Ряды.
Сходимость рядов.

- Рассмотрим некоторую последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.
- Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

- Положительным числовым рядом называется выражение вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} + \cdots + \boldsymbol{a_n} + \cdots$$

здесь

$\sum -$ математический значок суммы,

a_n – общий член ряда,

n – «счетчик», $\boldsymbol{n \epsilon N}$ или $n = 0$.

ПРИМЕР 1

Записать первые три члена ряда
$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2$ - 1).

Решение:

При n=1, $a_1 = 1^2 - 1 = 0$;
при n=2, $a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$;
при n=3, $a_3 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$;

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2$ - 1)=0+3+8+….

- **Частичной суммой ряда** называется выражение вида:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \text{, где k } - \text{ конечное натуральное число.}$$

ПРИМЕР 2

Из примера 1 найдем:

$S_1 = a_1 = 0;$

$S_2 = a_1 + a_2 = 0 + 3 = 3;$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 3 + 8 = 11.$

- Числовой ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

здесь S – сумма ряда.

ПРИМЕР 3

Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots .$$

Сумма членов бесконечно убывающей прогрессии находится по формуле $S = \frac{A}{1-q}$, где A – первый член прогрессии, q- основание прогрессии. В нашем случае A =1, $q = \frac{1}{4}$, тогда

$$S = \frac{4}{3}.$$

Получено конечное число, значит, исходный ряд – сходящийся.

- Числовой ряд называется **расходящимся**, если предел частичных сумм равен бесконечности или не существует:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty.$$

ПРИМЕР 4

Рассмотрим числовой ряд из примера 1:
$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)$.
Очевидно, что каждый следующий ряд больше чем предыдущий, поэтому
0+3+8+…=∞.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Ряд расходится.

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ

- **Если общий член ряда <u>не стремится к нулю</u>, то ряд расходится**, т.е.:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

ПРИМЕР 5

Докажем, что ряд из примера 1 - расходящийся:
$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)$.

Решение:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n^2 - 1) = \infty$
т.е. ряд является расходящимся.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)$ – расходящийся.

ПРИМЕР 6

Исследовать на сходимость:
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n+2}$.

Решение:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n+2} = 0$
т.е. ряд сходится.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n+2}$ – сходящийся.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд.
- Гармонический ряд является **расходящимся**!
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ - обобщенный гармонический ряд.
- Обобщенный гармонический ряд расходится при $a \leq 1$.

ПРИМЕР 7

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — расходящиеся ряды.

- Обобщенный гармонический ряд сходится при $a > 1$.

ПРИМЕР 8

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ — сходящиеся ряды.

1. ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. **Если известно**, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – **сходится**, и выполнено неравенство $a_n \leq b_n$ (для n=1,2,3…), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **тоже сходится**.
- Т.е., из **сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами**.

ПРИМЕР 9

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$.

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится. Справедливо неравенство $\frac{1}{n^2+n+2} \leq \frac{1}{n^2}$ при любом натуральном n. Следовательно, исходный ряд – сходится.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$.– сходящийся.

ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. **Если известно**, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – **расходится**, и выполнено неравенство $a_n \geq b_n$ (для n=1,2,3…), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **тоже расходится**.
- Т.е., из **расходимости ряда с меньшими членами следует сходимость ряда с большими членами**.

ПРИМЕР 10

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится. Справедливо неравенство $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ при любом натуральном n. Следовательно, исходный ряд расходится вместе с гармоническим радом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$– расходящийся.

2.ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общих членов этих рядов равен конечному, отличному от нуля числу A, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mathbf{A}$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

ПРИМЕР 11

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$

Решение:

Известно, что обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Следовательно, исходный ряд сходится вместе с гармоническим радом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ – сходящийся.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Предельный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:

- 1) В знаменателе находится многочлен.
- 2) Многочлены находятся и в числителе и в знаменателе.
- 3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

- Рассмотрим **положительный числовой ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то:

  1) при $D < 1$ ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при .

  2) при $D > 1$ ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при .

  3) при $D = 1$ **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак.

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

Признак Даламбера применяется тогда, когда:

- 1) В общий член ряда входит любое число в степени, например, 2^n, 3^n, 7^n и так далее .
- 2) В общий член ряда входит факториал.
- 3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например:

$$1 \cdot 5 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 5n \cdot \dots .$$

ПРИМЕР 12

Исследователь ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$.

Решение:

$$a_n = \frac{n^2+n-1}{4^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}} = \frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n(n^2+3n+1)}{4^{n+1}(n^2+n-1)} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right) =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}}\right) = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} < 1.$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$ - сходится.

ПРИМЕР 13

Исследователь ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$.

Решение:

$$a_n=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}},\ a_{n+1}=\frac{2^{(n+1)+1}}{\sqrt{3(n+1)+5}}=\frac{2^{n+2}}{\sqrt{3n+8}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+2}}{\sqrt{3n+8}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}\sqrt{3n+5}}{2^{n+1}\sqrt{3n+8}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+8}}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n+5}{3n+8}}=\frac{\infty}{\infty}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{8}{n}}}=2\cdot 1=2>1.$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$- расходится.

ПРИМЕР 14

Исследователь ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Решение:

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n\cdot (n+1)} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 3\cdot 0 = 0 < 1.$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ - сходится.

2.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

- **Знакочередующимся рядом** называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

$$u_n > 0 \quad \forall n \in N$$

(то есть ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно)

Знакопеременные ряды

Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

1.абсолютные значения его членов представляют собой убывающую последовательность

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \cdots$$

;

2. предел последовательности модулей членов ряда равен нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимости

Знакопеременный
ряд

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n + \ldots \quad (1)$$

называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + |U_4| + \ldots + |U_n| + \ldots \quad (2)$$

Если же знакопеременный ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то данный знакопеременный ряд (1) называется **условно**
или **неабсолютно сходящимся** рядом.

Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$

на абсолютную и условную сходимость.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$ - знакочередующийся числовой ряд.

Воспользуемся признаком Лейбница

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1} = 0$$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \ldots$, то есть члены ряда монотонно убывают по

абсолютной величине.

Следовательно, знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница