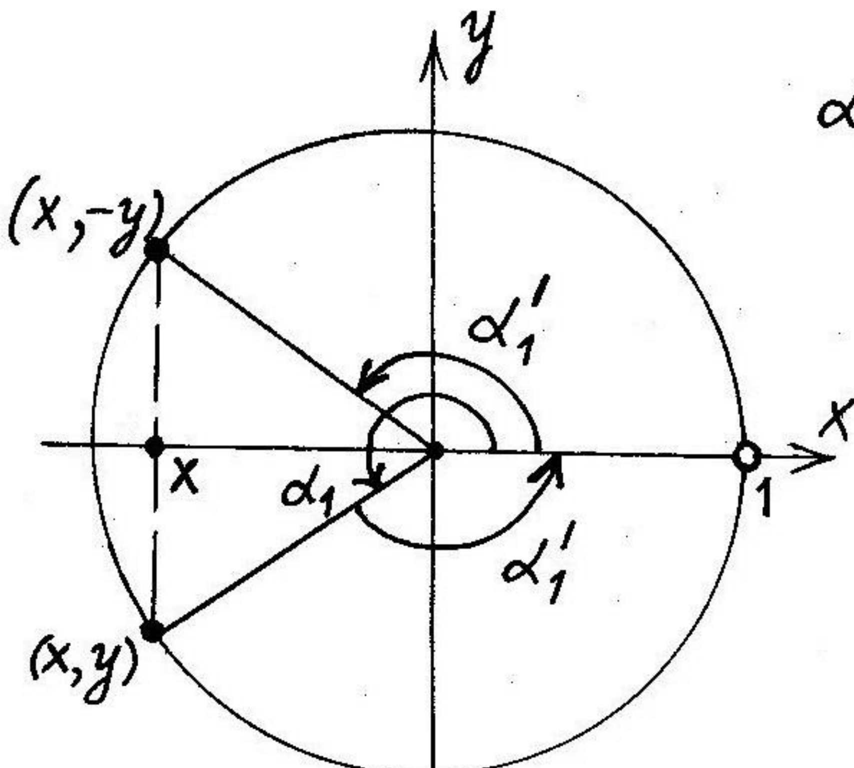
$\varphi_1^{-1}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix}$, $\varphi_1 : V_1 \longrightarrow U_1$ – непр. от-е.

Т.о., $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ – гомеоморфизм.

φ_1 можно задать точно:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \arccos x, & y \geq 0, \\ \alpha_1 = 2\pi - \arccos x, & y < 0, \end{cases}$$

$$(x, y) \in U_1.$$



$$\alpha_1' = \arccos x$$

$$\underline{0 < \alpha_1' < \pi}$$

$$\alpha_1 + \alpha_1' = 2\pi$$

$$\alpha_1 = 2\pi - \alpha_1' =$$

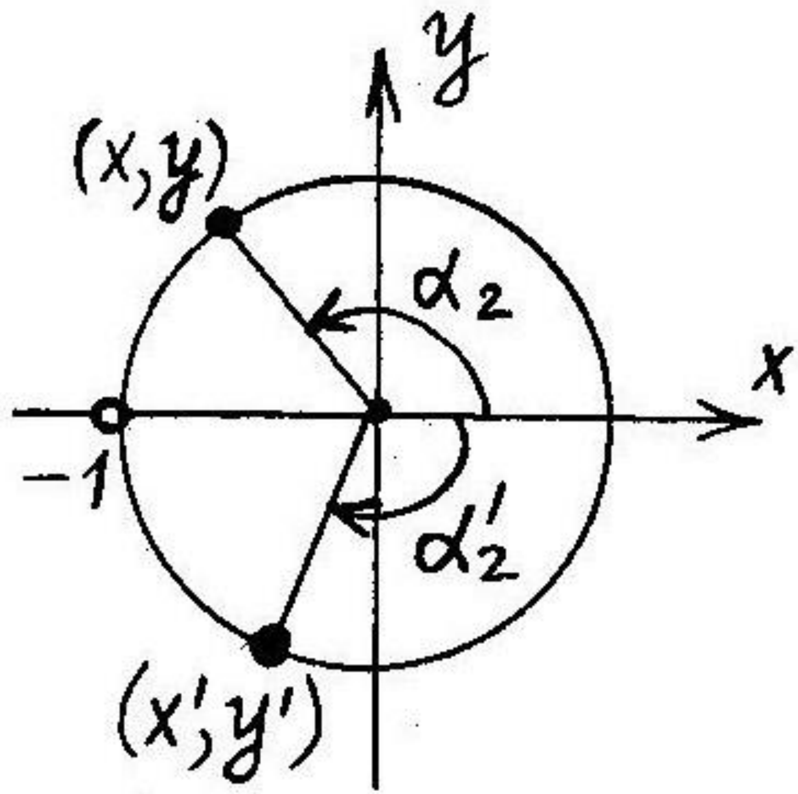
$$= 2\pi - \arccos x$$

$y < 0$

$$\underline{\pi < \alpha_1 < 2\pi}$$

$\underline{\text{Карта } (\mathcal{U}_2, \varphi_2)}$: $\mathcal{U}_2 = S^1 \setminus \{(-1,0)\}$,

$\varphi_2 : (x,y) \longmapsto \alpha_2$, $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \to V_2 = (-\pi, \pi)$.

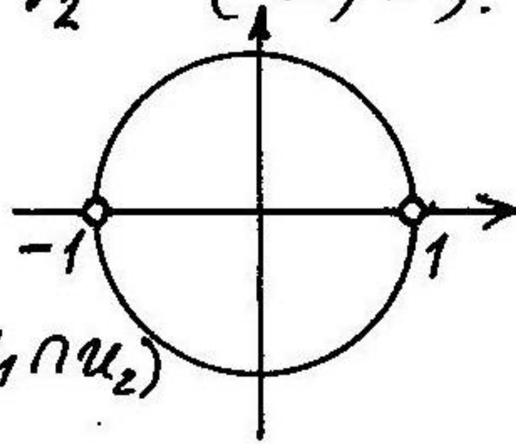


C^r– согласованность карт

<u>Карта $(\mathcal{U}_2, \varphi_2)$</u>: $\mathcal{U}_2 = S^1 \setminus \{(-1,0)\}$,

$\varphi_2 : (x,y) \longmapsto \alpha_2$, $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow V_2 = (-\pi, \pi)$.

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = S^1 \setminus \{(1,0), (-1,0)\}$.



$\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \longrightarrow \varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$

$\varphi_{12} : (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \longrightarrow (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

$\varphi_{12} : \alpha_2 \longmapsto \alpha_1$

$$\alpha_1 = \varphi_{12}(\alpha_2) = \begin{cases} \alpha_2, & \alpha_2 \in (0, \pi), \\ \alpha_2 + 2\pi, & \alpha_2 \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

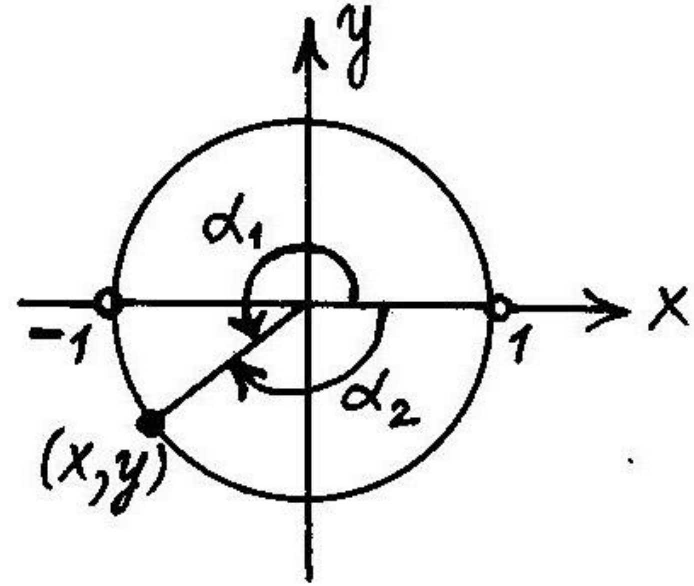
$$\varphi_{12}: \alpha_2 \longmapsto \alpha_1$$

$$\alpha_1 = \varphi_{12}(\alpha_2) = \begin{cases} \alpha_2, & \alpha_2 \in (0, \pi), \\ \alpha_2 + 2\pi, & \alpha_2 \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

$$\alpha_2 \xmapsto{\varphi_2^{-1}} (x, y) \xmapsto{\varphi_1} \alpha_1$$

$\alpha_2 \in (-\pi, 0)$: $\alpha_1 + (-\alpha_2) = 2\pi$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 2\pi.$$



Функция перехода φ_{12} — кл. C^∞; обрат. ф-ция $\varphi_{21} = (\varphi_{12})^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ — также кл. C^∞ (проверить самост-но!)

След-но, φ_{12} — C^∞-диффеоморфизм, т.е. карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) — C^∞-согласован.

Итак, построенный атлас из 2-х карт является C^∞-атласом.

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»