

# Первообразная

## Физический смысл производной:

Если  $s = s(t)$  – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени  $t$ :

$$v(t) = s'(t)$$

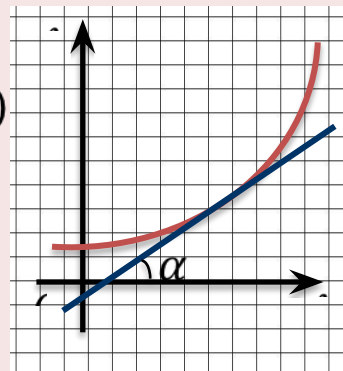
Если некоторый процесс протекает по закону  $s = s(t)$ , то  $s'(t)$  выражает *скорость протекания процесса* в момент времени  $t$ .

## Геометрический смысл производной:

Если к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x = a$  можно провести касательную, непараллельную оси  $OY$ , то  $f'(a)$  выражает *угловой коэффициент касательной*:

$$k = f'(a)$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$$





$$v(t) = gt$$

$$s = s(t(0)) = s_0$$

$$S'(t) = v(t) \Rightarrow S'(t) = gt$$

$$S = \frac{gt^2}{2} + s_0$$

$$S(t) = \left( \frac{gt^2}{2} \right)' = gt + s_0$$

Возведение в степень $a^r$	Извлечение корня $\sqrt[n]{a}$
$\cos x$	$\arccos x$
$\sin x$	$\arcsin x$
Дифференцирование $f'(x)$	Интегрирование

Функцию  $y = F(x)$  называют **первообразной для функции  $y = f(x)$**  на промежутке  $X$ , если для  $x \in X$  выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

$y = x^2$  – первообразная для функции  $y = 2x$ ,  $(x^2)' = 2x$

$y = \sin x$  – первообразная для функции  $y = \cos x$ ,  $(\sin x)' = \cos x$

$$\begin{aligned}
 &x > 0 \\
 &|x| = x \\
 &(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x < 0 \\
 &|x| = -x \\
 &(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \\
 &= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

$f(x)$	$F(x)$
$(C)'=0$	$C + C$
$(x)'=1$	$x + C$
$\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$	$\frac{x^2}{2} + C$
$\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)'=x^r (r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
$(\ln x )' = \frac{1}{x}$	$\ln x  + C$
$(-\cos x)' = \sin x$	$-\cos x + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\sin x + C$
$(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$(e^x)' = e^x$	$e^x + C$
$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

$$(u + v)' = u' + v'$$

Если функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  имеют на промежутке  $X$  первообразные соответственно  $y = F(x)$  и  $y = G(x)$ , то и сумма функций  $y = f(x) + g(x)$  имеет на промежутке  $X$  первообразную, причем одной из этих первообразных является функция  $y = F(x) + G(x)$ .

# Пример:

● Найти первообразную для функции  $y = e^x + \frac{1}{x}$ .

Решение:

$(e^x)' = e^x \Rightarrow e^x$  – первообразная для функции  $y = e^x$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|x|$  – первообразная для функции  $y = \frac{1}{x}$

$y = e^x + \ln|x|$  – одна из первообразных функции  $y = e^x + \frac{1}{x}$



$$(cu)' = c \cdot u'$$

Если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то  $kF(x)$  – первообразная для  $kf(x)$ .

# Пример:

Найти первообразную для функции  $y = 12x^3 + 8x - 1$ .

Решение:

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 \Rightarrow \frac{x^4}{4} - \text{первообразная для функции } y = x^3$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \text{первообразная для функции } y = x$$

$$(x)' = 1 \Rightarrow x - \text{первообразная для функции } y = 1$$

...  $x^4$  ...  $x^2$  ...

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m)$$

**Теорема 1.** Если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то первообразной для функции  $y = f(kx + m)$  служит функция  $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$ .

**Доказательство:**

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + m)\right)' = \frac{1}{k} \cdot kF'(kx + m) = F'(kx + m) = f(kx + m)$$

# Пример:

Найти первообразную для функции  $y = (4 - 5x)^7$ .

Решение:

$$\left(\frac{x^8}{8}\right)' = x^7 \Rightarrow \frac{x^8}{8} - \text{первообразная для функции } y = x^7$$

$$y = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(4-5x)^8}{8} = -\frac{(4-5x)^8}{40} - \text{одна из первообразных функции } y = (4 - 5x)^7$$

**Теорема 2.** Если  $y = F(x)$  – первообразная для функции  $y = f(x)$  на промежутке  $X$ , то у функции  $y = f(x)$  бесконечно много первообразных, и все они имеют вид  $y = F(x) + C$ .

$$y = e^x + \ln|x| + C - \text{все первообразные функции } y = e^x + \frac{1}{x}$$

$$y = 3x^4 + 4x^2 - x + C - \text{все первообразные функции } y = 12x^3 + 8x - 1$$

$$y = -\frac{(4-5x)^8}{40} + C - \text{все первообразные функции } y = (4 - 5x)^7$$

$f(x)$	$F(x)$
0	$C + C$
1	$x + C$
$x$	$\frac{x^2}{2} + C$
$x^r (r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$e^x$	$e^x + C$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Если функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  имеют на промежутке  $X$  первообразные соответственно  $y = F(x)$  и  $y = G(x)$ , то и сумма функций  $y = f(x) + g(x)$  имеет на промежутке  $X$  первообразную, причем одной из этих первообразных является функция  $y = F(x) + G(x)$ .

Если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то  $kF(x)$  – первообразная для  $kf(x)$ .

Если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то первообразной для функции  $y = f(kx + m)$  служит функция  $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$ .

Если  $y = F(x)$  – первообразная для функции  $y = f(x)$  на промежутке  $X$ , то у функции  $y = f(x)$  бесконечно много первообразных, и все они имеют вид  $y = F(x) + C$ .