«Каждая решенная мною задача становится образом, который служит впоследствии для решения других задач» Р. Декарт

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ПРИВОДИМЫХ К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

СОДЕРЖАНИЕ

1

ВВЕДЕНИЕ

- Тригонометрические функции возникли в Древней Греции в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Отношения сторон в прямоугольном треугольнике, которые по существу и есть тригонометрические функции, встречаются уже в III в. до н.э. в работах Евклида, Архимеда и других.
- Современную форму тригонометрическим функциям и вообще тригонометрии придал Леонард Эйлер. Ему принадлежат определения тригонометрических функций и принятая в наши дни символика.

Содержание

1

ВВЕДЕНИЕ

- ТРИГОНОМЕТРИЯ - математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.
- ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, с помощью которых связываются элементы треугольника, изучаются в курсе математического анализа.
- ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ – это уравнения, в которых неизвестные являются аргументами тригонометрических функций.

Содержание

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2

$\cos x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение не имеет решения.

Если $|a| \leq 1$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$

$\sin x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение не имеет решения.

Если $|a| \leq 1$ $x = (-1)^к \arcsin a + \pi к, к \in Z$

$tg\, x = a$

$x = arctg\, a + \pi n, n \in Z$

$a \in (-\infty, +\infty)$

$ctg\, x = a$

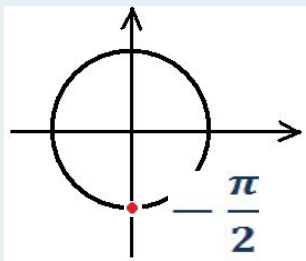
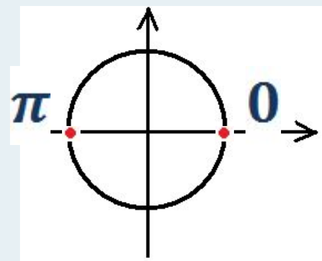
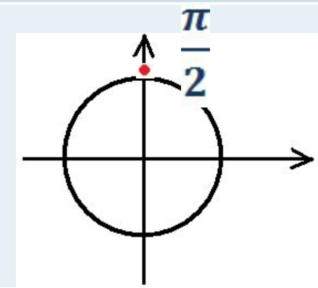
$x = arcctg\, a + \pi n, n \in Z$

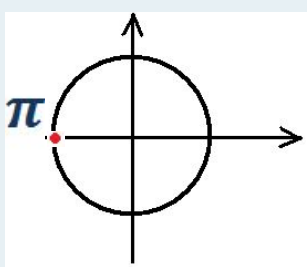
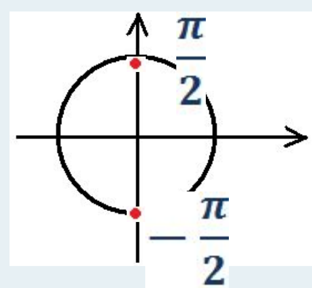
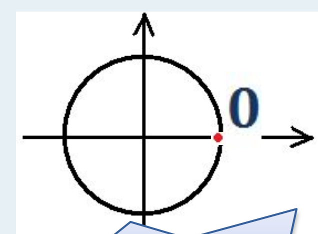
Содержание

2

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Частные случаи

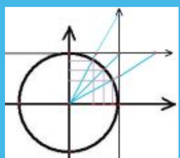
$\sin x = -1$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
		

$\cos x = -1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z$
		

Содержание

ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ

2



1. **Решите уравнение:** $2\cos x = \dfrac{\sqrt{8}}{2}$

1) $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$

2) $\pm \dfrac{\pi}{4} + \pi n \quad n \in Z$

3) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$

4) $\boxed{\pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z}$

2. Решите уравнение: $\sin(3x) = 0$

1) $\dfrac{2\pi n}{3}$ 2) $\boxed{\dfrac{\pi n}{3}}$ 3) πn 4) $\pm \dfrac{\pi n}{3}$

3. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin\dfrac{\pi}{2} \cdot tg(-x) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

1) $\dfrac{\pi}{3}$ 2) $\dfrac{5\pi}{4}$ 3) $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$ 4) $\dfrac{\pi}{2}$

Содержание

4

УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

С помощью замены переменной можно привести тригонометрическое уравнение к алгебраическому. Рассмотрим несколько типов уравнений:

Тип уравнения	Замена	Алгебраическое уравнение	
$a\cos^2 x + в\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$at^2 + вt + c = 0$	ПР №1
$a\sin^2 x + в\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$at^2 - вt - (a + c) = 0$	ПР №2
$a\cos 2x + в\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$2at^2 + вt + c - a = 0$	ПР №3
$a\,tg\,x + в\,ctg\,x + c = 0$	$t = tgx$	$at^2 + ct + в = 0$	ПР №4

Содержание

Теория

Уравнения, приводимые к алгебраическим

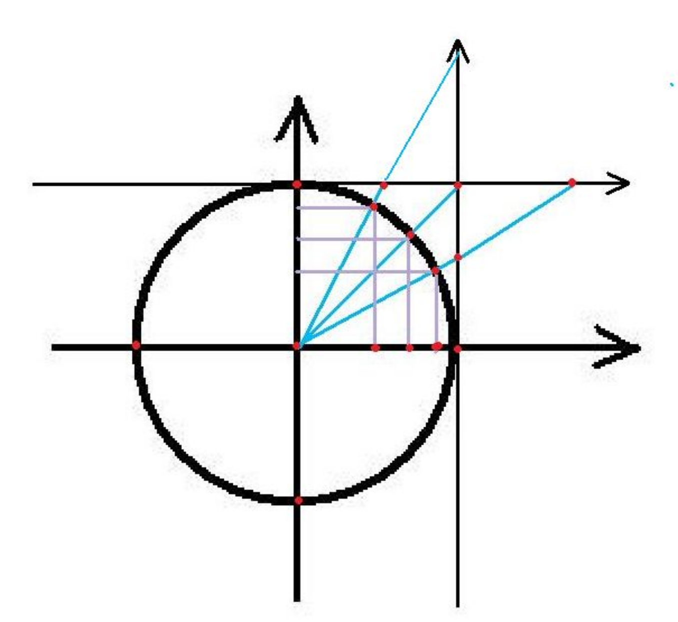
Пример 1

$$\cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0$$

Сделаем замену переменной $t = \cos x$ $|t| \le 1$

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

Получаем : $t = -5$, $t = 1$



Делаем обратную замену

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $2\pi n, n \in Z$

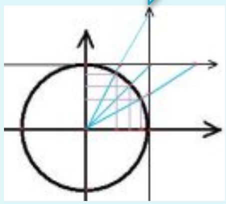
Содержание

Уравнения, приводимые к алгебраическим

Пример 2

$$\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$$

Теория



Применим основное тригонометрическое тождество

$$\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Сделаем замену переменной

$$t = \cos x \qquad \sqrt{2} - \sqrt{2}t^2 + t = 0$$

Получаем : $t = \sqrt{2}$, $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|t| \le 1$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

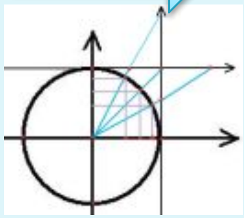
Содержание

Уравнения, приводимые к алгебраическим

Пример 3

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

Теория



$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \ 1 + \cos x = 0$$

Сделаем замену переменной $t = \cos x$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$|t| \leq 1$$

Получаем : $t = -1$ $t = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \ \pm arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \ 2\,\pi к, к \epsilon Z$$

$$x \ = \ \pm\frac{\pi}{3} + \ 2\,\pi к, к \ \epsilon \ Z$$

$$\cos x = -1$$

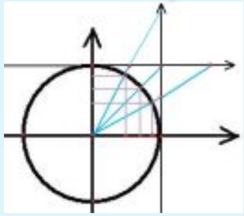
$$x \ = \pi + 2\,\pi n\,, n\epsilon \ Z$$

Ответ: $\pi + 2\,\pi n; \pm\frac{\pi}{3} + \ 2\,\pi к, n, к\ \epsilon \ Z$

Содержание

5

Теория



Уравнения, приводимые к алгебраическим

Пример 4

$$tgx + 3ctgx = 4$$

$$tgx + \frac{3}{tgx} = 4$$

Сделаем замену переменной $t = tgx$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$tgx = 1/ctgx$

Получаем : $t = 3$, $t = 1$

$$tgx = 3$$

$$x = arctg\,3 + \pi к, к \in Z$$

$$tgx = 1$$

$$x = arctg\,1 + \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

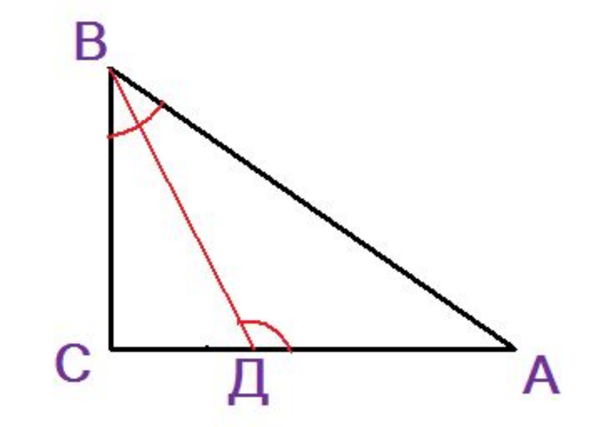
Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, arctg\,3 + \pi к, n, к \in Z$

Содержание

6

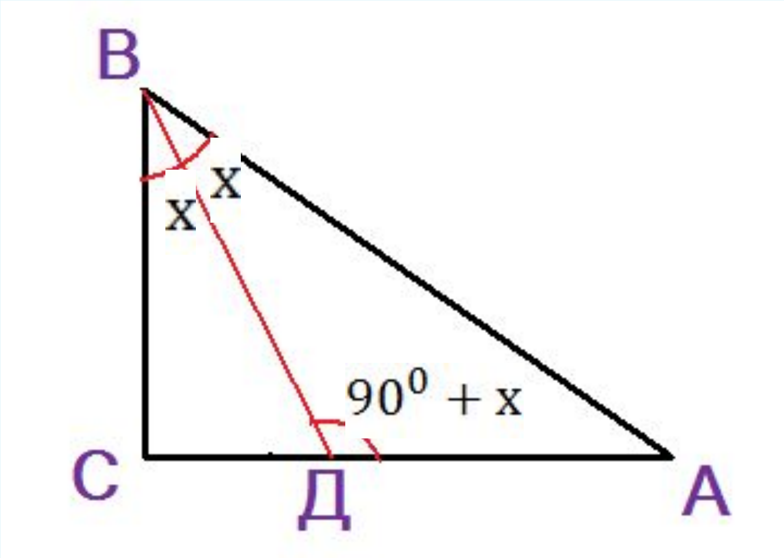
РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в шесть раз короче гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.



Содержание

Решение задачи



ДАНО: треугольник АВС
угол С –прямой
ВД- биссектриса

$$\frac{AB}{ВД} = 6$$

НАЙТИ: $\angle ABC$, $\angle BAC$

РЕШЕНИЕ: Пусть $\angle ABC = 2x$

Применив теорему синусов к треугольнику АВД, найдем, что

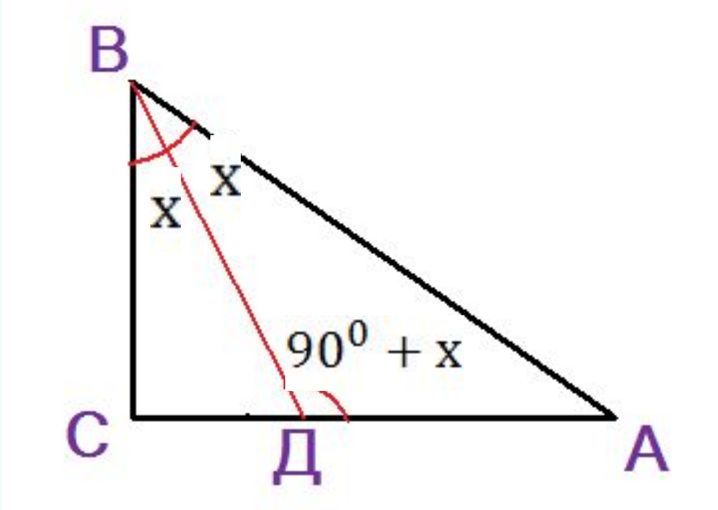
$$\frac{AB}{ВД} = \frac{\sin \angle АДВ}{\sin \angle ВАД} = \frac{\sin(90^0 + x)}{\sin(90^0 - 2x)} \Rightarrow \frac{AB}{ВД} = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

Учитывая условия задачи, получаем: $\frac{\cos x}{\cos 2x} = 6$

6

Задача продолжение

Решение геометрической задачи



Решение задачи сводится к решению тригонометрического уравнения

$$6\cos 2x - \cos x = 0$$

$$12\cos^2 x - \cos x - 6 = 0$$

Решаем квадратное уравнение относительно $\cos x$,получаем

$$\cos x = 0{,}75$$

$\cos x > 0$, так как $x < 90^0$

$$x = \arccos 0{,}75$$

$$2x = 2\arccos 0{,}75$$

$$\angle ABC = 2\arccos 0{,}75$$

$$\angle BAC = 90^0 - 2\arccos 0{,}75$$

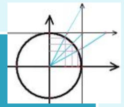
ОТВЕТ: $2\arccos 0{,}75;\ 90^0 - 2\arccos 0{,}75$

Содержание

7

Уравнения, приводимые к алгебраическим

Задания для самостоятельной работы



Вариант № 1	Вариант № 2
1) $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$	1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$
2) $\cos 2x + 3\sin x = 2$	2) $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 1\frac{9}{16}$
3) $2\cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$	3) $2tgx - 2ctgx = 3$
4) $ctgx - \sqrt{3}\, tgx + 1 = \sqrt{3}$	4) $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25$
5) $1 + \cos x = ctg\frac{x}{2}$	5) $2\cos 2x - 4\cos x = 1$

Содержание

8

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ФОРМУЛ

1. Нахождение тригонометрических функций по единичной окружности
2. Основные тригонометрические тождества
3. Формулы двойного аргумента
4. Формулы сложения
5. Формулы преобразования суммы в произведение
6. Формулы преобразования произведения в сумму

Содержание

ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

3

Задания на повторение

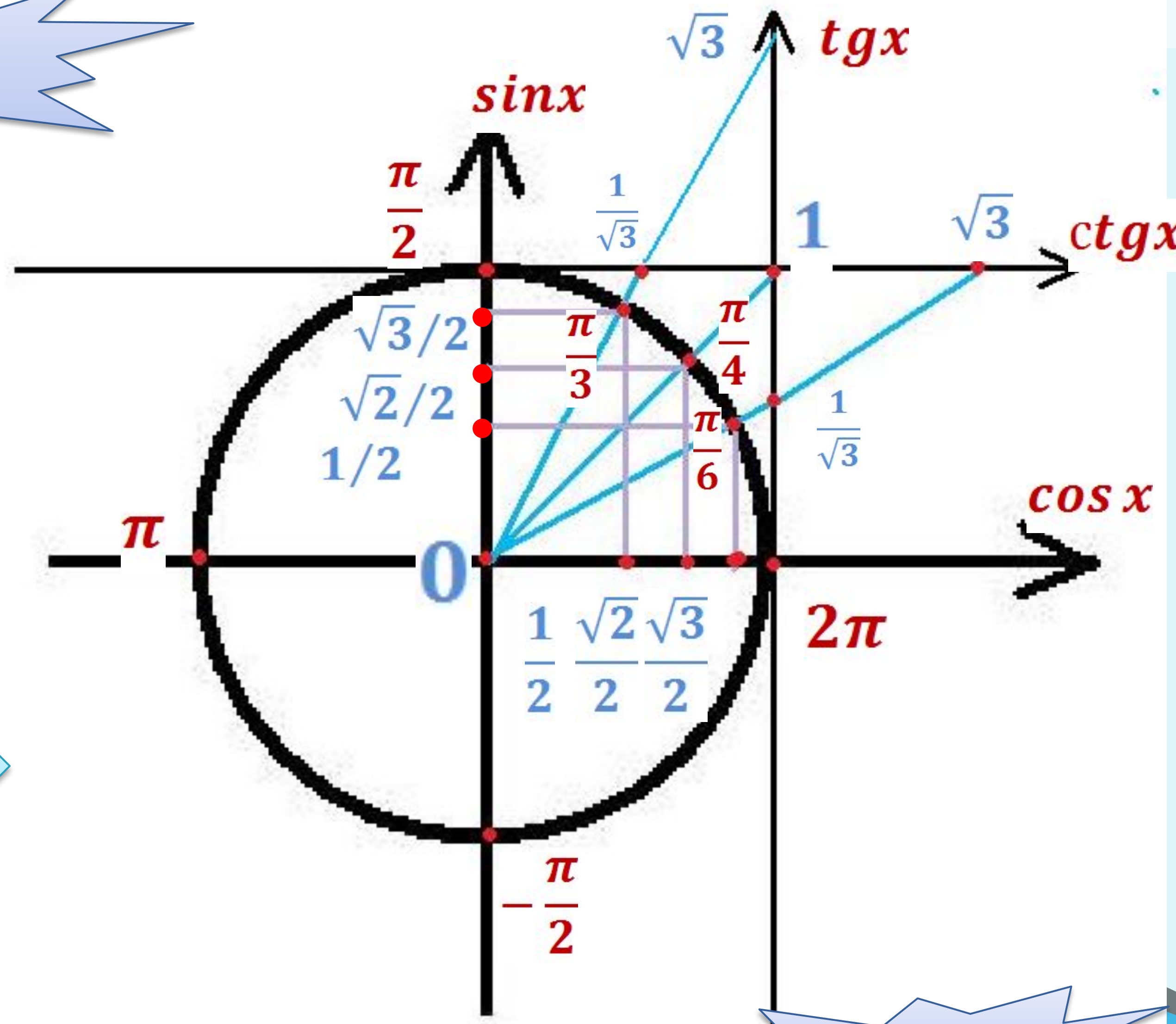
ПР №1

ПР №2

ПР №3

ПР №4

Задания с.р



Содержание

8

Краткий справочник формул

2. Основные тригонометрические тождества		3.Формулы двойного аргумента	
1	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	7	$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
2	$tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	8	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3	$ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	9	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
4	$tgx\, ctgx = 1$	10	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
5	$1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	11	$tg2x = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x}$
6	$1 + ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	12	$ctg2x = \dfrac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}$

4. Формулы сложения

1	$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
2	$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
3	$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
4	$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
5	$tg(x+y) = \dfrac{tgx + tgy}{1 - tgxtgy}$
6	$tg(x-y) = \dfrac{tgx - tgy}{1 + tgxtgy}$
7	$ctg(x+y) = \dfrac{ctgxctgy - 1}{ctgx + ctgy}$
8	$ctg(x-y) = \dfrac{ctgxctgy + 1}{ctgx - ctgy}$

8

Краткий справочник формул

5. Формулы преобразования суммы в произведение	
1	$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
2	$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$
3	$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
4	$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

6. Формулы преобразования произведения в сумму	
1	$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$
2	$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$
3	$\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$