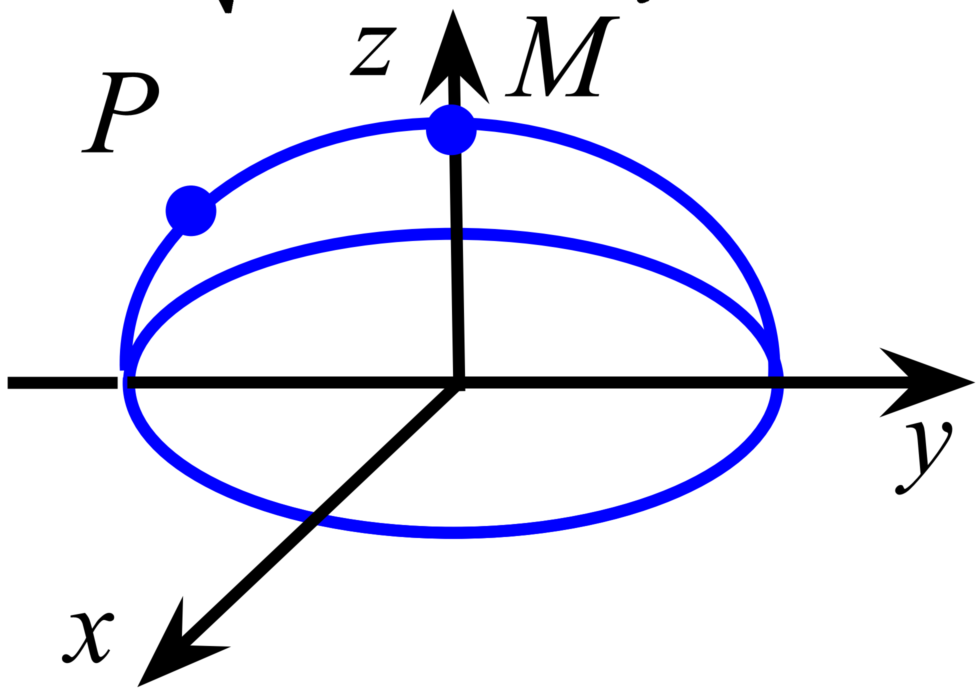
Лектор: ОРЛИК ЛЮБОВЬ КОНСТАНТИНОВНА

Тема:
Экстремум функции двух переменных

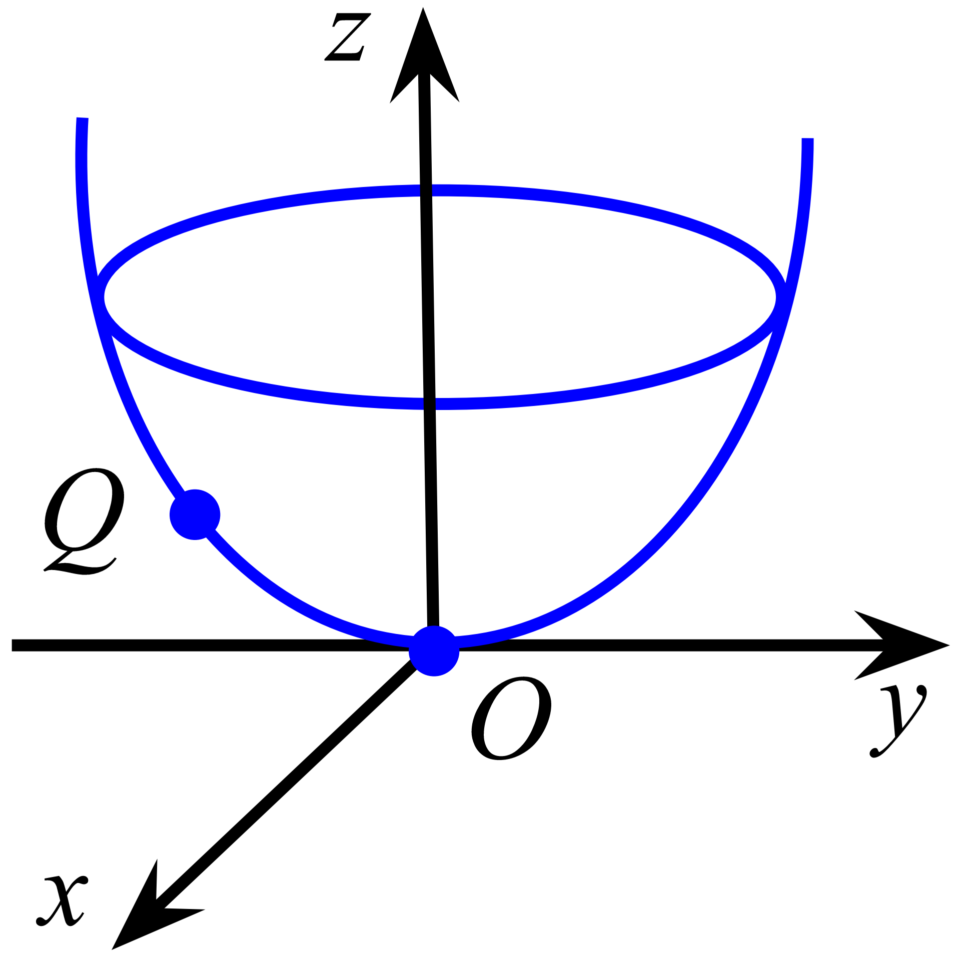
<u>Пример 1.</u> $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ - **полусфера**



В точке M **- максимум, т.к. в окрестности этой точки значения функции** z **меньше, чем в точке** M**:**

$$z(P) < z(M).$$

Пример 2. $z = x^2 + y^2$ **- параболоид**



В точке $O(0,0)$ - минимум, т.к. в окрестности этой точки значения функции z больше, чем в точке O:

$$z(Q) > z(O).$$

Также, как и в случае функции одной переменной для нахождения экстремума находят критические точки.

Это точки, в которых z'_x и z'_y равны нулю. Таким образом, обращение в нуль в точке частных производных является необходимым условием существования с этой точке экстремума.

Следовательно, точки экстремума следует искать среди критических точек.

Однако существуют критические точки, не являющиеся точками экстремума. Поэтому рассмотрим достаточные условия существования экстремума.

Пусть P_0 **- критическая точка.**

Находим

$$A = z''_{xx}(P_0), \quad B = z''_{xy}(P_0), \quad C = z''_{yy}(P_0).$$

Составим определитель

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Возможны случаи:

<table>
<tr><td rowspan="2">I</td><td rowspan="2">$D > 0$</td><td>$A > 0$</td><td>$\min$</td></tr>
<tr><td>$A < 0$</td><td>$\max$</td></tr>
<tr><td>II</td><td>$D < 0$</td><td colspan="2">Экстремума нет</td></tr>
<tr><td>III</td><td>$D = 0$</td><td colspan="2">Требуется дополнительное исследование</td></tr>
</table>

<u>Пример.</u> Найти экстремумы функции

$$z = x^3 + y^3 - 6xy.$$

1) Находим z'_x **и** z'_y **:**

$$z'_x = 3x^2 - 6y, \quad z'_y = 3y^2 - 6x.$$

2) Составим систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 3y^2 - 6x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ y^2 - 2x = 0. \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2.$$

Подставим y во второе уравнение

$$y^2 - 2x = 0 \quad \textbf{или} \quad \frac{x^4}{4} - 2x = 0:$$

$$x^4 - 8x = 0, \quad x(x^3 - 8) = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2.$$

Получили две критические точки

$P_1(0,0)$ **и** $P_2(2,2)$.

3) Находим $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$:

$$z''_{xx} = \left(3x^2 - 6y\right)'_x = 6x,$$

$$z''_{yy} = \left(3y^2 - 6x\right)'_y = 6y,$$

$$z''_{xy} = \left(3x^2 - 6y\right)'_y = -6.$$

4) Рассмотрим $P_1(0,0)$ и находим значения вторых производных в этой точке:

$$A = 6x\Big|_{x=0} = 0,$$

$$B = -6,$$

$$C = 6y\Big|_{y=0} = 0.$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-6)^2 = -36 < 0$$

Следовательно экстремума нет.

4) Рассмотрим $P_2(2,2)$ **:**

$$A = 6x\Big|_{x=2} = 12, \;\; B = -6, \; C = 6y\Big|_{y=2} = 12.$$

$$D = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 12 \cdot 12 - 6 \cdot 6 = 144 - 36 = 108 > 0.$$

В точке $P_2(2,2)$ **функция имеет экстремум, т.к.** $D > 0.$

Чтобы выяснить, max или min в точке P_2, смотрим на знак A или C.

$$A > 0 \Rightarrow \text{в точке } (2,2)\ P_2\ \min .$$

$$z(2,2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 8 - 24 = -8.$$

Ответ: функция $z = x^3 + y^3 - 6xy$ **имеет в точке** $P_2(2,2)$ **минимум,**

$$z_{\min} = -8.$$

Самостоятельная работа №2

1) Найти область определения функций

$$a)\ z = \sqrt{xy}, \quad b)\ z = \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}.$$

2) Найти частные производные первого и второго порядка

$$a)\ z = x^3 y^4, \qquad b)\ z = x^2 + 3xy.$$

3) $z = x^3 \cdot \ln y,$ **где** $y = 5\sin x.$

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **и** $\dfrac{dz}{dx}.$

Условный экстремум: метод множителей Лагранжа

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$G \subset D(f) \subset R^2$

такие экстремумы называются *условными*

- ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве $G \subset D(f) \subset R^2$
такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

Пример

идея: сведём уравнение , задающее функцию двух переменных ,к функции одной переменной с помощью уравнения связи (1)

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

определить

экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве $G \subset D(f) \subset R^2$ такие экстремумы называются *условными*

сужение исходной функции - функцию исследуем на экстремум

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$G \subset D(f) \subset R^2$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве $G \subset D(f) \subset R^2$

такие экстремумы называются *условными*

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве $G \subset D(f) \subset R^2$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

исключить λ,*выразив из первых двух уравнений и приравняв результаты;* ВЫРАЗИТЬ из первого уравнения X,из второго –Y и подставить в третье уравнение ,которое будет зависеть только от λ

Составить достаточные условия экстремума

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не н
всей области определения
лишь на её подмножеств

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называю
условными

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$G \subset D(f) \subset R^2$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*

ЗАДАЧА: определить экстремумы функции не на всей области определения ,а лишь на её подмножестве

$$G \subset D(f) \subset R^2$$

такие экстремумы называются *условными*