

*«Каждая решенная мною задача становится образом, который служит впоследствии для решения других задач» Р. Декарт*

***РЕШЕНИЕ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ, ПРИВОДИМЫХ  
К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ***

# СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 

2. Повторение


□ *Простейшие тригонометрические уравнения* 

□ *Частные случаи* 

□ *Задания для на повторение* 

4. Уравнения, приводимых к алгебраическим 

5. Примеры решения уравнений 

6. Использование тр.ур. при решении  
геометрических задач 

7.Задания для самостоятельной работы 

8.Краткий справочник формул



# ВВЕДЕНИЕ



Тригонометрические функции возникли в **Древней Греции** в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Отношения сторон в прямоугольном треугольнике, которые по существу и есть тригонометрические функции, встречаются уже в **III в. до н.э.** в работах **Евклида**, **Архимеда** и других.

Современную форму тригонометрическим функциям и вообще тригонометрии придал **Леонард Эйлер**. Ему принадлежат определения тригонометрических функций и принятая в наши дни символика.

# ВВЕДЕНИЕ



**ТРИГОНОМЕТРИЯ** - математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ**, с помощью которых связываются элементы треугольника, изучаются в курсе математического анализа.

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ** – это уравнения, в которых неизвестные являются аргументами тригонометрических функций.

# РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$$\cos x = a$$

Если  $|a| > 1$  уравнение не имеет решения.

Если  $|a| \leq 1$   $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = a$$

Если  $|a| > 1$  уравнение не имеет решения.

Если  $|a| \leq 1$   $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$a \in (-\infty, +\infty)$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

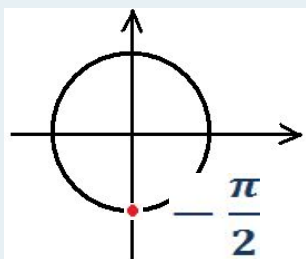
$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

# РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## Частные случаи

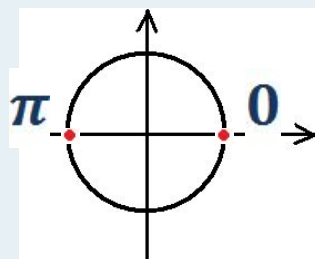
$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



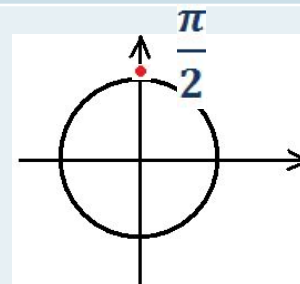
$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



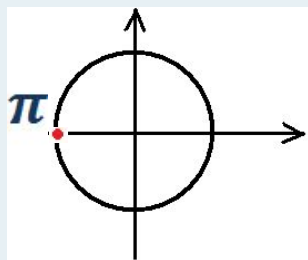
$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



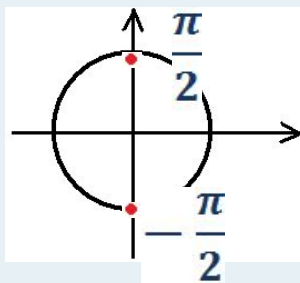
$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



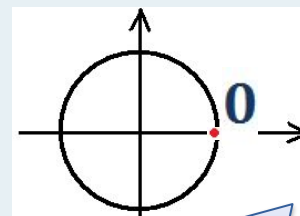
$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



# ЗАДАНИЯ НА ПОВТОРЕНИЕ

2

1. Решите уравнение:

$$2 \cos x = \frac{\sqrt{8}}{2}$$

1)  $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$

2)  $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$

3)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$

4)  $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$

2. Решите уравнение:

$$\sin(3x) = 0$$

1)  $\frac{2\pi n}{3}$

2)  $\frac{\pi n}{3}$

3)  $\pi n$

4)  $\pm \frac{\pi n}{3}$

3. Укажите наименьший положительный корень уравнения

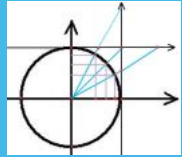
$$\sin \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg}(-x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

1)  $\frac{\pi}{3}$

2)  $\frac{5\pi}{4}$

3)  $\frac{\pi}{6}$

4)  $\frac{\pi}{2}$



## УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

С помощью замены переменной можно привести тригонометрическое уравнение к алгебраическому. Рассмотрим несколько типов уравнений:

Тип уравнения	Замена	Алгебраическое уравнение	
$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$at^2 + bt + c = 0$	ПП №1
$a \sin^2 x + b \cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$at^2 - bt - (a + c) = 0$	ПП №2
$a \cos 2x + b \cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$2at^2 + bt + c - a = 0$	ПП №3
$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$	$t = \operatorname{tg} x$	$at^2 + ct + b = 0$	ПП №4



**Пример 1**

$$\cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0$$

Сделаем замену переменной

$$t = \cos x$$

$$|t| \leq 1$$

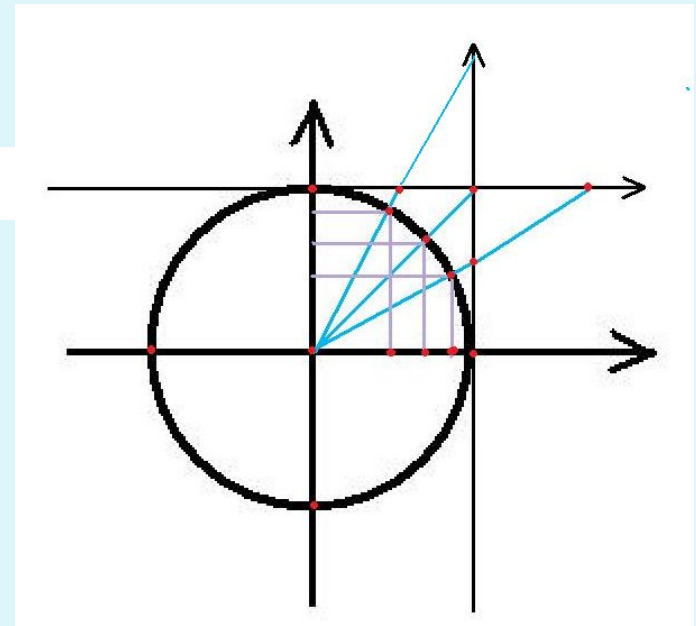
$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$\text{Получаем: } t = -5, \quad t = 1$$

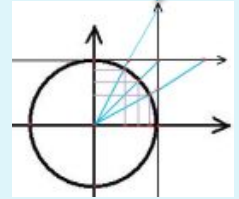
Делаем обратную замену

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Ответ:  $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

**Пример 2**

$$\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$$

Применим основное тригонометрическое тождество

$$\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Сделаем замену переменной

$$t = \cos x \quad \sqrt{2} - \sqrt{2}t^2 + t = 0$$

Получаем:  $t = \sqrt{2}$  ,  $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|t| \leq 1$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

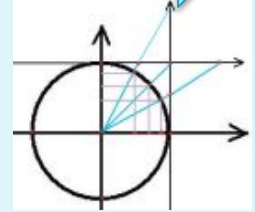
$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

**Пример 3**

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

Теория



$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$$

Сделаем замену переменной  $t = \cos x$ 

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

Получаем:  $t = -1$      $t = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

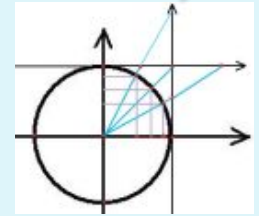
$$|t| \leq 1$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

**Ответ:**  $\pi + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$

Содержание



**Пример 4**

$$tgx + 3ctgx = 4$$

$$tgx + \frac{3}{tgx} = 4$$

Сделаем замену переменной

$$t = tgx$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

Получаем:  $t = 3$ ,  $t = 1$

$$tgx = 3$$

$$x = arctg 3 + \pi k, k \in Z$$



$$tgx = 1$$

$$x = arctg 1 + \pi n, n \in Z$$

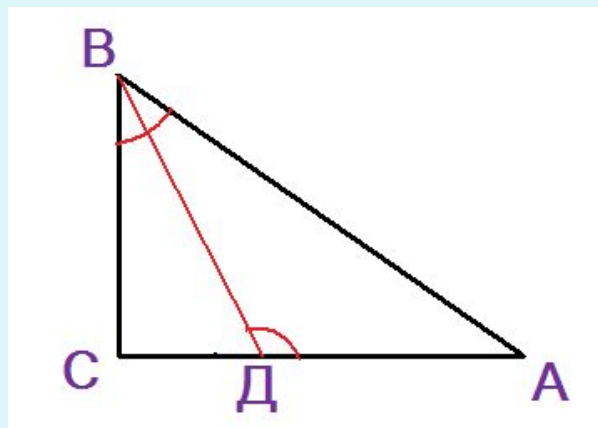
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

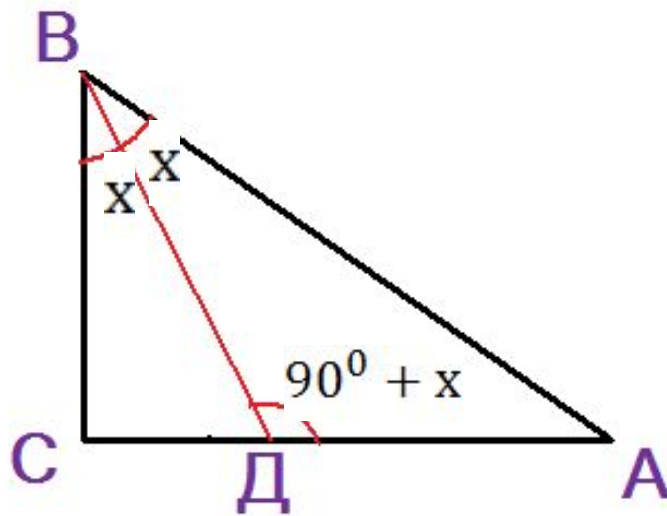
$$tgx = 1/ctgx$$

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi n, arctg 3 + \pi k, n, k \in Z$

# РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в шесть раз короче гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.





**ДАНО:** треугольник ABC  
 угол C – прямой  
 ВД- биссектриса

$$\frac{AB}{BD} = 6$$

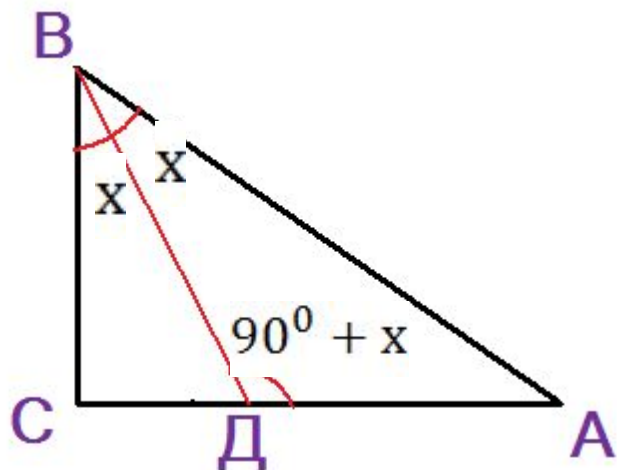
**НАЙТИ:**  $\angle ABC$  ,  $\angle BAC$

**РЕШЕНИЕ:** Пусть  $\angle ABC = 2x$

Применив теорему синусов к треугольнику ABD, найдем, что

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle BAD} = \frac{\sin(90^\circ + x)}{\sin(90^\circ - 2x)} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

Учитывая условия задачи, получаем:  $\frac{\cos x}{\cos 2x} = 6$



Решение задачи сводится к решению тригонометрического уравнения

$$6 \cos 2x - \cos x = 0$$

$$12 \cos^2 x - \cos x - 6 = 0$$

Решаем квадратное уравнение относительно  $\cos x$ , получаем

$$\cos x = 0,75$$

$$x = \arccos 0,75$$

$$2x = 2 \arccos 0,75$$

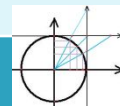
$$\angle ABC = 2 \arccos 0,75$$

$$\angle BAC = 90^\circ - 2 \arccos 0,75$$

**ОТВЕТ:**  $2 \arccos 0,75$ ;  $90^\circ - 2 \arccos 0,75$

$\cos x > 0$ , так как  $x < 90^\circ$

## Задания для самостоятельной работы



Вариант № 1	Вариант № 2
1) $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$	1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$
2) $\cos 2x + 3\sin x = 2$	2) $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 1\frac{9}{16}$
3) $2\cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$	3) $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$
4) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = \sqrt{3}$	4) $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25$
5) $1 + \cos x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$	5) $2\cos 2x - 4\cos x = 1$





# КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ФОРМУЛ

1. Нахождение тригонометрических функций по единичной окружности ➤
2. Основные тригонометрические тождества ➤
3. Формулы двойного аргумента ➤
4. Формулы сложения ➤
5. Формулы преобразования суммы в произведение ➤
6. Формулы преобразования произведения в сумму ➤



## 2. Основные тригонометрические тождества

## 3. Формулы двойного аргумента



1	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	7	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
2	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	8	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3	$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$	9	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
4	$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$	10	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
5	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	11	$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
6	$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	12	$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$

## 4. Формулы сложения



$$1 \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$2 \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$3 \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$4 \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$5 \quad \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tgy}}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tgy}}$$

$$6 \quad \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tgy}}{1 + \operatorname{tg}x \operatorname{tgy}}$$

$$7 \quad \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctgy} - 1}{\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctgy}}$$

$$8 \quad \operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg}x \operatorname{ctgy} + 1}{\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctgy}}$$



## 5. Формулы преобразования суммы в произведение

$$1 \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \quad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$3 \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$4 \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

## 6. Формулы преобразования произведения в сумму

$$1 \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$2 \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$3 \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$