

MATEMATIKA

11.11.2020

Иррациональные уравнения

Исследование уравнения $x + \sqrt{x(a - x)} = 1$.

1. Решение «в лоб».

1) Решите уравнение при $a = -5$.

2) Приведите уравнение к равносильному ему квадратному уравнению (с ограничением на x).

3) Надо ли проверять, что корни полученного квадратного уравнения лежат в ОДЗ исходного уравнения?

4) При каких значениях a корни полученного квадратного уравнения (без учета ограничения на x) вещественные?

5) Решите уравнение при тех значениях a , при которых корни квадратного уравнения совпадают.

6) Пусть x_+ и x_- – корни данного квадратного уравнения (индексы $+$ и $-$ соответствуют выбору знака перед радикалом). При каких значениях a корень $x_+ \leq 1$?

7) При каких значениях a корень $x_- \geq 1$?

8) Составьте таблицу, показывающую, сколько корней (и какие из них, то есть x_+ или x_-) имеет исходное уравнение при каждом значении a .

2. Параметр a как функция переменной x .

1) Выразите из уравнения a как функцию переменной x . Какова область определения этой функции?

2) Постройте график a как функции x . Найдите экстремумы функции. Найдите область значений функции a .

3) По графику функции a определите число корней исходного уравнения в зависимости от a .

4) Составьте таблицу, показывающую, сколько корней имеет исходное уравнение при каждом значении a .

5) Какие целые числа могут быть корнями исходного уравнения при каких-либо значениях a ?

6) При каких целых значениях a хотя бы один из корней исходного уравнения целый? Будет ли при этом второй корень также целым?

7) Как использовать полученные результаты для решения уравнения $\sqrt{x(a-x)} = 1+x$?

3. Поведение графика функции в зависимости от a .

1) Убедитесь в том, что график функции $y = \sqrt{x(a-x)}$ является полуокружностью. Укажите ее центр и радиус.

2) Постройте графики функции $y = \sqrt{x(a-x)}$ при $a = \frac{1}{2}, 1, 2, -2, -4$.

3) При каких значениях a прямая $y = 1 - x$ касается графика функции $y = \sqrt{x(a-x)}$? Найдите координаты точек касания.

4) По графику определите число корней исходного уравнения в зависимости от a .

5) Составьте таблицу, показывающую, сколько корней имеет исходное уравнение при каждом значении a .

6) Как использовать полученные результаты для решения уравнения $\sqrt{x(a-x)} = 1 + x$?



31

5

+



7

2

a+b

0

Первый уровень
Решите уравнения

1) $\sqrt{x} = 4$

2) $\sqrt{x} + 16 = 0$

3) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

4) $\sqrt{x^2 + x - 2} = 2$

5) $\sqrt{7x + 1} = 2\sqrt{x + 4}$

6) $\sqrt{x + 2} - \frac{2}{\sqrt{x + 2}} = 1$

7) $x^2 - 4x = 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} - 10$

8) Решите уравнение при любом a : $\sqrt{x - a} = 1 - x$

Уравнение вида	Решение	Проверка корней
1. $\sqrt{f(x)} = a$	$f(x) = a^2$	$f(x) \geq 0$
2. $\sqrt{f(x)} = g(x)$	$f(x) = g^2(x)$	$f(x) \geq 0$
3. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$f(x) = g(x)$	$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$
4. $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = a$	$f(x) \cdot g(x) = a^2$	$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$
5. $\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}} = a$	$\frac{f(x)}{g(x)} = a^2$	$f(x) \geq 0, g(x) > 0$
6. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a$	$f(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} + g(x) = a^2$ $2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = a^2 - f(x) - g(x)$ дальше, как в п. 2	$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$
7. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} =$ $= \sqrt{h(x)}$	$f(x) + 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} + g(x) = h(x)$ $2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x) - f(x) - g(x)$ дальше, как в п. 2	$f(x) \geq 0$ $g(x) \geq 0$ $h(x) \geq 0$



Второй уровень
Решите уравнения

1) $\sqrt{x+1} = 3$

2) $\sqrt{2x+3} = x$

3) $\sqrt{-4x^2 - 16} = 2$

4) $x + 1 = \sqrt{8 - 4x}$

5) $\sqrt{2x} + \sqrt{x-3} = -1$

6) $\sqrt{x+17} - \sqrt{x+1} = 2$

7) $\sqrt{1-2x} - \sqrt{13+x} = \sqrt{x+4}$

8) $\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x+4} = \sqrt{6}$

9) $\sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 3$

10) $\sqrt{\sqrt{x+13}} = \sqrt{17 - 3\sqrt{x}}$



Домашнее задание

1. Работа с теорией – по материалам п.9 и записям в тетради;
2. №154-160