ЛОГАРИФМЫ

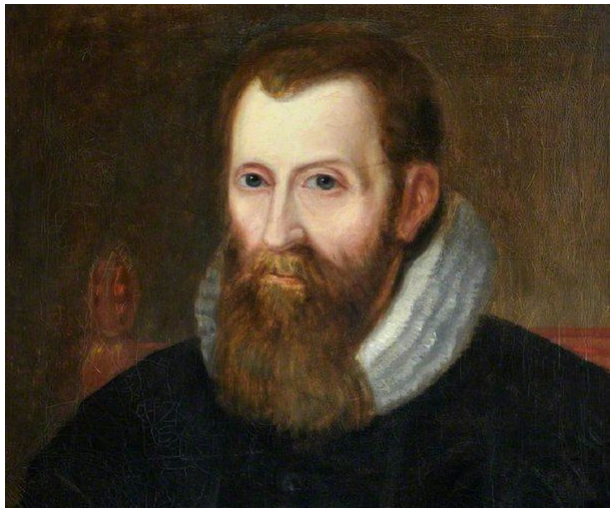
$$\log_b a = x \qquad b^x = a$$

при чём $a > 0, \qquad b > 0, \qquad b \neq 1$

ИСТОРИЯ

Для чего были придуманы логарифмы? Конечно, для ускорения и упрощения вычислений. Изобретатель первых логарифмических таблиц, Непер, так говорит о своих побуждениях: “Я старался, на сколько мог и умел, отделаться от трудностей и скуки вычислений, докучность которых обычно отпугивает весьма многих от изучения математики”.

В самом деле, логарифмы чрезвычайно облегчают и ускоряют вычисления, не говоря уже о том, что они дают возможность производить такие операции, выполнение которых без их помощи очень затруднительно (извлечение корня любой степени).



ИСТОРИЯ

Принцип, лежащий в основе любой системы логарифмов, известен очень давно и может быть прослежен в глубь истории вплоть до древневавилонской математики (около 2000 до н.э.). В те времена интерполяция между табличными значениями целых положительных степеней целых чисел использовалась для вычисления сложных процентов.

Гораздо позже Архимед (287–212 до н.э.) воспользовался степенями числа 108 для нахождения верхнего предела числа песчинок, необходимого для того, чтобы целиком заполнить известную в те времена Вселенную. Архимед обратил внимание на свойство показателей степеней, лежащее в основе эффективности логарифмов: произведение степеней соответствует сумме показателей степеней.

В конце Средних веков и начале Нового времени математики все чаще стали обращаться к соотношению между геометрической и арифметической прогрессиями. М.Штифель в своем сочинении Арифметика целых чисел (1544) привел таблицу положительных и отрицательных степеней числа 2.

ИСТОРИЯ

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256

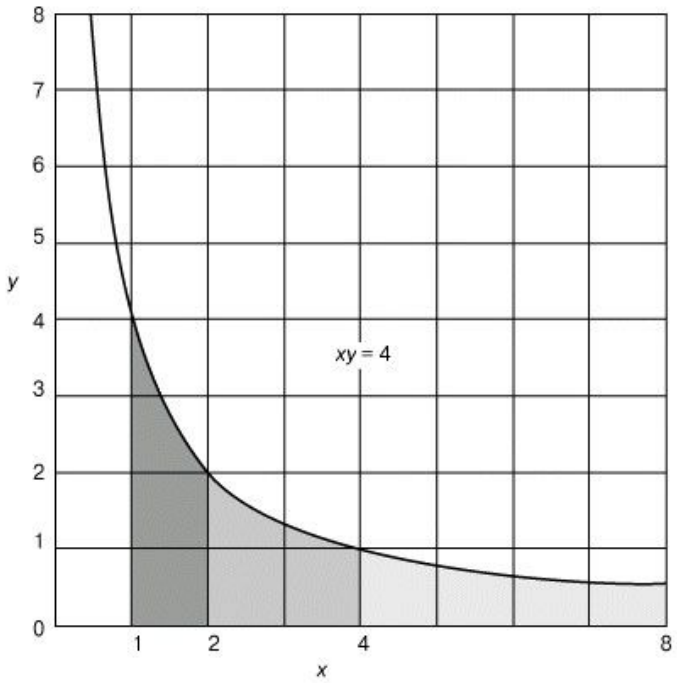
Штифель заметил, что сумма двух чисел в первой строке (строке показателей степени) равна показателю степени двойки, отвечающему произведению двух соответствующих чисел в нижней строке (строке степеней).

В связи с этой таблицей Штифель сформулировал четыре правила, эквивалентных четырем современным правилам операций над показателями степеней или четырем правилам действий над логарифмами: сумма в верхней строке соответствует произведению в нижней строке; вычитание в верхней строке соответствует делению в нижней строке; умножение в верхней строке соответствует возведению в степень в нижней строке; деление в верхней строке соответствует извлечению корня в нижней строке.

ИСТОРИЯ

Независимо от Непера и почти одновременно с ним система логарифмов, довольно близкая по типу, была изобретена и опубликована Й.Бюрги в Праге, издавшем в 1620 г. Таблицы арифметической и геометрической прогрессий.

Первые логарифмы в силу исторических причин использовали приближения к числам 1/e и e. Несколько позднее идею натуральных логарифмов стали связывать с изучением площадей под гиперболой xy = 1.



В XVII в. было показано, что площадь, ограниченная этой кривой, осью x и ординатами x = 1 и x = a, x возрастает в арифметической прогрессии, когда a возрастает в геометрической прогрессии. Именно такая зависимость возникает в правилах действий над экспонентами и логарифмами. Это дало основание называть неперовы логарифмы “гиперболическими логарифмами”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

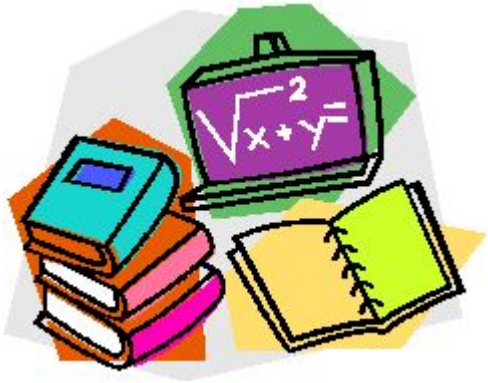
Логарифм положительного числа b по основанию a — это показатель степени, в которую надо возвести a , чтобы получить b . b > 0, a > 0, a≠ 1.

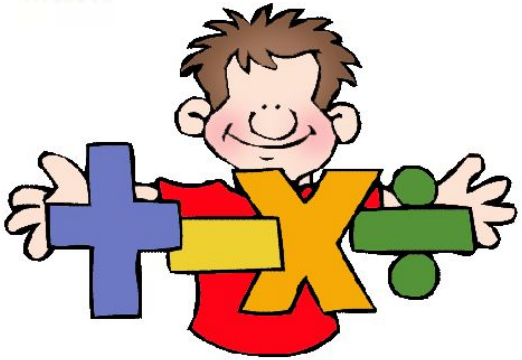
$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$

$$\log_7 49 = 2, \text{ так как } 7^2 = 49;$$

$$\log_5 \frac{1}{5} = -1, \text{ так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$$

$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \text{ так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$





ЛОГАРИФМЫ

Десятичный логарифм — логарифм с основанием 10, который обозначается как

$$\lg$$

$$\lg 100 = 2 \qquad \log_{10} 100 = 2$$

$$10^2 = 100$$

Натуральный логарифм — логарифм с основанием е, обозначается как

$$\ln$$

Сколько свойств логарифмов вы знаете?

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$a^{\log_a b} = b$$

$$8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$$

Звучит так чувственно и нежно
Святое слово "логарифм";
Пусть не понять того вам, грешным, -
Оно прекрасней всяких рифм!

Подобны логарифмы шторму,
Их море - грозный интеллект.
Какая логика из формул!
Что лучше создал человек?

Да, логарифм - одна из маний,
Что в сердце мне не утаить...
И никаких нет оснований
Их основанья не любить!

Решенья их мне словно дети,
Которых всей душой растишь.
Пишу я с трепетом в ответе:
Один остался корень лишь!

Пускай я ошибусь в расчетах,
Дискриминант не тот - и пусть!
Ведь дело здесь не в недочетах,
Хоть сотню раз я ошибусь.

Смотрю я на искусство шире,
Когда искусство - логарифм,
Что лучше песен всяких в мире,
Что лучше самых разных рифм!

Логарифм произведения — это сумма логарифмов

Логарифм частного — это разность логарифмов

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3(8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$$

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ ЛОГАРИФМИРУЕМОГО ЧИСЛА И ОСНОВАНИЯ ЛОГАРИФМА

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

Показатель степени логарифмируемого числа

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

Показатель степени основания логарифма

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

в частности если m = n, мы получаем формулу

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b$$

ПЕРЕХОД К НОВОМУ ОСНОВАНИЮ

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

в частности, если c = b, то $\log_b b = 1$ $\longrightarrow$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1,25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$$

ЕЩЕ ОДНО СВОЙСТВО ЛОГАРИФМОВ, КОТОРОЕ НЕ ОЧЕНЬ ИЗВЕСТНО, ОДНАКО ПРИМЕНЯЕТСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ИЛИ ПРИ УПРОЩЕНИИ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМЫ:

$$a^{\log_c d} = d^{\log_c a}$$