Ряды

Лекция 3: Функциональные и степенные ряды

- Определение функциональных рядов
- Равномерная сходимость рядов
- Свойства функциональных рядов
- Определение степенного ряда, интервала его сходимости
- Методы нахождения радиуса сходимости

2.1. Определение функционального ряда. Область сходимости функционального ряда

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

члены которого есть функции от x, называется ***функциональным рядом***.

Придавая x определенные числовые значения, получаем различные числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться.

Область сходимости функционального ряда — это совокупность значений x, при которых функции

$$u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots$$

определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ — сходится.

Областью сходимости чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси OX.

Каждому значению из области сходимости соответствует определенное значение величины

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x).$$

$S(x)$ называется ***суммой функционального ряда***.

Представим $S(x)$ в виде

$$S(x)=S_n(x)+R_n(x),$$

где $S_n(x)=u_1(x)+\ldots+u_n(x)$, $R_n(x)=u_{n+1}(x)+\ldots$.

$R_n(x)$ называется ***остатком функционального ряда***.

Пример. Исследовать сходимость ряда
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n$ в точках $x=1$, $x=3$.

Решение

Пусть $x=1$. Получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$. По признаку Даламбера данный ряд расходится.

Пусть $x=3$. Получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{13}\right)^n$. По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}.$$

Решение

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x+2)^n}{(n+1)(x+2)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)|x+2|} = \frac{1}{|x+2|} < 1 \Rightarrow |x+2| > 1.$$

Решим неравенство $|x+2|>1$. Получим $x \in (-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$.

Исследуем точки: $x=-1$, $x=-3$.

Пусть $x=-1$. Получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Данный ряд расходится.

Пусть $x=-3$. Получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

По признаку Лейбница данный ряд сходится.

Таким образом, область сходимости данного по условию ряда

$$(-\infty;-3]\cup(-1;+\infty).$$

Пример. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!(2n-1)}.$$

Решение

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}n!(2n-1)}{(n+1)!(2n+1)x^{2n-1}}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{(n+1)(2n+1)} = 0 < 1 .$$

Поэтому область сходимости $(-\infty;+\infty)$.

2.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Сходящийся функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется ***равномерно сходящимся*** в некоторой области X, если для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n \geq N$

$$|R_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X.$$

При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X, где $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — непрерывные функции, есть непрерывная функция.

Признаки равномерной сходимости рядов

1. Признак Вейерштрасса

Если функции $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$, причем числовой ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n + ...$$

сходится, то функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

в этой области сходится равномерно.

2. Признак Абеля

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = a_1(x)b_1(x) + a_2(x)b_2(x) + \ldots + a_n(x)b_n(x) + \ldots \qquad (2.1)$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно в области D, а функции $a_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность и в совокупности (при любых x, n) ограничены:

$$|a_n(x)| \le K.$$

Тогда ряд (2.1) сходится равномерно в области D.

3. Признак Дирихле

Пусть частичные суммы $B_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ в совокупности (при любом x, n) ограничены:

$$|B_n(x)| \le M,$$

а функции $a_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность, которая сходится к 0 равномерно в области D. Тогда и ряд (2.1) сходится равномерно в этой области.

Пример. С помощью признака Вейерштрасса показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^n nx$$

сходится равномерно на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Решение

Так как

$$\left| \frac{1}{n^2} \sin^n nx \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данный по условию ряд сходится равномерно при любых значениях x.

Мажорируемые ряды

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.2}$$

называется ***мажорируемым*** в некоторой области изменения x, если существует такой сходящийся числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.3}$$

с положительными членами, что для всех значений x из данной области выполняются соотношения

$$|u_1(x)| \le a_1,\ |u_2(x)| \le a_2,\ \ldots,\ |u_n(x)| \le a_n.$$

Говорят, что ряд (2.2) мажорируется рядом (2.3), или ряд (2.3) служит мажорантным для ряда (2.2).

Теорема. Сумма ряда непрерывных функций, мажорируемого на некотором отрезке $[a,b]$, есть функция непрерывная на этом отрезке.

2.3. Свойства функциональных рядов

Теорема 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$... — непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots$$

сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx$, $[a,b] \in X$.

Теорема 2. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области непрерывные производные $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, ..., $u_n'(x)$,.... Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}'.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n\left(x+1\right)^n}$.

Ответ. $x\in\left(-\infty;-3\right]\cup\left(1;\infty\right)$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}5^n x^n$.

Ответ. $x\in\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Ответ. $x \in [-1, 1)$.

4. Проверить, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ равномерно сходится на всей числовой прямой.

3. Степенные ряды

3.1. Определение степенного ряда. Теорема Абеля

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... ; \tag{3.1}$$

или вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ... , \tag{3.2}$$

где $x_0, a_0, a_1, a_2, ...$ — действительные числа.

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд (3.1) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| < |x_0|.$$

2. Если ряд (3.1) расходится при некотором значении x_0', то он расходится при всяком x, для которого

$$|x| > |x_0'|.$$

Доказательство

1. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n x_0{}^n = 0$. Следовательно, $\exists\, M > 0$ такое, что все члены ряда по абсолютной величине меньше M, то есть

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M .$$

Перепишем равенство (3.1) в виде

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0{}^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0{}^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \qquad (3.3)$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|a_0|+|a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right|+|a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots \qquad (3.4)$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots \qquad (3.5)$$

При $|x|<|x_0|$ ряд (3.5) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$ и, следовательно, сходится.

Так как члены ряда (3.4) меньше соответствующих членов ряда (3.5), то ряд (3.4) сходится. Значит ряд (3.3) или (3.1) сходится (сходится абсолютно).

2. Если бы в какой-то точке x, удовлетворяющей условию $|x| > |x_0'|$, ряд сходился, то в силу (1) он должен был бы сходиться и в точке x_0', так как $|x_0'| < |x|$. Но это противоречит условию, что в точке x_0' ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке x.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда.

Если x_0 — точка сходимости, то весь интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ заполнен точками абсолютной сходимости.

Обозначим $|x_0| = R$ — ***радиус сходимости***, $(-R; R)$ — ***интервал сходимости*** степенного ряда.

1. Пусть $R > 0$. Если $|x| < R$, то при всех x ряд сходится абсолютно. Если $|x| > R$, то при всех x ряд расходится.

2. Пусть $R = 0$. Ряд сходится только в точке 0 (или x_0).

3. Пусть $R = \infty$. Ряд сходится на всей числовой оси OX.

На концах интервала вопрос о сходимости (расходимости) решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots , \qquad (3.2)$$

Определим область сходимости ряда (3.2).
Пусть $x - x_0 = X$, тогда

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots$$

$|X| < R$ — интервал сходимости ряда (3.2). Получим

$$|x - x_0| < R,$$

$$x_0 - R < x < x_0 + R.$$

Точки $x = x_0 \pm R$ исследуются на сходимость отдельно.

3.2. Методы нахождения интервала сходимости степенного ряда

1. Если $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, то есть ряд содержит все целые положительные степени разности $x - x_0$, то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

при условии, что этот предел существует (конечный или бесконечный).

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n \frac{1}{n^2}.$$

Решение

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Найдем радиус сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Решим неравенство $|x-2| < 1.$ Получим интервал $1 < x < 3.$

Исследуем отдельно точки $x=1,\ x=3$.

Пусть $x=1$. Получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x=3$. Получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

который сходится (по интегральному признаку Коши).

Таким образом, данный по условию ряд сходится в области $1\le x\le 3$.

2. Если исходный ряд имеет вид

$$a_0 + a_1(x - x_0)^p + a_2(x - x_0)^{2p} + \ldots + a_n(x - x_0)^{np} + \ldots$$

(p — некоторое определенное целое положительное число 2,3...), то

$$R = \sqrt[p]{\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}.$$

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю, и последовательность оставшихся в ряду показателей степеней разности $x - x_0$ любая (то есть не образует арифметическую прогрессию), то радиус сходимости равен

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}, \ a_n \neq 0.$$

4. Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1.$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n}.$$

Решение

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1} \cdot 5^n \cdot n}{(n+1)\cdot 5^{n+1} \cdot (x+1)^n}\right| = \frac{1}{5}|x+1| < 1.$$

Решим неравенство $|x+1| < 5$. Получим $-6 < x < 4$.

Исследуем отдельно точки $x=-6,\ x=4$.

Пусть $x=-6$. Получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x=4$. Получим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

который расходится.

Таким образом, данный по условию ряд сходится в области $-6 \le x < 4$.