

# **Теоретико-множественные преобразования.**

# Основные понятия множеств

Понятие множества является одним из исходных (аксиоматических) понятий математики, то есть не сводимое к другим понятиям, а значит и не имеющее определения. Однако, можно дать описание множества.



***Множество*** – некоторая совокупность объектов, называемых элементами этого множества.

Основатель теории множеств - Георг Кантор, немецкий математик, 1845-1918.

## ***Множества***

по числу содержащихся в них  
элементов делятся на 2 вида



***конечные***, содержат  
конечное число элементов



***бесконечные***, содержат  
конечное число элементов

В данном курсе рассматриваются конечные множества и бесконечные счетные множества, т.е. такие множества элементы которых можно пересчитать с помощью натуральных чисел.

**Множества обозначают большими латинскими буквами:**  
*A, B, C, ...*

**Элементы множеств обозначают малыми латинскими буквами:**

*a, b, c, ...*

**Если элемент *a* принадлежит множеству *A*, то пишут:**  
 $a \in A$

**Если элемент *a* не принадлежит множеству *A*, то пишут:**  
 $a \notin A$

# Способы задания множеств

**1. Множество  $A$  определяется перечислением всех своих элементов:**

**Пример:**  $V = \{a, e, i, o, u, \tilde{o}, \tilde{a}, \tilde{o}, \tilde{u}\}$   
 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

**2. Множество  $A$  определяется частичным перечислением своих элементов, которое выражает какую-то определенную закономерность:**

**Пример:**

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$  – множество целых чисел  
 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  – множество натуральных чисел

**3. Множество  $A$  определяется как совокупность элементов из множества  $T$ , которые обладают свойством  $\alpha$ :**

$$A = \{x \in T \mid \alpha(x)\},$$

где запись  $\alpha(x)$  означает, что элемент  $x$  обладает свойством  $\alpha$ .

**Пример:**

$B = \{x \in N \mid x \bmod 2 = 0\}$  – множество четных натуральных чисел

$C = \{a \in N \mid a \text{ – простое число}\}$  – множество простых чисел

$D = \{n \in N \mid n > 1000 \ \& \ n < 2000\}$  – множество натуральных чисел больших 1000, но меньших 2000

# Операции над множествами

## Равенство множеств:

Множества  $A$  и  $B$  *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов:

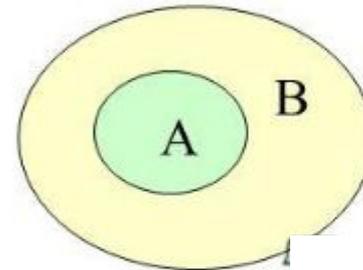
$$\{1, 3, 5\} = \{5, 1, 3\}$$

## Подмножество:

Множество  $A$  является *подмножеством* множества  $B$ ,  
 $A \subset B$ ,

если каждый элемент множества  $A$  принадлежит в то же время и множеству  $B$ :

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$



### Свойства:

1.  $\forall A (A \subset A)$
2.  $(A \subset B) \& (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

по определению равенства множеств:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \ \& \ \forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$$

### Пустое множество:

Множество, которое не содержит ни одного элемента называется *пустым множеством* и обозначается символом  $\emptyset$

$$\emptyset = \{ \}$$

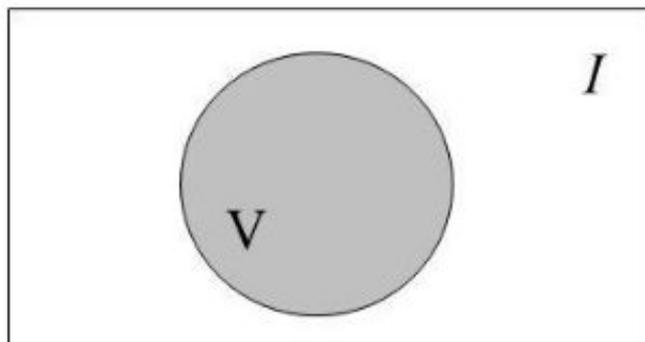
### Свойство:

Пустое множество является подмножеством любого множества:  $\forall A (\emptyset \subset A)$

## Универсальное множество $I$ :

**Множество, которое содержит все возможные элементы, рассматриваемые в данном контексте.**

**Пример:**  $V = \{a, e, i, o, u, \tilde{o}, \tilde{a}, \tilde{o}, \tilde{u}\}$  – множество гласных букв



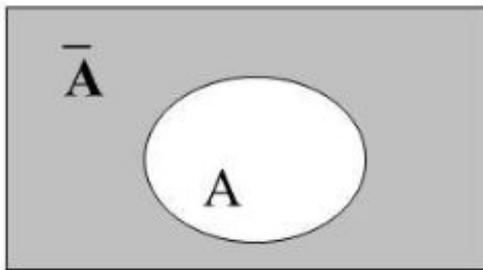
$I = \{\text{множество всех букв}\}$

**Каждое множество  $A$  является подмножеством универсального множества:**

$$\forall A (A \subset I)$$

## Дополнение множества:

Элементы универсального множества  $I$ , не принадлежащие к множеству  $A$ , образуют *дополнение* множества  $A$  относительно универсального множества  $I$ , которое обозначают  $\bar{A}$



$I$

$$\bar{A} = \{x \in I \mid x \notin A\}$$

Пример: дни недели делятся на будничные и выходные дни

$$I = \{E, T, K, N, R, L, P\}$$

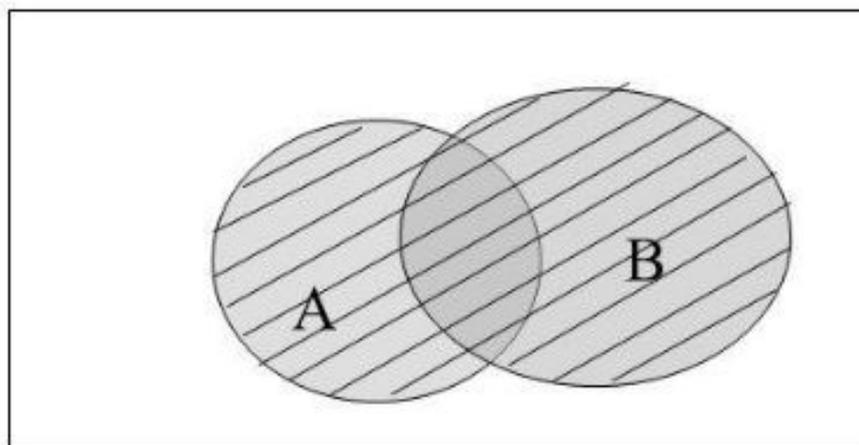
$$A = \{L, P\}$$

$$\bar{A} = \{E, T, K, N, R\}$$

## Объединение (сумма) множеств:

**Объединение** множеств  $A$  и  $B$  состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\} = A + B$$



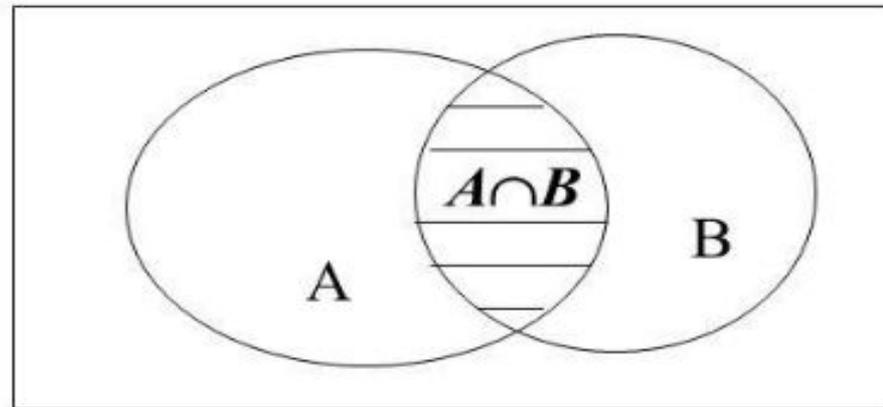
### Пример:

$$\{1, 4, 7\} \cup \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 4, 6, 7\}$$

Пересечение (общая часть, умножение) множеств:

**Пересечение** множеств  $A$  и  $B$  состоит из элементов, принадлежащих одновременно множеству  $A$  и множеству  $B$ :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} = AB$$



Пример:

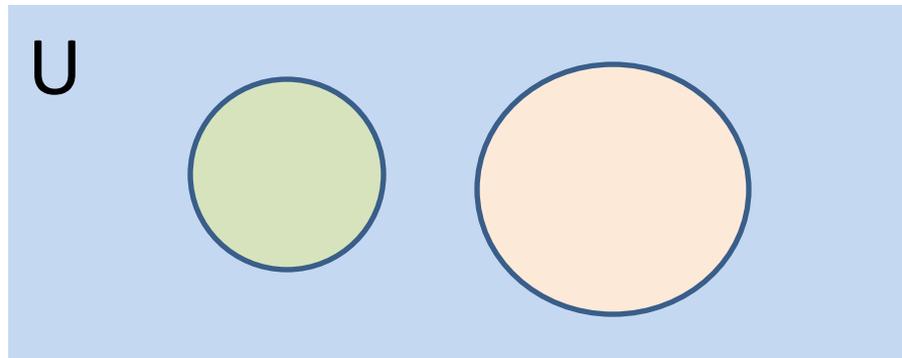
$$\{1, 4, 7\} \cap \{2, 4, 6, 7\} = \{4, 7\}$$

## Непересекающиеся множества:

Если  $A \cap B = \emptyset$ , то множества  $A$  и  $B$  *непересекающиеся* множества.

### Пример:

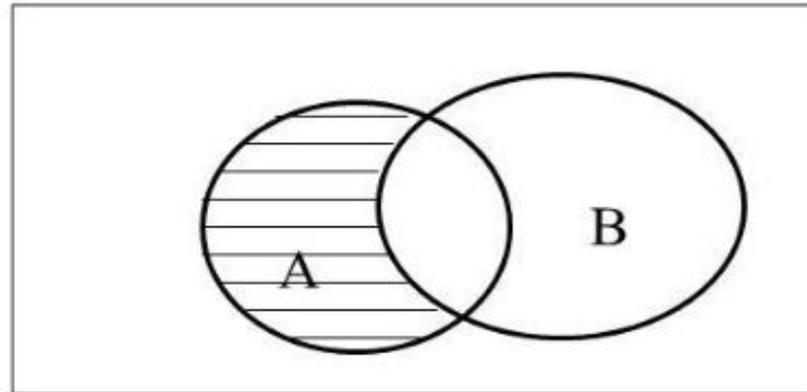
$$\{1, 4, 7\} \cap \{2, 3, 6\} = \emptyset$$



## Разность множеств:

**Разность** множеств  $A$  и  $B$  состоит из элементов, принадлежащих множеству  $A$  и не принадлежащих множеству  $B$ :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$



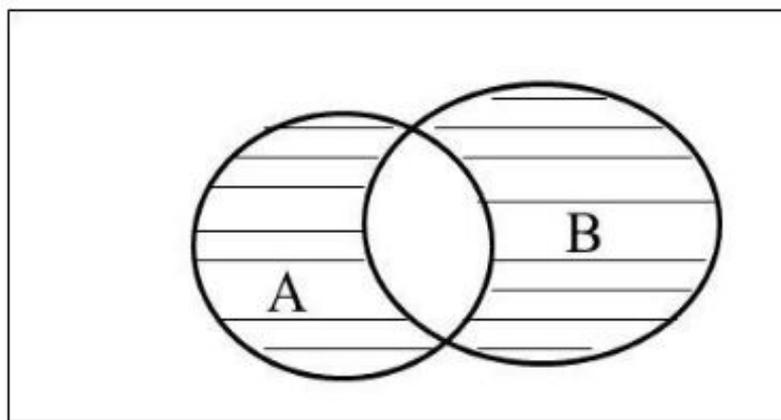
## Пример:

$$\{1, 4, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 7\} = \{1\}$$

## Симметрическая разность множеств:

**Симметрическая разность** множеств  $A$  и  $B$  состоит из элементов принадлежащих множеству  $A$  или множеству  $B$ , но не принадлежащих множествам  $A$  и  $B$  одновременно:

$$A \nabla B = \{ x \mid (x \in A) \& (x \notin B) \vee (x \notin A) \& (x \in B) \}$$



### Пример:

$$\{1, 4, 7\} \nabla \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 6\}$$

## Приоритет выполнения операций

Сначала выполняются операции **дополнения**, затем **пересечения**, **объединения**, **разности** и **симметрической разности** которые имеют одинаковый приоритет.

Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

Если в выражении есть знаки пересечения и объединения и нет скобок, то сначала выполняется операция **пересечения**, а потом – операция **объединения** (аналог сложению и умножению в арифметике).

При помощи теоретико-множественных операций из множеств образуют *выражения*.

Выражение теории множеств определяется следующим образом:

1. Все множества  $A, B, \dots$  - выражения теории множеств;
2. Пустое множество  $\emptyset$  и универсальное множество  $I$  - выражения (константы) теории множеств;
3. Если  $A$  – выражение теории множеств, то  $\bar{A}$  – тоже выражение теории множеств;
4. Если  $A$  и  $B$  - выражения теории множеств, то  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \nabla B$  – тоже выражения теории множеств.

## Свойства теоретико-множественных операций

1.  $\overline{\overline{A}} = A$

### 2. Коммутативность:

a)  $A \cup B = B \cup A$

b)  $A \cap B = B \cap A$

### 3. Ассоциативность:

a)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

### 4. Дистрибутивность:

a)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

### 5. Идемпотентность:

a)  $A \cap A = A$

b)  $A \cup A = A$

**Задача 1. Доказать равенство выражений теории множеств:**

A)  $\overline{(A \cup B)} \cap (A \setminus B) = A \setminus B$

B)  $A \setminus ((\overline{A} \setminus B) \cap \overline{(A \cup B)}) = A$

C)  $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cap \overline{C}) = \overline{A} \cup (\overline{B} \setminus \overline{C})$

D)  $A \setminus (A \cap B) = \overline{B} \setminus \overline{A}$

**Пример.**  $U = \{a,b,c,d,e,k,n,m\}$  – универсальное множество

$$A = \{a,b,c,d\} \quad B = \{c,d,n,m\}$$

применение операций для множеств A и B:

1) дополнение:  $A^c = \{e,k,n,m\}$ ,  $B^c = \{a,b,e,k\}$

2) пересечение:  $A \cap B = \{c,d\}$

3) объединение:  $A \cup B = \{a,b,c,d,n,m\}$

4) разность:  $A \setminus B = \{a,b\}$ ,  $B \setminus A = \{n,m\}$

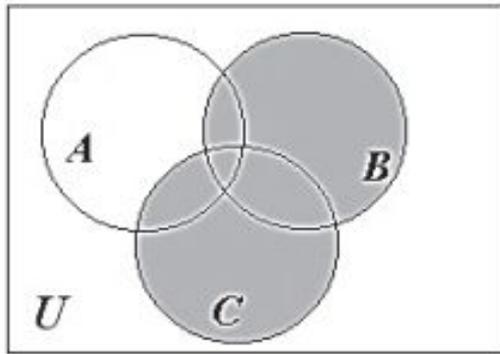
5) симметрическая разность:  $A \oplus B = \{a,b,n,m\}$

Покажите с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

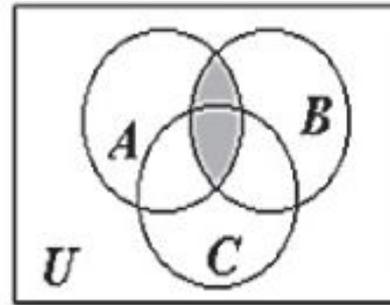
# Пример

Докажите тождество с помощью диаграмм Эйлера  
Венна

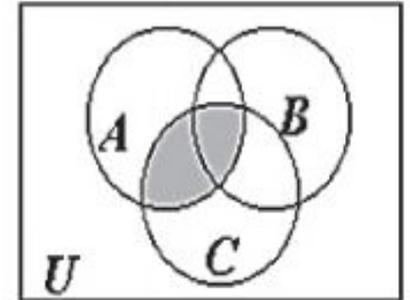
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$B \cup C$

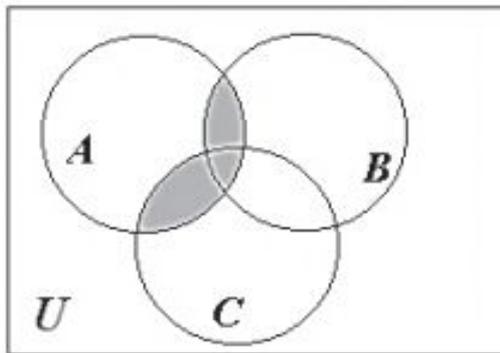


$A \cap B$

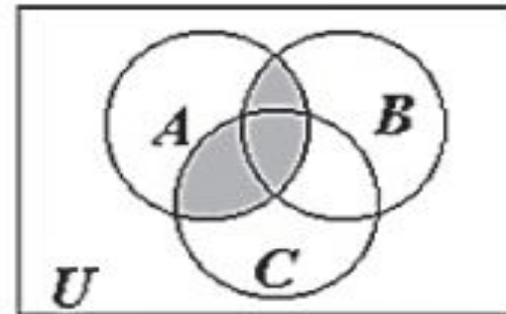


$A \cap C$

=



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$