Теорема Тейлора

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, то для любого $x \in U_\delta(x_0)$ справедлива *формула Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ – *остаточный член в форме Лагранжа.*

Та же формула, но с *остаточным членом в форме Пеано* имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Эти формулы представляют функцию $f(x)$ в виде суммы многочлена n-ой степени и остаточного члена. Последний показывает возникающую ошибку от замены функции многочленом.

Семинар 18. "Формула Тейлора"

Формулы Маклорена

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, то она примет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o((x)^n).$$

Полученная формула называется *формулой Маклорена* с остаточным членом в форме Пеано.

Выпишем формулы Маклорена для основных элементарных функций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

Часто применяются частные случаи последней формулы:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Представление функции многочленом

Формулировка задачи о представлении функции многочленом может быть приведена в одном из следующих видов:

разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора по степеням $(x - x_0)$;

разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0;

представить функцию $f(x)$ формулой Тейлора по степеням $(x - x_0)$;

представить функцию $f(x)$ формулой Тейлора в окрестности точки x_0.

Рассмотрим ряд задач на применение формулы Тейлора.

Пример 1. Многочлен $3x^3 + x^2 - 4x + 5$ представить в виде многочлена по степеням $(x+1)$.

Р е ш е н и е. Применим к функции $f(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 5$ формулу Тейлора в окрестности точки $x = -1$. Найдем значение функции и ее производных в точке $x = -1$:

$$f(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 5, \quad f(-1) = -3 + 1 + 4 + 5 = 7,$$

$$f'(x) = 9x^2 + 2x - 4, \quad f'(-1) = 9 - 2 - 4 = 3,$$

$$f''(x) = 18x + 2, \quad f''(-1) = -18 + 2 = -16,$$

$$f'''(x) = 18, \quad f'''(-1) = 18,$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ для всех } n > 3.$$

Подставляя полученные значения в формулу Тейлора, находим

$$3x^3 + x^2 - 4x + 5 = 7 + 3(x+1) - 8(x+1)^2 + 3(x+1)^3.$$

Пример 2. Написать формулу Маклорена n-го порядка для функции $y = xe^x$.

Р е ш е н и е. Для представления данной функции многочленом Маклорена воспользуемся известной формулой

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Для функции y получим равенство:

$$y = xe^x = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n!} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Пример 3. Написать формулу Тейлора $2n$-го порядка для функции $y=\sin^2 x$ при $x_0=0$.

Р е ш е н и е. Так как $x_0=0$, то искомая формула является формулой Маклорена.

Используя тригонометрическую формулу понижения степени, преобразуем функцию:

$$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

и для решения задачи воспользуемся известной формулой для косинуса

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$

взяв вместо x, аргумент $2x$:

$$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o\left((2x)^{2n+1}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4x^2}{2!}-\frac{16x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+o\left((2x)^{2n+1}\right)\right)=$$

$$=\frac{2x^2}{2!}-\frac{8x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

В остаточном члене отбросили константу 2^{2n-1}, так как она не влияет на порядок малости величины x^{2n+1}.

Пример 4. Разложить функцию $\sin x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = \pi$.

Р е ш е н и е. Так как искомый многочлен - это многочлен по степеням $(x - \pi)$, то преобразуем аргумент синуса к разности $(x - \pi)$:

$$\sin x = \sin(x - \pi + \pi)$$

и запишем синус суммы аргументов $(x - \pi)$ и π:

$$\sin x = \sin((x - \pi) + \pi) = \sin(x - \pi) \cos \pi + \cos(x - \pi) \sin \pi = - \sin(x - \pi)$$

Далее воспользуемся разложением функции $\sin x$ по формуле Маклорена, взяв $(x - \pi)$ вместо x:

$$\sin x = - \sin(x - \pi) = - \left((x - \pi) - \frac{(x-\pi)^3}{3!} + \frac{(x-\pi)^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n (x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} + o((x - \pi)^{2n+2}) \right) =$$

$$= -(x - \pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \frac{(x-\pi)^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} (x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} + o((x - \pi)^{2n+2}).$$

Пример 5. Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции $y=\frac{x}{x-1}$ при $x_0=2$.

Р е ш е н и е. Преобразуем функцию к функции аргумента $(x-2)$ (так как искомый многочлен – это многочлен по степеням $(x-x_0)=(x-2)$):

$$y=\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{(x-2)+1}$$

и для дроби $\frac{1}{(x-2)+1}$ воспользуемся известной формулой $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$, взяв вместо x, аргумент $(x-2)$:

$$\frac{1}{(x-2)+1}=1-(x-2)+(x-2)^2-\ldots+(-1)^n(x-2)^n+o\left((x-2)^n\right).$$

Таким образом, искомый многочлен:

$$\frac{x}{x-1}=2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\ldots+(-1)^{n-1}(x-2)^n+o\left((x-2)^n\right).$$

Пример 6. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \arcsin x$ при $x_0 = 0$ и построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

Р е ш е н и е. Искомый многочлен найдем по формуле

$$f(x) = f(0) + \frac{f(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\left((x)^3\right).$$

Значение функции в точке $x = 0$:

$$y(0) = \arcsin 0 = 0.$$

Последовательно вычислим значения производных в точке $x = 0$:

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad y'(0) = 1;$$

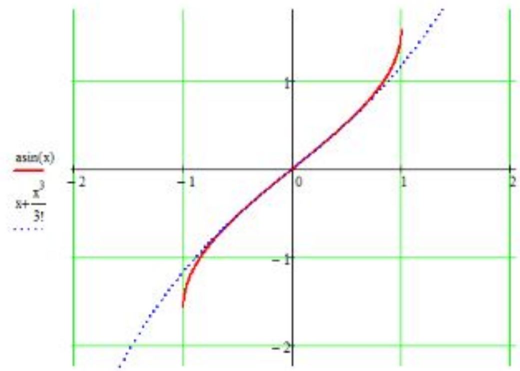
$$y''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; \quad y''(0) = 0;$$

$$y'''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right)' = \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; \quad y'''(0) = 1.$$

Составим многочлен

$$\arcsin x = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + o\left(x^3\right) = x + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right).$$

Построим графики функции $y = \arcsin x$ и многочлена $x + \frac{x^3}{3!}$:



Продолжая вычислять значения производных в точке $x = 0$, составим многочлен до пятой степени

$$y^{IV}(x) = \left(\frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right)' = \frac{15x^3}{\sqrt{(1-x^2)^7}} + \frac{9x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}; \; y^{IV}(0) = 0.$$

$$y^{IV}(x) = \left(\frac{15x^3}{\sqrt{(1-x^2)^7}} + \frac{9x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\right)' = \frac{105x^4}{\sqrt{(1-x^2)^9}} + \frac{90x^2}{\sqrt{(1-x^2)^7}} + \frac{9}{\sqrt{(1-x^2)^5}}; \; y^{V}(0) = 9.$$

Составим многочлен

$$\arcsin x = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{9}{5!} \cdot x^5 + o\left(x^5\right).$$

Таким образом, $\arcsin x = x + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{9}{5!} \cdot x^5 + o\left(x^5\right)$.

Пример 7. Выяснить поведение функции $y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ в точке $x = 1$.

Р е ш е н и е. Составим многочлен Тейлора для указанной функции. Последовательно найдем значения функции и ее производных в точке $x = 1$:

$$y\,(1) = 6\ln 1 - 2\cdot 1^3 + 9\cdot 1^2 - 18\cdot 1 = -11;$$

$$y' = \left(6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x\right)' = \tfrac{6}{x} - 6x^2 + 18x - 18, \quad y'\,(1) = 0;$$

$$y'' = \left(\tfrac{6}{x} - 6x^2 + 18x - 18\right)' = -\tfrac{6}{x^2} - 12x + 18, \quad y''\,(1) = 0;$$

$$y''' = \left(-\tfrac{6}{x^2} - 12x + 18\right)' = \tfrac{12}{x^3} - 12, \quad y'''\,(1) = 0;$$

$$y^{IV} = \left(\tfrac{12}{x^3} - 12\right)' = -\tfrac{36}{x^4}, \quad y^{IV}\,(1) = -36.$$

Получим многочлен:

$$y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x = -11 - \tfrac{36}{4!}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right) = -11 - \tfrac{3}{2}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right).$$

Главный член в найденном многочлене равен $-\frac{3}{2}(x-1)^4$, следовательно, функция ведет себя в окрестности точки $x = 1$ аналогично функции $y = -11 - \frac{3}{2}(x-1)^4$, и имеет в этой точке максимум (графиком функции $y = -11 - \frac{3}{2}(x-1)^4$ является парабола четвертой степени, проходящая через точку $(1, -11)$, ветви которой направлены вниз).

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, обозначают $f(x) \sim g(x)$.

Теорема. $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to x_0$ *тогда и только тогда, когда* $f(x) = g(x) + o(g(x))$ *или* $g(x) = f(x) + o(f(x))$.

По теореме Тейлора функция в окрестности точки x_0 представима многочленом

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \ ,$$

следовательно, приращение функции в точке есть бесконечно малая:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \ .$$

Так как остаток в форме Пеано есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждое из предыдущих слагаемых в правой части, то по теореме верна эквивалентность:

$$f(x) - f(x_0) \sim \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

или

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{при } x \to x_0.$$

Отбрасываемый при переходе к эквивалентности остаток $o((x - x_0)^n)$ показывает порядок ошибки относительно $(x - x_0)$ при замене функции ее многочленом Тейлора в окрестности точки x_0.

По формулам Маклорена получим следующие эквивалентности в окрестности точки $x = 0$:

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \ ,$$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ,$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ ,$$

$$\ln(1 + x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \ ,$$

$$(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \ .$$

Переходя к эквивалентным многочленам по формулам Тейлора и Маклорена, можем определить порядок бесконечно малой, равной разности эквивалентных функций.

Из примера 6

$$\arcsin x \sim x + \frac{x^3}{3!} + \frac{9}{5!} \cdot x^5 \ ,$$

следовательно, разность $\sin x - \arcsin x$ можно заменить эквивалентным многочленом:

$$\sin x - \arcsin x \sim \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3!}\right) = -2\frac{x^3}{3!} = -\frac{x^3}{3} \ .$$

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin x-x}$.

Р е ш е н и е. При подстановке предельного значения получим неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия заменим слагаемые в числителе и знаменателе на эквивалентные по формулам Маклорена. При этом требуется найти первые ненулевые слагаемые в разности многочленов в числителе и знаменателе:

$$\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!},$$

$$\sqrt{1-x^2}=\left(1+\left(-x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\sim 1+\frac{1}{2}\left(-x^2\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-x^2\right)^2=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}$$

$$\sin x\sim x-\frac{x^3}{3!}.$$

Выполняем подстановку:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)}{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{8}}{-\frac{x^3}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{6}}{-\frac{1}{6}}=0$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-\sin x}$.

Р е ш е н и е. При подстановке предельного значения x получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$, которую раскроем, заменив функции в числителе и знаменателе на эквивалентные.

В знаменателе получим:

$$\arcsin x-\sin x\sim\frac{x^3}{3}\text{ (см. предыдущую страницу).}$$

Следовательно, разность в числителе нужно представить многочленом степени не меньше третьей:

$$\ln(1-x)=\ln(1+(-x))\sim(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3},$$

$$\sin x\sim x-\frac{x^3}{3!}=x-\frac{x^3}{6},$$

тогда

$$e^{\sin x}-1\sim1+\sin x+\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3!}-1=$$

$$=\sin x+\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3!}\sim\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^2}{6}\right)^3=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+0\cdot x^3-\frac{x^4}{4}-\ldots\sim x+\frac{x^2}{2}.$$

Подставляем многочлены в предел:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1+\ln(1-x)}{\arcsin x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{x^2}{2}-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}}=-1.$$

Многочлен $4x^4 + 2x^3 - x - 3$ представить в виде многочлена по степеням $(x - 1)$.

- $4x^4 + 18x^3 + 30x^2 + 21x + 2$
- $4(x+1)^4 + 18(x+1)^3 + 30(x+1)^2 + 21(x+1) + 2$
- $4(x-1)^4 + 2(x-1)^3 - (x-1) - 3$
- $(x-1)^4 + 18(x-1)^3 + 30(x-1)^2 + 21(x-1) - 1$
- $4(x-1)^4 + 18(x-1)^3 + 30(x-1)^2 + 21(x-1) + 2$

Используя формулу Маклорена для $\sin x$, написать формулу Маклорена для $\sin 5x$.

- ○ $5x - \frac{5!}{3!}x^3 + \frac{5!}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{5! x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- ○ $x - \frac{5^3}{3!}x^3 + \frac{5^5}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{5^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- ◉ $5x - \frac{5^3}{3!}x^3 + \frac{5^5}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{5^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- ○ $5x - \frac{5}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{5x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- ○ $\frac{x}{5} - \frac{x^3}{5^3 3!} + \frac{x^5}{5^5 5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{5^{2n+1}(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

Используя формулу Маклорена для функции e^x написать формулу Маклорена для функции $f(x) = e^{-x^2}$.

- ○ $1 - x^2 + \frac{x^{2^2}}{2!} - \frac{x^{2^3}}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2^n}}{n!} + o(x^{2^n})$
- ○ $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$
- ○ $1 - x^2 + \frac{x^{2^2}}{2!} - \frac{x^{3^2}}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n^2}}{n!} + o(x^{2n})$
- ◉ $1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$
- ○ $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции $y = \frac{1}{x}$ при $x_0 = -1$.

- ( ) $-1 + (x-1) - (x-1)^2 + \ldots + (-1)^{n+1}(x-1)^n + o\left((x-1)^n\right)$
- ( ) $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \ldots + (x-1)^n + o\left((x-1)^n\right)$
- (•) $-1 - (x+1) - (x+1)^2 - \ldots - (x+1)^n + o\left((x+1)^n\right)$
- ( ) $1 + (x+1) + (x+1)^2 + \ldots + (x+1)^n + o\left((x+1)^n\right)$
- ( ) $-1 - (x-1) - (x-1)^2 - \ldots - (x-1)^n + o\left((x-1)^n\right)$
- ( ) $-1 + (x+1) - (x+1)^2 + \ldots + (-1)^{n+1}(x+1)^n + o\left((x+1)^n\right)$

Найти два отличных от нуля члена разложения функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ при $x_0 = 0$.

- $x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$
- $\frac{1}{\cos^2 x} x + \frac{\sin x}{\cos^3 x} x + o(x^2)$
- $x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
- $-x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 + x^4}$.

- 1
- -1
- $-\frac{1}{2}$
- 0
- $\frac{1}{2}$

Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

- 0
- $\frac{1}{4}$
- -1
- $\frac{1}{2}$
- 1

Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[4]{1+2x}}{x^2}$.

- 1
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{4}$
- ∞

Исследовать поведение функции $y = 2e^{-(x+1)^2} - \cos 2(x+1)$ в окрестности точки $x = -1$.

- [x] функция имеет минимум в точке $x = -1$
- [ ] в точке с абсциссой $x = -1$ график функции имеет перегиб
- [ ] функция возрастает в окрестности точки $x = -1$
- [ ] функция имеет максимум в точке $x = -1$
- [ ] функция убывает в окрестности точки $x = -1$