Тема 2.1. Производная функции. Дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям.

План.

- 1 Приращение аргумента. Приращение функции.
- 2. Определения производной.
- 3. Вычисление производных.
- 4. Правила дифференцирования.
- 5. Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$
- 6. Геометрический и механический смысл производной
- 7. Признаки возрастания и убывания
- 8. Экстремум функции.

Опр. 1. Пусть ф-я $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность x_1-x_0 называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют **приращением функции**.

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс).

Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y (или \Delta f)$, значит

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

Пример 1.

Найти приращение функции $y=x^2$ при переходе от точки $x_0=1$ к точке:

а) x=1,1;	б) x=0,9
Решение $f(1)=1^2=1$, $f(1,1)=(1,1)^2=1,21$ $\Delta y = f(1,1) - f(1) =$ $1,21 - 1 = 0,21$	Решение $f(1)=1^2=1$, $f(0,9)=(0,9)^2=0,81$ $\Delta y = f(0,9) - f(1) =$ $0,81 - 1 = -0,19$

Обратите внимание на полученный в примере ответ: приращение функции может быть и положительным и отрицательным числом, так что не истолковывайте термин «приращение» как «прирост».

Опр*. *Функция непрерывна в точке x=a, если в точке x=a выполняется следующее условие: если ,* $\Delta x \to 0$ *то* $\Delta y \to 0$

Пример 2.
Для функции $y=x^2$ найти:

а) приращения функции при переходе от фиксированной точки x к точке x + Δx ;	б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю
Решение. $f(x)=x^2$ $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$ $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=$ $(x+\Delta x)^2-x^2=(x^2+2x\cdot\Delta x$ $+(\Delta x)^2)-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$ Итак, $\Delta y=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$	Решение. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$ При вычислении предела мы учитывали, что x - фиксированная точка (const), Δx – переменная, стремящаяся к нулю. Итак, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x$

2. Определения производной.

Опр. 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой точке ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем Δy соответствующее приращение функции и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует

предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции** $y = f(x)$ **в точке x** и обозначают $f'(x)$

Итак,

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)}$$

иногда производную обозначают y'

Если функция $y = f(x)$имеет производную в точке х, то ее называют ***дифференцируемой*** *в точке х.* Процедуру отыскания производной функции $y = f(x)$ называют ***дифференцированием функции***

. $y = f(x)$

Формулами ***дифференцирования*** *обычно называют формулы для отыскания производных конкретных функции.*

3. Вычисление производных. Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$		

Правила дифференцирования.

Правило 1. Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных.

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

(производная суммы равна сумме производных)

Например, $(x^2 + \sin x)' = 2x + \cos x$

Правило 2. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x,

причем.

$$\boxed{(kf(x))' = k \cdot f'(x)}$$

(постоянный множитель можно вынести за знак производной)

Например, $(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$

Правило 3. Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

(производная произведения двух ф-ий равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой ф-ии на вторую ф-ию, а второе слагаемое есть произведение первой ф-ии на производную второй ф-ии)

Например, $((2x+3)\sin x)' = (2x+3)'\cdot \sin x + (2x+3)\cdot(\sin x)'$

$= 2\sin x + (2x+3)\cdot\cos x$

Правило 4. Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Например,

$$\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot(5-4x) - x^2\cdot(5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2x(5-4x) - x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x-4x^2}{(5-4x)^2}$$

5. *Дифференцирование функции* $y = f(kx+m)$

С функцией y = sin2x можно поступить так. Известно, что sin2x=2sinxcosx. Тогда

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2((\sin x)'\cdot\cos x + \sin x\cdot(\cos x)' =$$

$$2(\cos x\cos x + \sin x(-\sin x)) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$$

Воспользовавшись правилами дифференцирования, мы доказали, что $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$

Точно также дело будет обстоять и в других случаях.

$$\left(tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\ ,\qquad ((2x+1)^5)' = 2\cdot 5(2x+1)^4 = 10(2x+1)^4$$

Вообще, справедливо следующее утверждение.

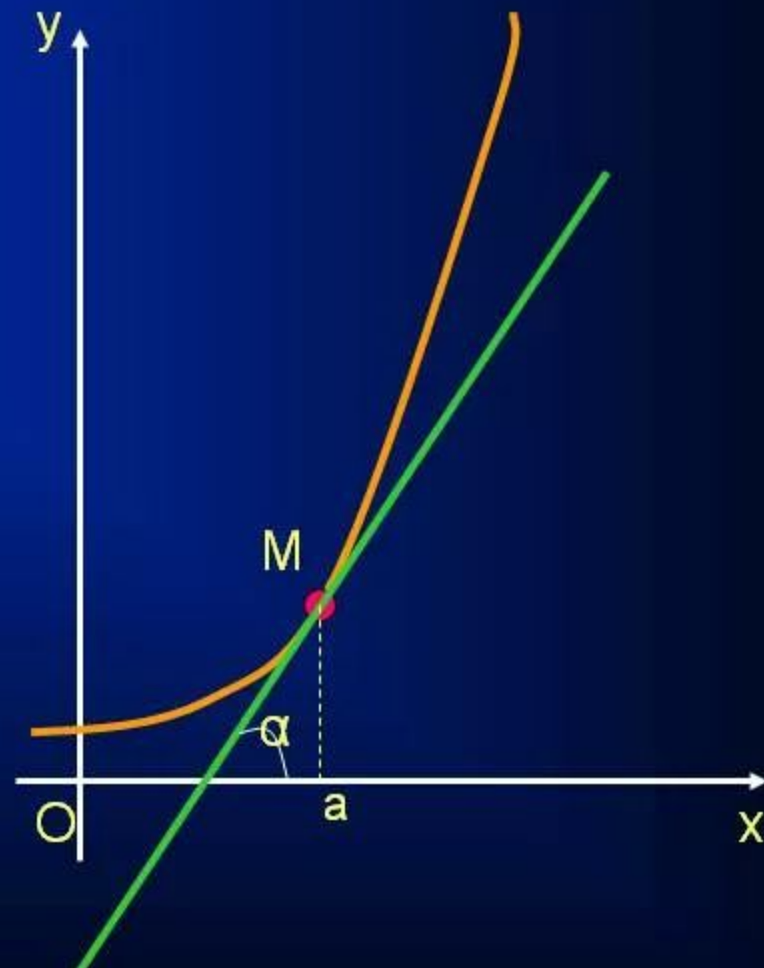
Теорема. *Производная функции* $y = f(kx+m)$ *вычисляется по формуле* $\boxed{(f(kx+m))' = k\cdot f'(kx+m)}$

Геометрический смысл производной

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой

$x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси Оу, то угловой коэффициент касательной

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(a)$$



Физический (механический) смысл производной.

Пусть задан закон движения материальной точки ***x(t)*** вдоль координатной оси, где ***x*** координата движущейся точки, ***t*** – время. ***Скорость в определённый момент времени – это производная координаты по времени***. В этом и состоит *механический смысл* производной.

$$V(t)=x'(t)$$

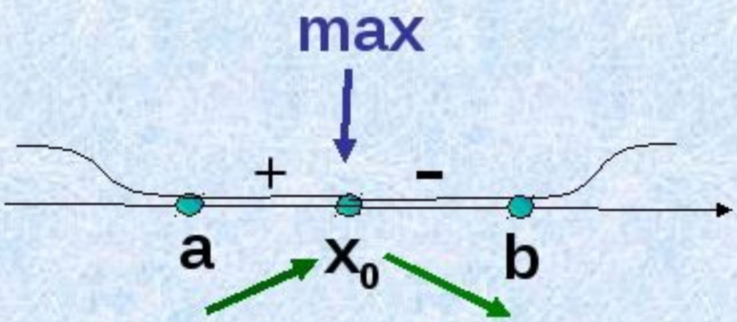
Признаки возрастания и убывания функции:

- Если производная данной функции положительна для всех значений x в интервале (a; $в$), т.е. $f'(x) > 0$, то функция в этом интервале возрастает.
- Если производная данной функции отрицательна для всех значений x в интервале(a; $в$), т.е. $f'(x) < 0$, то функция в этом интервале убывает.

Точки экстремума функции

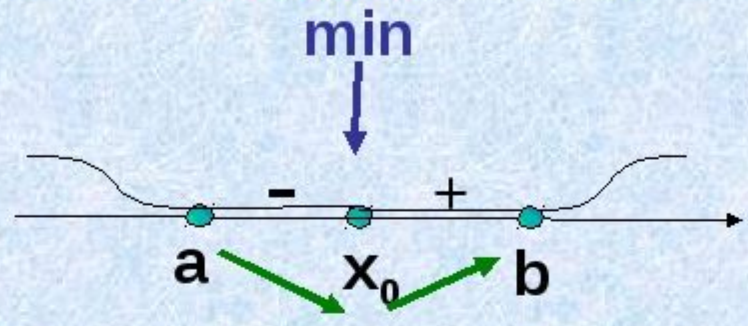
*Если функция f непрерывна в точке x_0, $f^{/}(x)>0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f^{/}(x)<0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой **максимума** функции f.*

*Если в точке x_0 производная меняет знак с + на -, то x_0 точка **максимума** функции.*



*Если функция f непрерывна в точке x_0, $f^{/}(x)<0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f^{/}(x)>0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой **минимума** функции f.*

*Если в точке x_0 производная меняет знак с - на +, то x_0 точка **минимума** функции.*



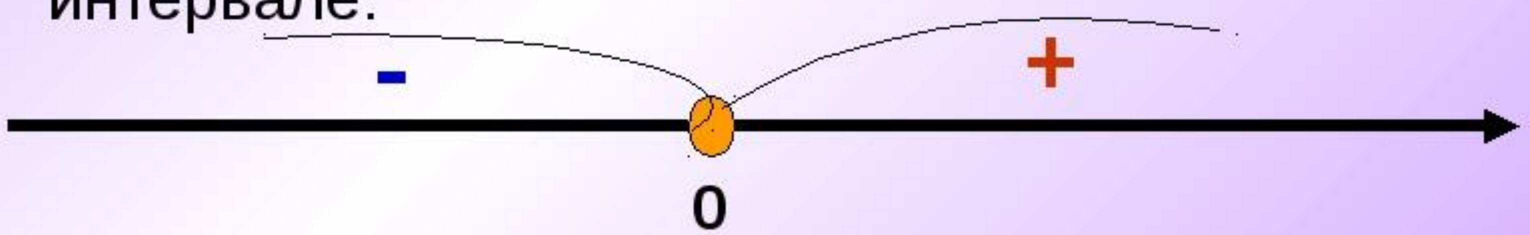
Находим значение функции в точке x_0.

$$y = f(x_0) = \ldots$$

Исследовать на экстремум функцию $y=x^2+2$.

Решение:

1. Находим область определения функции: D(y)=R.
2. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x=0$, откуда $x=0$ – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. x =0 – точка минимума.

Найдём минимум функции $\mathbf{y}_{min}=2$.

Рассмотрим задание 3:

Найти точки экстремума функции $f(x)=x \quad -4x^3$.

Решение:

1) Найдем производную функции:

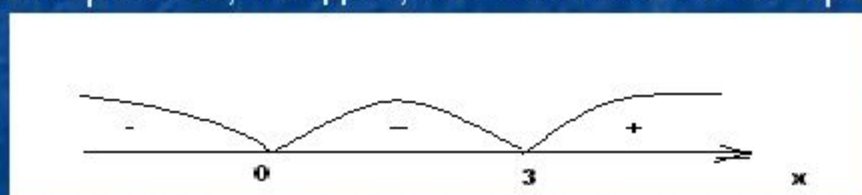
$f'(x)=4x^3-12x^2$

2) Найдем стационарные точки:

$4x^3-12x^2=0$

$X1=0,\ x2=3$.

3) Используя метод интервалов, найдем, как меняется знак производной (см. рисунок):



4) При переходе через точку $x=0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума, а при переходе через точку $x_1=3$ производная меняет знак с «-» на «+», поэтому $x_2=3$ – является точкой минимума.

Ответ: точка $x=3$ является точкой минимума функции $f(x)= x \quad -4x^3$.