Теоретико-множественные преобразования.

Основные понятия множеств

Понятие множества является одним из исходных (аксиоматических) понятий математики, то есть не сводимое к другим понятиям, а значит и не имеющее определения. Однако, можно дать описание множества.

Множество – некоторая совокупность объектов, называемых элементами этого множества.

Основатель теории множеств - Георг Кантор, немецкий математик, 1845-1918.

Множества

по числу содержащихся в них элементов делятся на 2 вида

конечные, содержат конечное число элементов

бесконечные, содержат конечное число элементов

В данном курсе рассматириваются конечные множества и бесконечные счетные множнства, т.е. такие множества элементы которых можно пересчитать с помощью натуральных чисел.

Множества обозначают большими латинскими буквами:

$$A, B, C, \dots$$

Элементы множеств обозначают малыми латинскими буквами:

$$a, b, c, \dots$$

Если элемент *a* *принадлежит* множеству *A*, то пишут:

$$a \in A$$

Если элемент *a* *не принадлежит* множеству *A*, то пишут:

$$a \notin A$$

Способы задания множеств

1. Множество *A* определяется перечислением всех своих элементов:

Пример: V = {a, e, i, o, u, õ, ä, ö, ü}
A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

2. Множество *A* определяется частичным перечислением своих элементов, которое выражает какую-то определенную закономерность:

Пример:

Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...} – множество целых чисел
N = {0, 1, 2, 3, ...}- множество натуральных чисел

3. Множество *A* определяется как совокупность элементов из множества Т, которые обладают свойством α:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{T} \mid \alpha(x)\},$$

где запись $\alpha(x)$ означает, что элемент x обладает свойством α.

Пример:

$B = \{x \in N \mid x \bmod 2 = 0\}$ – множество четных натуральных чисел

$C = \{a \in N \mid a$ – простое число$\}$ – множество простых чисел

$D = \{n \in N \mid n > 1000 \ \& \ n < 2000\}$ – множество натуральных чисел больших 1000, но меньших 2000

Операции над множествами

Равенство множеств:

Множества A и B *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов:

$$\{1, 3, 5\} = \{5, 1, 3\}$$

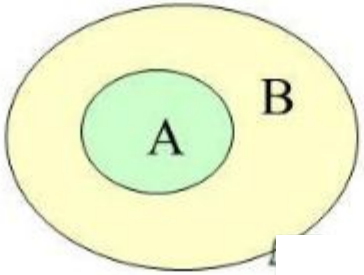
Подмножество:

Множество A является *подмножеством* множества B,

$$A \subset B,$$

если каждый элемент множества A принадлежит в то же время и множеству B:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$



Свойства:

1. $\forall A\ (A \subset A)$
2. $(A \subset B) \& (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

по определению равенства множеств:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B \ \ \& \ \ \forall x,\ x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Пустое множество:

Множество, которое не содержит ни одного элемента называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$

$$\varnothing = \{\ \}.$$

Свойство:

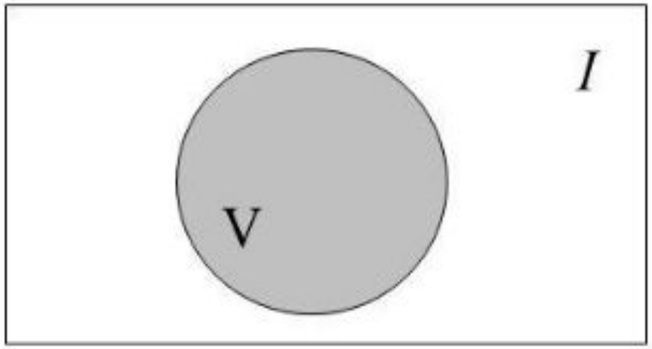
Пустое множество является подмножеством любого множества: $\forall A\ (\varnothing \subset A)$

Универсальное множество *I*:

Множество, которое содержит все возможные элементы, рассматриваемые в данном контексте.

Пример: V = {a, e, i, o, u, õ, ä, ö, ü} – множество гласных букв

I = {множество всех букв}

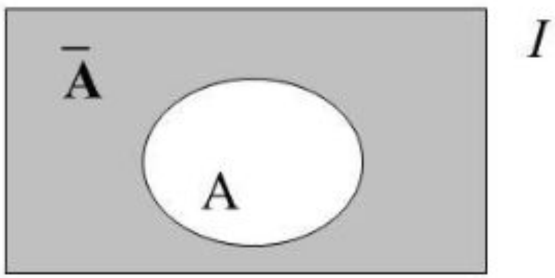


Каждое множество А является подмножеством универсального множества:

$$\forall A \,(A \subset I)$$

Дополнение множества:

Элементы универсального множества *I*, не принадлежащие к множеству *A*, образуют *дополнение* множества *A* относительно универсального множества *I*, которое обозначают $\overline{\mathrm{A}}$



$$\overline{\mathrm{A}} = \{x \in I \mid x \notin \mathrm{A}\}$$

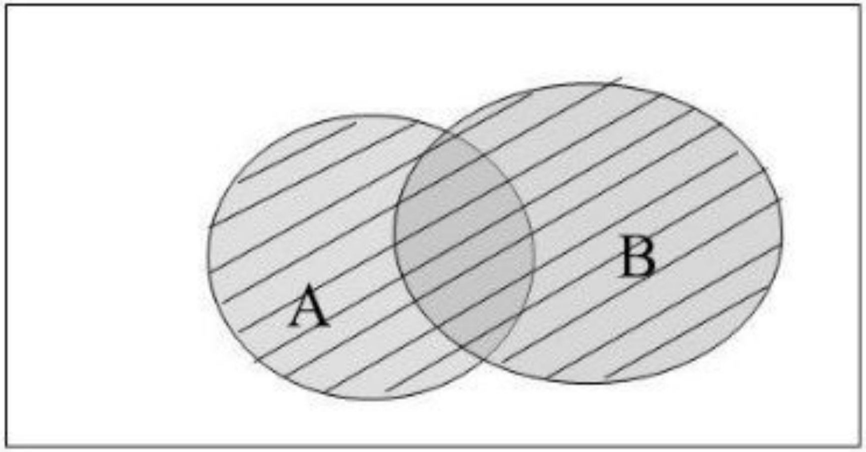
Пример: дни недели делятся на будничные и выходные дни

$$I = \{E,T,K,N,R,L,P\}$$
$$A = \{L,P\}$$
$$\overline{\mathrm{A}} = \{E,T,K,N,R\}$$

Объединение (сумма) множеств:

Объединение множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \} = A + B$$



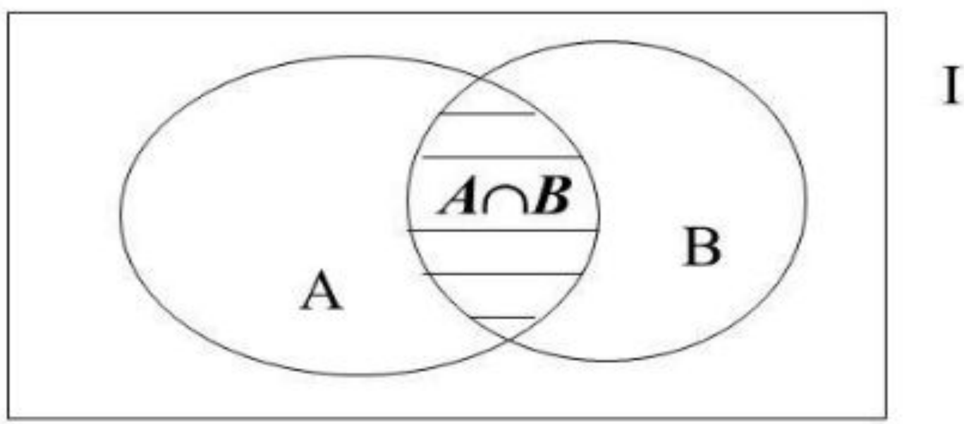
Пример:

$$\{1, 4, 7\} \cup \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 4, 6, 7\}$$

Пересечение (общая часть, умножение) множеств:

Пересечение **множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих одновременно множеству A и множеству B:**

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ и } x \in B \,\} = AB$$



Пример:

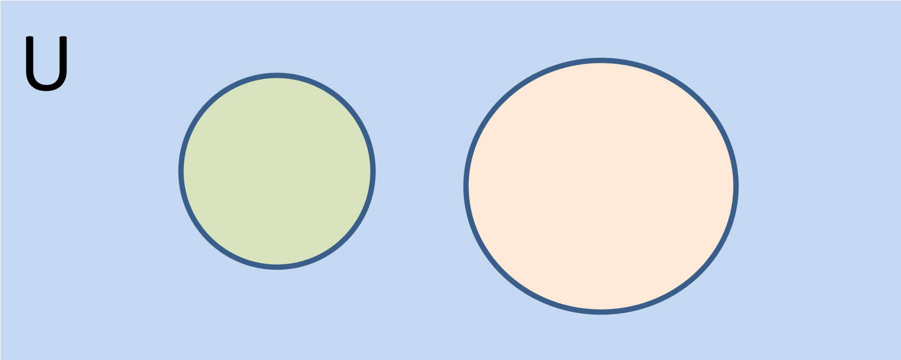
$$\{1, 4, 7\} \cap \{2, 4, 6, 7\} = \{4, 7\}$$

Непересекающиеся множества:

Если $A \cap B = \varnothing$, то множества А и В ***непересекающиеся*** **множества.**

Пример:

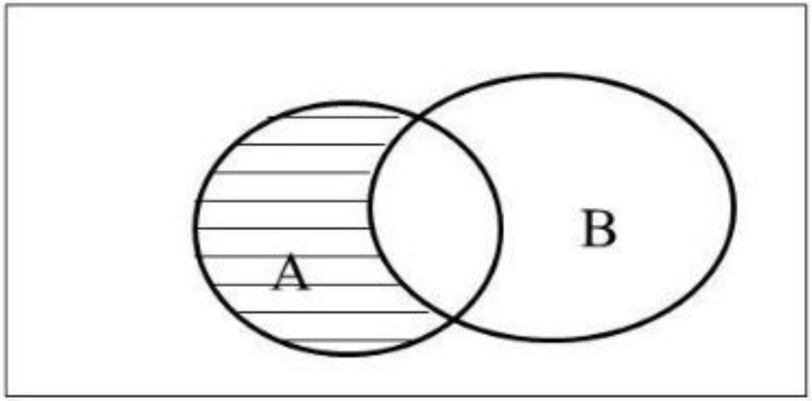
$$\{1, 4, 7\} \cap \{2, 3, 6\} = \varnothing$$



Разность множеств:

Разность множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B:

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \ \text{и} \ x \notin B \,\}$$



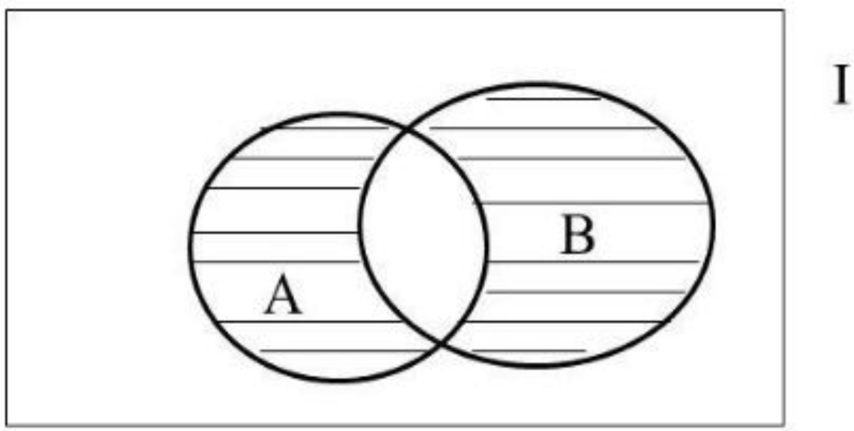
Пример:

$\{1, 4, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 7\} = \{1\}$

Симметрическая разность множеств:

Симметрическая разность **множеств A и B состоит из элементов принадлежащих множеству A или множеству B, но не принадлежащих множествам A и B одновременно:**

$$A \nabla B = \{ x \mid (x \in A) \& (x \notin B) \vee (x \notin A) \& (x \in B) \}$$



Пример:

$\{1, 4, 7\} \nabla \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 6\}$

Приоритет выполнения операций

Сначала выполняются операции дополнения, затем пересечения, объединения, разности и симметрической разности которые имеют одинаковый приоритет.

Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

Если в выражении есть знаки пересечения и объединения и нет скобок, то сначала выполняется операция пересечения, а потом – операция объединения (аналог сложению и умножению в арифметике).

При помощи теоретико-множественных операций из множеств образуют *выражения*.

Выражение теории множеств определяется следующим образом:

1. **Все множества А, В, ... - выражения теории множеств;**
2. **Пустое множество $\varnothing$ и универсальное множество I - выражения (константы) теории множеств;**
3. **Если A – выражение теории множеств, то $\overline{A}$ – тоже выражение теории множеств;**
4. **Если А и В - выражения теории множеств, то $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \nabla B$ – тоже выражения теории множеств.**

Свойства теоретико-множественных операций

1. $\overline{\overline{A}} = A$

2. **Коммутативность:**

$$a)\ A \cup B = B \cup A$$
$$b)\ A \cap B = B \cap A$$

3. **Асоциативность:**

$$a)\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$b)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

4. **Дистрибутивность:**

$$a)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$b)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

5. **Идемпотентность:**

$$a)\ A \cap A = A$$
$$b)\ A \cup A = A$$

Задача 1. **Доказать равенство выражений теории множеств:**

A) $\overline{(\overline{A} \cup B)} \cap (A \setminus B) = A \setminus B$

B) $A \setminus ((\overline{A} \setminus B) \cap \overline{(A \cup B)}) = A$

C) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cap \overline{C}) = \overline{A} \cup (\overline{B} \setminus \overline{C})$

D) $A \setminus (A \cap B) = \overline{B} \setminus \overline{A}$

Пример. **$U = \{a,b,c,d,e,k,n,m,\}$ – универсальное множество**

$A = \{a,b,c,d,\}$ $B = \{c,d,n,m\}$

применение операций для множеств A и B:

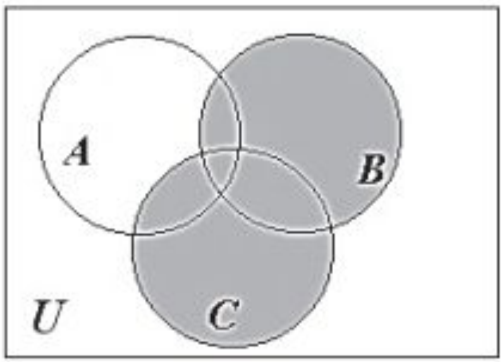
1) дополнение: $A = \{e,k,n,m\}$, $B = \{a,b,e,k\}$
2) пересечение: $A \cap B = \{c,d\}$
3) обьединение: $A \cup B = \{a,b,c,d,n,m\}$
4) разность: $A / B = \{a,b\}$, $B / A = \{ n,m\}$
5) симметрическая разность: $A \quad B = \{a,b,n,m\}$

Покажите с помощью диаграмм Эйлер-Венна.

Пример

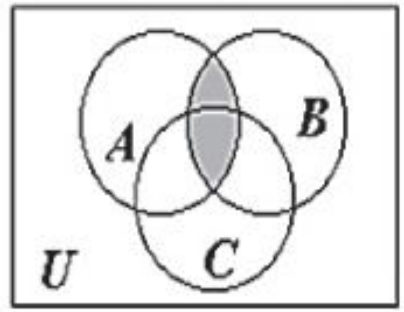
Докажите тождество с помощью диаграмм Эйлера Венна

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

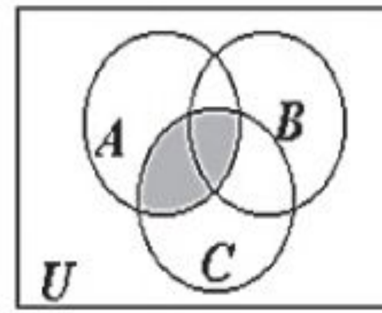


$B\cup C$

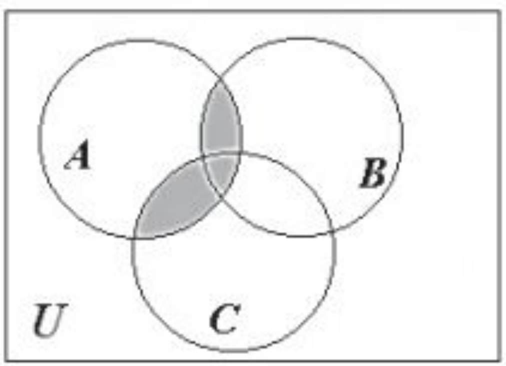
=



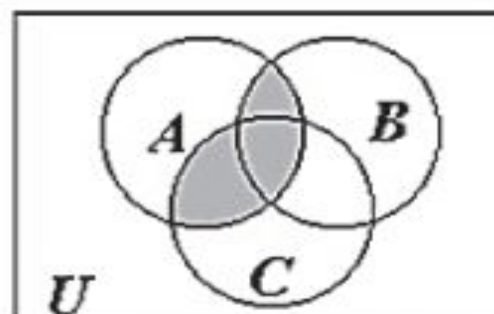
$A\cap B$



$A\cap C$



$A\cap(B\cup C)$



$(A\cap B)\cup(A\cap C)$