Первообразная

Физический смысл производной:

Если $s = s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t:

$$v(t) = s'(t)$$

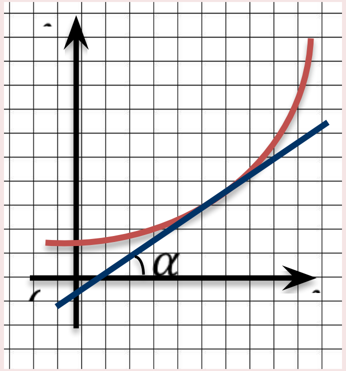
Если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то $s'(t)$ выражает *скорость протекания процесса* в момент времени t.

Геометрический смысл производной:

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси OY, то $f'(a)$ выражает *угловой коэффициент касательной*:

$$k = f'(a)$$

$$k = tg\,\alpha \Rightarrow f'(a) = tg\,\alpha$$



$v(t) = gt$

$S = S(t)$

$t = 0,\ S(0) = s_0$

$S'(t) = v(t) \Rightarrow S'(t) = gt$

$$\boxed{S = \frac{gt^2}{2} + s_0}$$

$$S' = \left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt$$

$$S(0) = \frac{g \cdot 0^2}{2} + C = s_0 \Rightarrow C = s_0$$

Возведение в степень a^r	Извлечение корня $\sqrt[n]{a}$
$\cos x$	$\arccos x$
$\sin x$	$\arcsin x$
Дифференцирование $f'(x)$	Интегрирование

Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для функции $y = f(x)$** на промежутке X, если для $x \in X$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

$y = x^2$ – первообразная для функции $y = 2x$, $(x^2)' = 2x$

$y = \sin x$ – первообразная для функции $y = \cos x$, $(\sin x)' = \cos x$

$x > 0$

$|x| = x$

$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x < 0$

$|x| = -x$

$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' =$

$= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

$f(x)$	$F(x)$
$(C)'=0$	$C+C$
$(x)'=1$	$x+C$
$\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$	$\frac{x^2}{2}+C$
$\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)'=x^r\ (r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+C$
$(\ln\|x\|)'=\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C$
$(-\cos x)'=\sin x$	$-\cos x+C$
$(\sin x)'=\cos x$	$\sin x+C$
$(-ctg\ x)'=\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\ x+C$
$(tg\ x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\ x+C$
$(e^x)'=e^x$	e^x+C
$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$

$$(u+v)' = u' + v'$$

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на промежутке X первообразные соответственно $y = F(x)$ и $y = G(x)$, то и сумма функций $y = f(x) + g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причем одной из этих первообразных является функция $y = F(x) + G(x)$.

Пример:

- Найти первообразную для функции $y = e^x + \frac{1}{x}$.

Решение:

$(e^x)' = e^x \Rightarrow e^x$ – первообразная для функции $y = e^x$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|x|$ – первообразная для функции $y = \frac{1}{x}$

$y = e^x + \ln|x|$ – одна из первообразных функции $y = e^x + \frac{1}{x}$

$$(cu)' = c \cdot u'$$

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ – первообразная для $kf(x)$.

Пример:

- Найти первообразную для функции $y = 12x^3 + 8x - 1.$

Решение:

$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 \Rightarrow \frac{x^4}{4}$ – первообразная для функции $y = x^3$

$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \Rightarrow \frac{x^2}{2}$ – первообразная для функции $y = x$

$(x)' = 1 \Rightarrow x$ – первообразная для функции $y = 1$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(f(kx+m))' = kf\,'(kx+m)$$

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx+m)$ служит функция $y = \frac{1}{k}F(kx+m)$.

Доказательство:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+m)\right)' = \frac{1}{k}\cdot kF'(kx+m) = F'(kx+m) = f(kx+m)$$

Пример:

- Найти первообразную для функции $y = (4 - 5x)^7$.

Решение:

$\left(\frac{x^8}{8}\right)' = x^7 \Rightarrow \frac{x^8}{8}$ – первообразная для функции $y = x^7$

$y = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(4-5x)^8}{8} = -\frac{(4-5x)^8}{40}$ – одна из первообразных функции $y = (4 - 5x)^7$

Теорема 2. Если $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$.

$y = e^x + \ln|x| + C$ – все первообразные функции $y = e^x + \frac{1}{x}$

$y = 3x^4 + 4x^2 - x + C$ – все первообразные функции $y = 12x^3 + 8x - 1$

$y = -\frac{(4-5x)^8}{40} + C$ – все первообразные функции $y = (4 - 5x)^7$

$f(x)$	$F(x)$
0	$C + C$
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
$x^r (r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin\ x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\ x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\ x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на промежутке X первообразные соответственно $y = F(x)$ и $y = G(x)$, то и сумма функций $y = f(x) + g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причем одной из этих первообразных является функция $y = F(x) + G(x)$.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ – первообразная для $kf(x)$.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = \frac{1}{k} F(kx + m)$.

Если $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$.