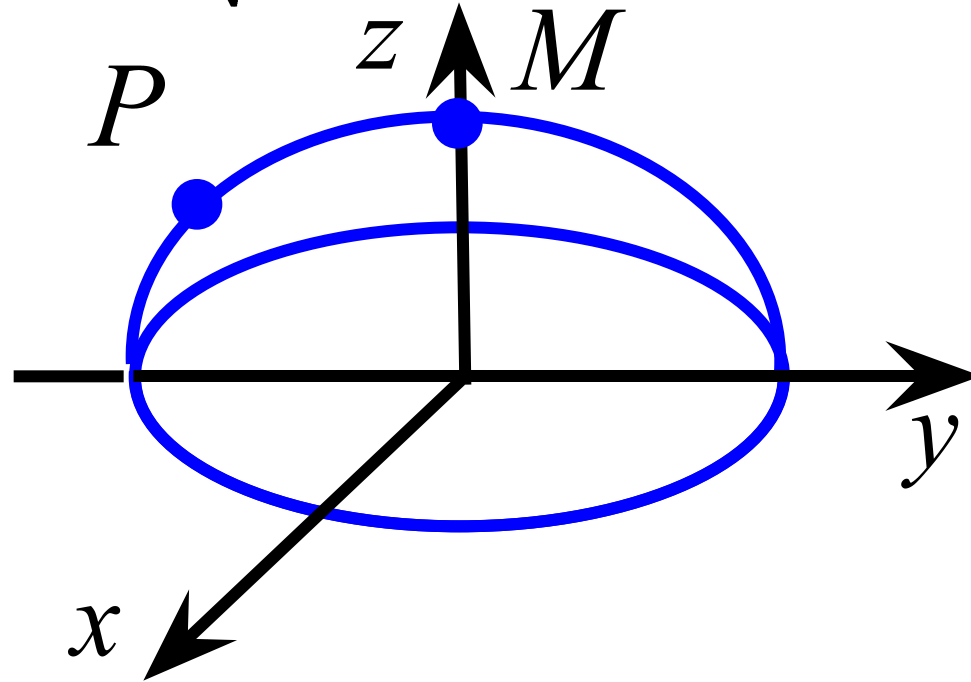


Лектор: ОРЛИК ЛЮБОВЬ КОНСТАНТИНОВНА

Тема:

Экстремум функции двух переменных

Пример 1. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ - полусфера

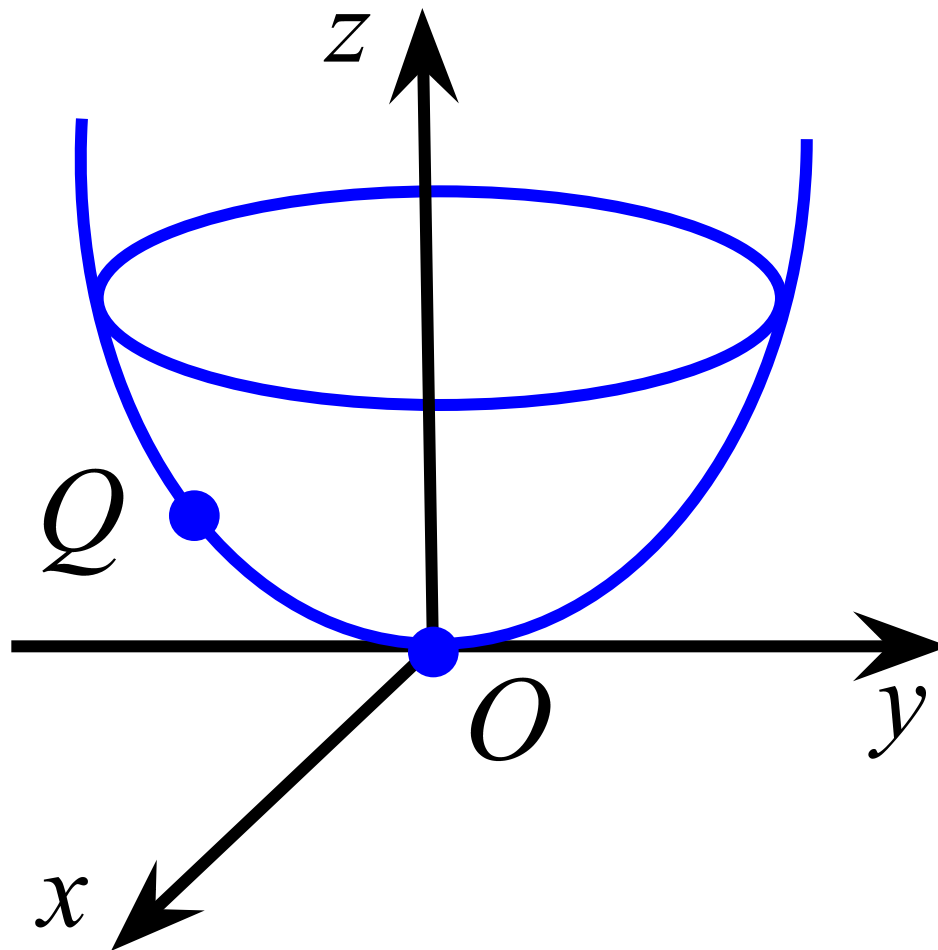


В точке M - максимум, т.к. в окрестности этой точки значения функции z меньше, чем в точке M :

$$z(P) < z(M).$$

Пример 2.

$z = x^2 + y^2$ - параболоид



В точке $O(0,0)$ - минимум, т.к. в окрестности этой точки значения функции z больше, чем в точке O :

$$z(Q) > z(O).$$

Также, как и в случае функции одной переменной для нахождения экстремума находят критические точки.

Это точки, в которых z'_x и z'_y равны нулю. Таким образом, обращение в нуль в точке частных производных является необходимым условием существования с этой точке экстремума.

**Следовательно, точки экстремума
следует искать среди критических точек.**

**Однако существуют критические точки,
не являющиеся точками экстремума.**

**Поэтому рассмотрим достаточные
условия существования экстремума.**

Пусть P_0 - критическая точка.

Находим

$$A = z''_{xx}(P_0), \quad B = z''_{xy}(P_0), \quad C = z''_{yy}(P_0).$$

Составим определитель

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Возможны случаи:

I	$D > 0$	$A > 0$ min
		$A < 0$ max
II	$D < 0$	Экстремума нет
III	$D = 0$	Требуется дополнительное исследование

Пример. Найти экстремумы функции

$$z = x^3 + y^3 - 6xy.$$

1) Находим z'_x и z'_y :

$$z'_x = 3x^2 - 6y, \quad z'_y = 3y^2 - 6x.$$

2) Составим систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 3y^2 - 6x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ y^2 - 2x = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2.$$

Подставим y во второе уравнение

$$y^2 - 2x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x^4}{4} - 2x = 0:$$

$$x^4 - 8x = 0, \quad x(x^3 - 8) = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2.$$

Получили две критические точки

$$P_1(0, 0) \text{ и } P_2(2, 2).$$

3) Находим z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} :

$$z''_{xx} = (3x^2 - 6y)'_x = 6x,$$

$$z''_{yy} = (3y^2 - 6x)'_y = 6y,$$

$$z''_{xy} = (3x^2 - 6y)'_y = -6.$$

4) Рассмотрим $P_1(0,0)$ и находим значения вторых производных в этой точке:

$$A = 6x \Big|_{x=0} = 0,$$

$$B = -6,$$

$$C = 6y \Big|_{y=0} = 0.$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-6)^2 = -36 < 0$$

Следовательно экстремума нет.

4) Рассмотрим $P_2(2, 2)$:

$$A = 6x \Big|_{x=2} = 12, \quad B = -6, \quad C = 6y \Big|_{y=2} = 12.$$

$$D = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 12 \cdot 12 - 6 \cdot 6 = 144 - 36 = 108 > 0.$$

В точке $P_2(2, 2)$ функция имеет экстремум, т.к. $D > 0$.

Чтобы выяснить, \max или \min в точке P_2 , смотрим на знак A или C .

$A > 0$ в точке $(2, 2)$ \min .

$$z(2, 2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 8 - 24 = -8.$$

Ответ: функция $z = x^3 + y^3 - 6xy$ имеет в точке $P_2(2, 2)$ минимум,

$$z_{\min} = -8.$$

Самостоятельная работа №2

1) Найти область определения функций

$$a) z = \sqrt{xy}, \quad b) z = \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}.$$

2) Найти частные производные первого и второго порядка

$$a) z = x^3 y^4, \quad b) z = x^2 + 3xy.$$

3) $z = x^3 \cdot \ln y$, где $y = 5 \sin x$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

Условный экстремум: метод множителей Лагранжа

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

- ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения, а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения, а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

Пример

идея: сведём уравнение ,
задающее функцию двух
переменных , к функции одной
переменной с помощью
уравнения связи (1)

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

Условные экстремумы

экстремумы функции не на
всей области определения, а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения, а
лишь на её подмножестве

сужение исходной функции -
также экстремумы называются
УСЛОВНЫМИ

функцию исследуем на
экстремум

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения , а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются
условными

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения, а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
УСЛОВНЫМИ

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ИСКЛЮЧИТЬ λ , *выразив из*
первых двух уравнений и
приравняв результаты;
ВЫРАЗИТЬ из первого
уравнения X , из второго $-Y$ и
подставить в третье уравнение
которое будет зависеть только
от λ

Составить достаточные
условия экстремума

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения , а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве
 $G \subset D(f) \subset R^2$
такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве
 $G \subset D(f) \subset R^2$
такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве
 $G \subset D(f) \subset R^2$
такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не в
всей области определения
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве
 $G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$
такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются

условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения ,а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$$

такие экстремумы называются
условными

ЗАДАЧА: определить
экстремумы функции не на
всей области определения , а
лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются
условными

