

Ряды.

Сходимость рядов.

o Рассмотрим некоторую последовательность неотрицательных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

o Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots.$$

o Положительным числовым рядом называется выражение вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

здесь

$\Sigma$  – математический значок суммы,

$a_n$  – общий член ряда,

$n$  – «счетчик»,  $n \in N$  или  $n = 0$ .



# ПРИМЕР 1

Записать первые три члена ряда  
 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)$ .

**Решение:**

$$\text{При } n=1, a_1 = 1^2 - 1 = 0;$$

$$\text{при } n=2, a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$\text{при } n=3, a_3 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8;$$

**Ответ:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1) = 0 + 3 + 8 + \dots$$

o Частичной суммой ряда называется выражение вида:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n, \text{ где } k \text{ — конечное натуральное число.}$$

## ПРИМЕР 2

Из примера 1 найдем:

$$S_1 = a_1 = 0;$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 0 + 3 = 3;$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 3 + 8 = 11.$$



- o Числовой ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

здесь  $S$  – сумма ряда.

### ПРИМЕР 3

Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Сумма членов бесконечно убывающей прогрессии находится по формуле  $S = \frac{A}{1-q}$ , где  $A$  – первый член прогрессии,  $q$  – основание прогрессии. В нашем случае  $A = 1$ ,  $q = \frac{1}{4}$ , тогда

$$S = \frac{4}{3}.$$

Получено конечное число, значит, исходный ряд – сходящийся.

o Числовой ряд называется **расходящимся**, если предел частичных сумм равен бесконечности или не существует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty.$$

#### ПРИМЕР 4

Рассмотрим числовой ряд из примера 1:  
 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)$ .

Очевидно, что каждый следующий ряд больше чем предыдущий, поэтому  
 $0+3+8+\dots=\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

Ряд расходится.



## НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ

- Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится, т.е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0.$$

### ПРИМЕР 5

Докажем, что ряд из примера 1 -  
расходящийся:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1).$$

**Решение:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 1) = \infty$$

т.е. ряд является расходящимся.

**Ответ:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) - \text{расходящийся.}$$

### ПРИМЕР 6

Исследовать на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n+2}.$$

**Решение:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+2} = 0$$

т.е. ряд сходится.

**Ответ:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n+2} - \text{сходящийся.}$$

## ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  - гармонический ряд.
- Гармонический ряд является **расходящимся!**
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  - обобщенный гармонический ряд.
- Обобщенный гармонический ряд расходится при  $a \leq 1$ .

### ПРИМЕР 7

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  — расходящиеся ряды.

- Обобщенный гармонический ряд сходится при  $a > 1$ .

### ПРИМЕР 8

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  — сходящиеся ряды.



## 1. ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Если известно, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  – сходится, и выполнено неравенство  $a_n \leq b_n$  (для  $n=1,2,3\dots$ ), то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  тоже сходится.
- Т.е., из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами.

### ПРИМЕР 9

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$ .

**Решение:**

Известно, что обобщенный гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  – сходится.

Справедливо неравенство  $\frac{1}{n^2+n+2} \leq \frac{1}{n^2}$  при любом натуральном  $n$ .  
Следовательно, исходный ряд – сходится.

**Ответ:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$  – сходящийся.

## ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

- Рассмотрим два положительных числовых ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Если известно, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  – расходится, и выполнено неравенство  $a_n \geq b_n$  (для  $n=1,2,3\dots$ ), то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  тоже расходится.
- Т.е., из расходимости ряда с меньшими членами следует сходимость ряда с большими членами.

### ПРИМЕР 10

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ .

**Решение:**

Известно, что обобщенный гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  – расходится. Справедливо неравенство  $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$  при любом натуральном  $n$ . Следовательно, исходный ряд расходится вместе с гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

**Ответ:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  – расходящийся.



## 2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

○ Рассмотрим два положительных числовых ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Если предел отношения общих членов этих рядов равен конечному, отличному от нуля числу  $A$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ , то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

### ПРИМЕР 11

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$

**Решение:**

Известно, что обобщенный гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  - сходится.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Следовательно, исходный ряд сходится вместе с гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Ответ:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$  - сходящийся.

## ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Пределный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:

- 0 1) В знаменателе находится многочлен.
- 0 2) Многочлены находятся и в числителе и в знаменателе.
- 0 3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.



## ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

○ Рассмотрим **положительный числовой ряд**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ , то:

- 1) при  $D < 1$  ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при .
- 2) при  $D > 1$  ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при .
- 3) при  $D = 1$  **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак.

## ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

Признак Даламбера применяется тогда, когда:

- o 1) В общий член ряда входит любое число в степени, например,  $2^n$ ,  $3^n$ ,  $7^n$  и так далее.
- o 2) В общий член ряда входит факториал.
- o 3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например:

$$1 \cdot 5 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 5n \cdot \dots$$



## ПРИМЕР 12

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$ .

**Решение:**

$$a_n = \frac{n^2+n-1}{4^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}} = \frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n(n^2+3n+1)}{4^{n+1}(n^2+n-1)} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1} \right) = \\ &= \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}} \right) = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} < 1. \end{aligned}$$

**Ответ:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$  - СХОДИТСЯ.

## ПРИМЕР 13

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$ .

**Решение:**

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}, a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)+1}}{\sqrt{3(n+1)+5}} = \frac{2^{n+2}}{\sqrt{3n+8}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{\sqrt{3n+8}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} \sqrt{3n+5}}{2^{n+1} \sqrt{3n+8}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+8}}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n+5}{3n+8}} = \frac{\infty}{\infty} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{8}{n}}} = 2 \cdot 1 = 2 > 1.$$

**Ответ:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$  расходится.



## ПРИМЕР 14

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

**Решение:**

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 3 \cdot 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

**Ответ:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$  - СХОДИТСЯ.

## 2.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

- Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

$$u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(то есть ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно)



# Знакопеременные ряды

## Признак Лейбница

Знакопередающийся ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

1. абсолютные значения его членов представляют собой убывающую последовательность

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \dots$$

2. предел последовательности модулей членов ряда равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

то ряд сходится.

## Абсолютная и условная сходимости

Знакопеременный  
ряд

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + |U_4| + \dots + |U_n| + \dots \quad (2)$$

Если же знакопеременный ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то данный знакопеременный ряд (1) называется **условно** или **неабсолютно сходящимся** рядом.



Исследовать числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$$

на абсолютную и условную сходимость.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$  - знакочередующийся числовой ряд.

Воспользуемся признаком Лейбница

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-1} = 0$$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \dots$ , то есть члены ряда монотонно убывают по

абсолютной величине.

Следовательно, знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница