РАЗДЕЛ 5. Дифференциальные уравнения

ТЕМА 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные различных порядков по x.

Общий вид дифференциального уравнения *n*-го порядка:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Порядок дифференциального уравнения

Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Примеры.

Первый порядок $y' = xy$

Второй порядок $y'' + 2y' + y = 0$

Третий порядок $y''' = e^{2x}$

[redacted]

Решение дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество относительно x.

Решить, или **проинтегрировать**, данное дифференциальное уравнение – означает найти все его решения в заданной области.

График решения называется **интегральной кривой**.

Общее и частное решения

Общим решением дифференциального уравнения называется решение, которое содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое получается из общего, если приписать входящим в него произвольным постоянным определенные значения.

Пример

Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + y = 0$$

Легко сообразить, что sin x и cos x являются решениями.

Общее решение:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Частное решение: $$y = 2\sin x - 5\cos x$$

[redacted]

Проверка решений

Если в результате решения некоторого дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то подставив эту функцию в уравнение, можно проверить правильность решения.

Пример. Функция: $y=(C_1+C_2x)e^x$ есть решение уравнения:

$$y''-2y'+y=0$$

Проверка.

$$\begin{aligned} y' &= (C_1+C_2+C_2x)e^x \\ y'' &= (C_1+2C_2+C_2x)e^x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y''-2y'+y=0$$

Уравнение первого порядка

Уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение **разрешено относительно производной**, то оно имеет вид:

$$y' = f(x, y)$$

Постановка задачи Коши

Задача нахождения решения дифференциального уравнения:

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяющего **начальному условию:**

$$y(x_0) = y_0$$

где x_0 и y_0 - заданные числа, называется **задачей Коши** для уравнения первого порядка.

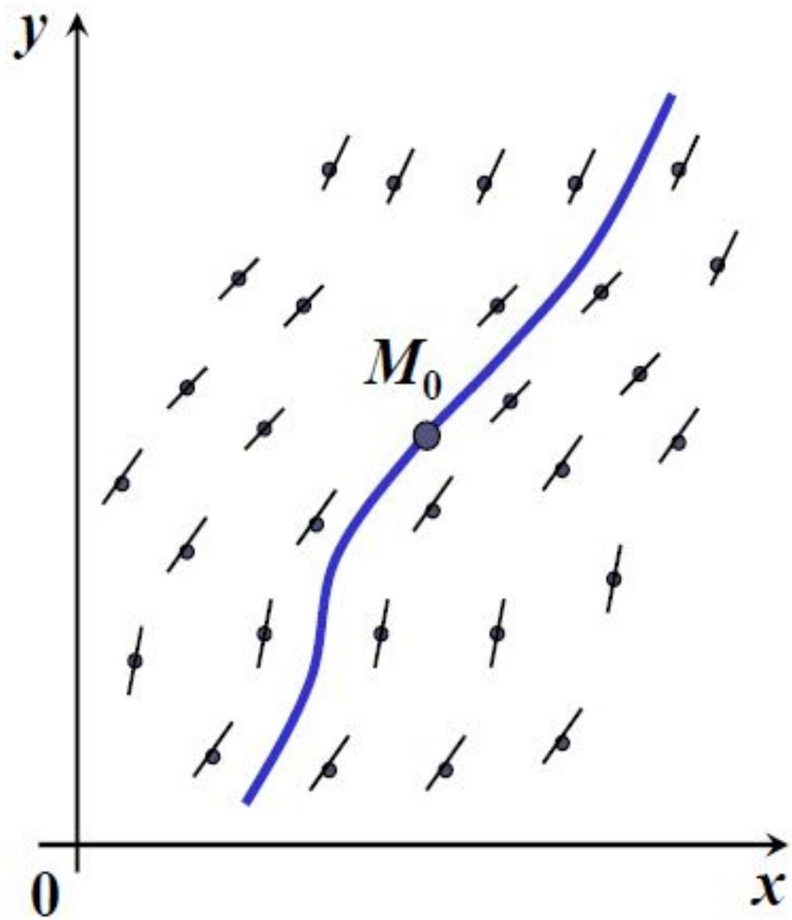
[redacted]

Геометрический смысл

Решить задачу Коши

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

означает **найти интегральную кривую** дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку M_0 (x_0, y_0).



Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение, в котором путем преобразований переменные могут быть разделены, называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**.

Его можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Пример

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

Объяснение. Покажем, как можно разделить переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} \cdot y$$

$$f(x) \cdot g(y)$$

[redacted]

Пример

Требуется найти решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y(2) = 6$$

Решение

1. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

2. Теперь интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

Решение

3. Получаем:

$$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C| = \ln|C(x+1)|$$

$$y = C(x+1)$$

4. По начальному условию определяем значение константы:

$$6 = C(2+1) \Rightarrow C = 2$$

Ответ. Решение дифференциального уравнения:

$$y = 2(x+1)$$

Проверка

Действительно ли уравнение:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

имеет в качестве решения функцию:

$$y = 2(x+1)$$

Проверка.

$$y' = (2(x+1))' = 2 = \frac{2(x+1)}{x+1}$$

[redacted]