

**Тема 2.1. Производная функции.
Дифференциал и его приложение к
приближенным вычислениям.**

План.

- ▶ 1 Приращение аргумента. Приращение функции.
- ▶ 2. Определения производной.
- ▶ 3. Вычисление производных.
- ▶ 4. Правила дифференцирования.
- ▶ 5. Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$
- ▶ 6. Геометрический и механический смысл производной
- ▶ 7. Признаки возрастания и убывания
- ▶ 8. Экстремум функции.

Опр. 1. Пусть ф-я $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1 . Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют **приращением функции**.

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс).

Приращение функции обозначают Δy или Δf .

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$ значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$
 $f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (или Δf), значит

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Пример 1.

Найти приращение функции $y=x^2$ при переходе от точки $x_0=1$ к точке:

а) $x=1,1$;	б) $x=0,9$
Решение $f(1)=1^2=1,$ $f(1,1)=(1,1)^2=1,21$ $\Delta y = f(1,1) - f(1) =$ $1,21 - 1 = 0,21$	Решение $f(1)=1^2=1,$ $f(0,9)=(0,9)^2=0,81$ $\Delta y = f(0,9) - f(1) =$ $0,81 - 1 = -0,19$

Обратите внимание на полученный в примере ответ: приращение функции может быть и положительным и отрицательным числом, так что не истолковывайте термин «приращение» как «прирост».

Опр*. Функция непрерывна в точке $x=a$, если в точке $x=a$ выполняется следующее условие: если , $\Delta x \rightarrow 0$ то $\Delta y \rightarrow 0$

Пример 2.

Для функции $y=x^2$ найти:

а) приращения функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

Решение.

$$f(x)=x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$

$$(x + \Delta x)^2 - x^2 = (x^2 + 2x \cdot \Delta x$$

$$+ (\Delta x)^2) - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\text{Итак, } \Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

Решение.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

При вычислении предела мы учитывали, что x - фиксированная точка (const), Δx - переменная, стремящаяся к нулю.

$$\text{Итак, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

2. Определения производной.

Опр. 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой точке ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем Δy соответствующее приращение функции и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует

предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$ то указанный предел называют **производной функции** $y = f(x)$ **в точке x** и обозначают $f'(x)$

Итак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

иногда производную обозначают y'

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x , то ее называют **дифференцируемой** в точке x . Процедуру отыскания производной функции $y = f(x)$ называют **дифференцированием функции**

$$y = f(x)$$

Формулами **дифференцирования** обычно называют формулы для отыскания производных конкретных функции.

3. Вычисление производных. Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$		

Правила дифференцирования.

Правило 1. Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x , то и их сумма имеет производную в точке x , причем производная суммы равна сумме производных.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

(производная суммы равна сумме производных)

Например, $(x^2 + \sin x)' = 2x + \cos x$

Правило 2. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x , то функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x ,

причем.

$$(kf(x))' = k \cdot f'(x)$$

(постоянный множитель можно вынести за знак производной)

Например, $(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$

Правило 3. Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x , то и их произведение имеет производную в точке x , причем

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(производная произведения двух ф-ий равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой ф-ии на вторую ф-ию, а второе слагаемое есть произведение первой ф-ии на производную второй ф-ии)

Например, $((2x + 3) \sin x)' = (2x + 3)' \cdot \sin x + (2x + 3) \cdot (\sin x)'$

$$= 2 \sin x + (2x + 3) \cdot \cos x$$

Правило 4. Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x , причем

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Например,

$$\left(\frac{x^2}{5-4x} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (5-4x) - x^2 \cdot (5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2x(5-4x) - x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5-4x)^2}$$

5. Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$

С функцией $y = \sin 2x$ можно поступить так.

Известно, что $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Тогда

$$(\sin 2x)' = (2 \sin x \cos x)' = 2((\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)') =$$

$$2(\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$$

Воспользовавшись правилами дифференцирования, мы доказали, что $(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$

Точно также дело будет обстоять и в других случаях.

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}, \quad ((2x+1)^5)' = 2 \cdot 5(2x+1)^4 = 10(2x+1)^4$$

Вообще, справедливо следующее утверждение.

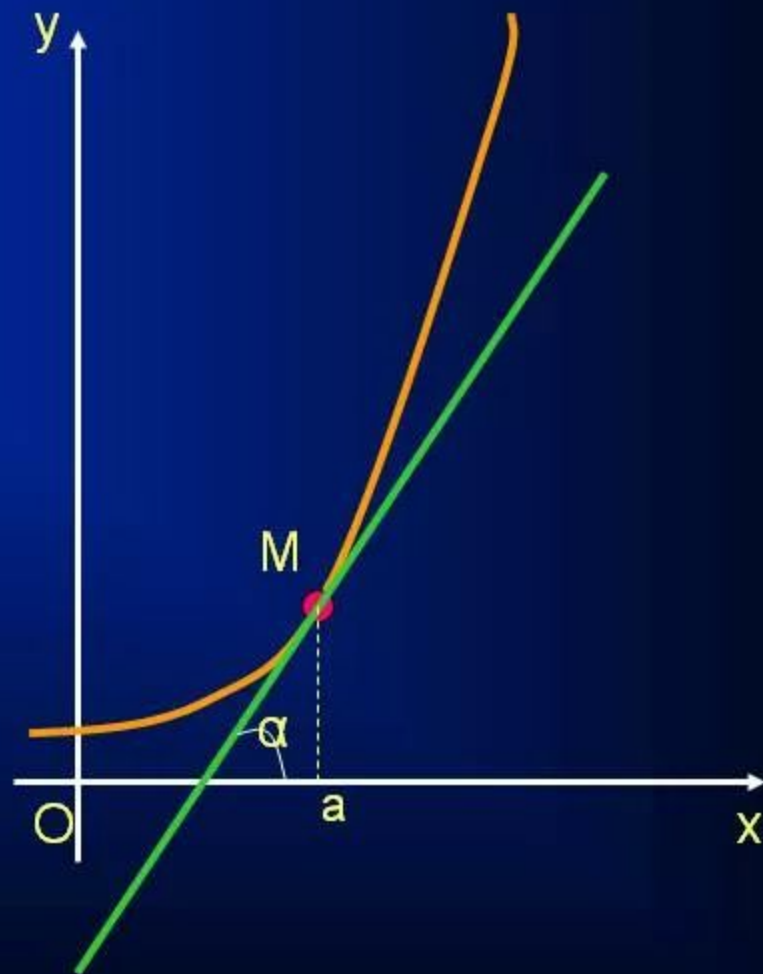
Теорема. Производная функции $y = f(kx + m)$

вычисляется по формуле $(f(kx + m))' = k \cdot f'(kx + m)$

Геометрический смысл производной

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси Oy , то угловым коэффициентом касательной

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(a)$$



Физический (механический) смысл производной.

Пусть задан закон движения материальной точки $x(t)$ вдоль координатной оси, где x координата движущейся точки, t – время.

Скорость в определённый момент времени – это производная координаты по времени. В этом и состоит механический смысл производной.

$$\mathbf{V}(t) = x'(t)$$

Признаки возрастания и убывания функции:

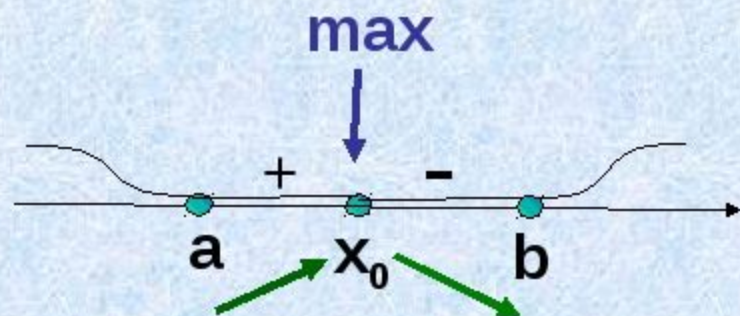
- Если производная данной функции положительна для всех значений x в интервале $(a; b)$, т.е. $f'(x) > 0$, то функция в этом интервале возрастает.
- Если производная данной функции отрицательна для всех значений x в интервале $(a; b)$, т.е. $f'(x) < 0$, то функция в этом интервале убывает.

Точки экстремума функции



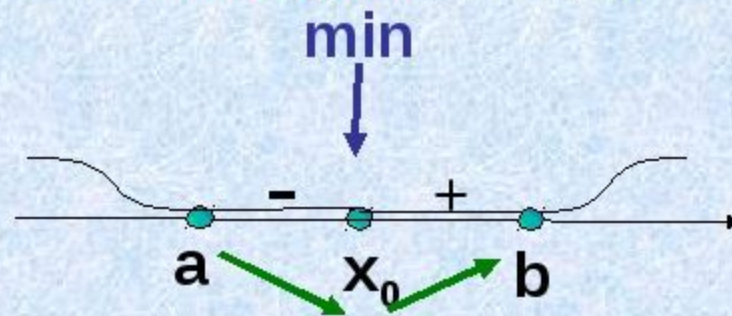
Если функция f непрерывна в точке x_0 , $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой **максимума** функции f .

Если в точке x_0 производная меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 точка **максимума** функции.



Если функция f непрерывна в точке x_0 , $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой **минимума** функции f .

Если в точке x_0 производная меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 точка **минимума** функции.



Находим значение функции в точке x_0 .

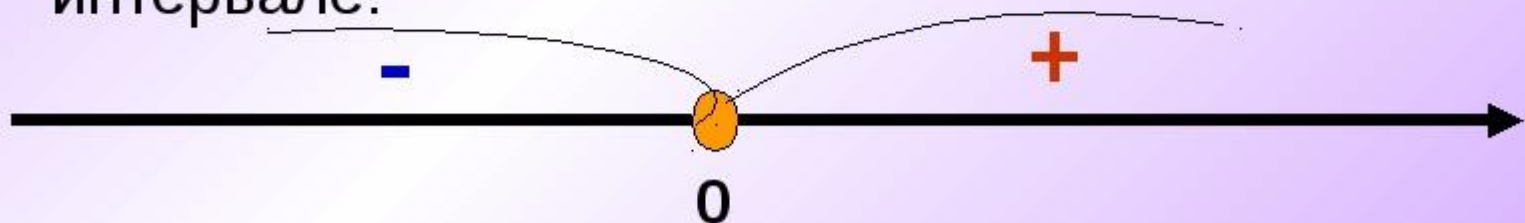
$$y = f(x_0) = \dots$$



Исследовать на экстремум функцию $y=x^2+2$.

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=\mathbb{R}$.
2. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x=0$, откуда $x=0$ – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. $x=0$ – точка минимума.
Найдём минимум функции $y_{\min}=2$.

Рассмотрим задание 3:

Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Решение:

1) Найдем производную функции:

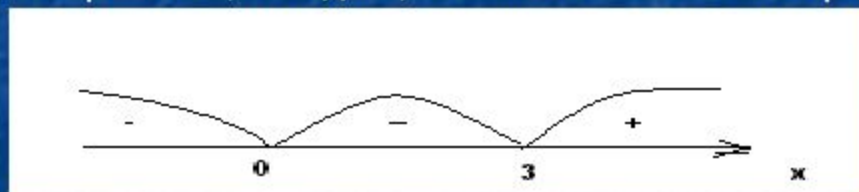
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

2) Найдем стационарные точки:

$$4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3.$$

3) Используя метод интервалов, найдем, как меняется знак производной (см. рисунок):



4) При переходе через точку $x=0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума, а при переходе через точку $x_1=3$ производная меняет знак с «-» на «+», поэтому $x_2=3$ – является точкой минимума.

Ответ: точка $x=3$ является точкой минимума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.