Логарифмические уравнения

Домашнее задание №№213-216, 224-226

№213 $x = a^3 b^3$

$\log x = 3\log a + 3\log b$

№214 $x = \frac{5a^3c^2}{b^4}$

$\log x = \log 5 + 3\log a + 2\log c - 4\log b$

№215 $x = \frac{2a^2(a+b)}{3b^3}$

$\log x = \log 2 + 2\log a + \log(a+b) -$
$- \log 3 - 3\log b$

№216 $x = 7a^3 b \sqrt[8]{c}$

$\log x = \log 7 + 3\log a + \log b + \frac{1}{8}\log c$

№224 $\log x = 3\log a - 2\log b + \log(a+c) =$

$= \log a^3 - \log b^2 + \log(a+c) =$

$= \log \frac{a^3(a+c)}{b^2} \Rightarrow x = \frac{a^3(a+c)}{b^2}$

№225 $\log x = 2\log 2 + \log(a+b) + \log(a-b)$

$= \log 4 + \lg(a+b) + \lg(a-b) =$

$= \log 4(a+b)(a-b) \Rightarrow x = 4(a+b)(a-b)$

№226 $\log x = \frac{\log m + \log n}{5} = \frac{\log mn}{5}$

$x = \sqrt[5]{m \cdot n}$

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то равны и их логарифмы при данном основании и, обратно, если равны логарифмы чисел при данном основании, то равны и соответствующие им числа.

При этом необходимо учитывать, что при любом a ($a>0$, $a\neq 1$) логарифмы отрицательных чисел и нуля не существуют.

$$\log_3(12x+4)-\log_3(x-7)=\log_3 9.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$\log_3 \frac{12x+4}{x-7}=\log_3 9.$$

Так как равны логарифмы и их основания, то равны и логарифмируемые числа:

$$\frac{12x+4}{x-7}=9.$$

Полагая $x-7\neq 0$, приведем дробь к общему знаменателю и решим полученное уравнение:

$$12x+4=9x-63;\quad 3x=-67;\quad x=-22\frac{1}{3}.$$

Подставив значение $x=-22\frac{1}{3}$ в уравнение, видим, что при этом значении x выражения $12x+4$ и $x-7$ отрицательны. Так как логарифмы отрицательных чисел не существуют, то $x=-22\frac{1}{3}$ — посторонний корень, а само уравнение не имеет решений.

230. $\lg(x-1)+\lg(x+1)=\lg 2.$

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lg((x-1)(x+1))=\lg 2,$$

откуда

$$(x-1)(x+1)=2;\ \ x^2-1=2;\ \ x^2=3;\ \ x_1=\sqrt{3};\ \ x_2=-\sqrt{3}.$$

Корень x_2 является посторонним, поскольку при $x_2=-\sqrt{3}$ имеем $-\sqrt{3}-1<0$ и $-\sqrt{3}+1<0$ и, следовательно, логарифмы этих выражений не существуют. Итак, получаем ответ: $x=\sqrt{3}$.

Рассмотрим ещё один тип логарифмических уравнений

$$\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x.$$

Решение. Это — логарифмическое уравнение, приводимое к квадратному. Полагая $\lg x = z$, получим уравнение

$$\frac{1}{12}z^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}z \quad \text{или} \quad z^2 + 3z - 4 = 0.$$

Здесь $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 1(-4) = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{D} = 5$. Используя формулу $z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, находим $z_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$, $z_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$.

Так как $\lg x = z$, то $\lg x = -4$ или $\lg x = 1$. Следовательно, $x_1 = 10^{-4} = 0{,}0001$, $x_2 = 10$.

Домашнее задание:

учебник А.Г.Мордкович «Алгебра и начала математического анализа 10-11».
стр 256,§ 43 - Свойства логарифмов
стр 262, §44- Логарифмические уравнения

98. 1) $\lg(x+4) - \lg(x-3) = \lg 8$;

2) $\lg(x+2) - \lg 5 = \lg(x-6)$;

3) $\lg(x-2) + \lg x = \lg 8$;

99. 1) $\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1$;   2) $\log_2^2 x - 6\log_2 x = -8$;