

РАЗДЕЛ 5. Дифференциальные уравнения

ТЕМА 5.1 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Задача Коши. Уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения



Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные различных порядков по x .

Общий вид дифференциального уравнения n -го порядка:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Порядок дифференциального уравнения



Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Примеры.

Первый порядок $y' = xy$

Второй порядок $y'' + 2y' + y = 0$

Третий порядок $y''' = e^{2x}$

Решение дифференциального уравнения



Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество относительно x .

Решить, или **проинтегрировать**, данное дифференциальное уравнение – означает найти все его решения в заданной области.

График решения называется **интегральной кривой**.

Общее и частное решения



Общим решением дифференциального уравнения называется решение, которое содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое получается из общего, если приписать входящим в него произвольным постоянным определенные значения.

Пример



Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + y = 0$$

Легко сообразить, что $\sin x$ и $\cos x$ являются решениями.

Общее решение:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Частное решение:

$$y = 2 \sin x - 5 \cos x$$

Проверка решений



Если в результате решения некоторого дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то подставив эту функцию в уравнение, можно проверить правильность решения.

Пример. Функция: $y = (C_1 + C_2x)e^x$ есть решение
уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Проверка.

$$\begin{aligned} y' &= (C_1 + C_2 + C_2x)e^x \\ y'' &= (C_1 + 2C_2 + C_2x)e^x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y'' - 2y' + y = 0$$

Уравнение первого порядка



Уравнение, связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение **разрешено относительно производной**, то оно имеет вид:

$$y' = f(x, y)$$

Постановка задачи Коши



Задача нахождения решения дифференциального уравнения:

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяющего **начальному условию**:

$$y(x_0) = y_0$$

где x_0 и y_0 - заданные числа, называется **задачей Коши** для уравнения первого порядка.

Геометрический смысл

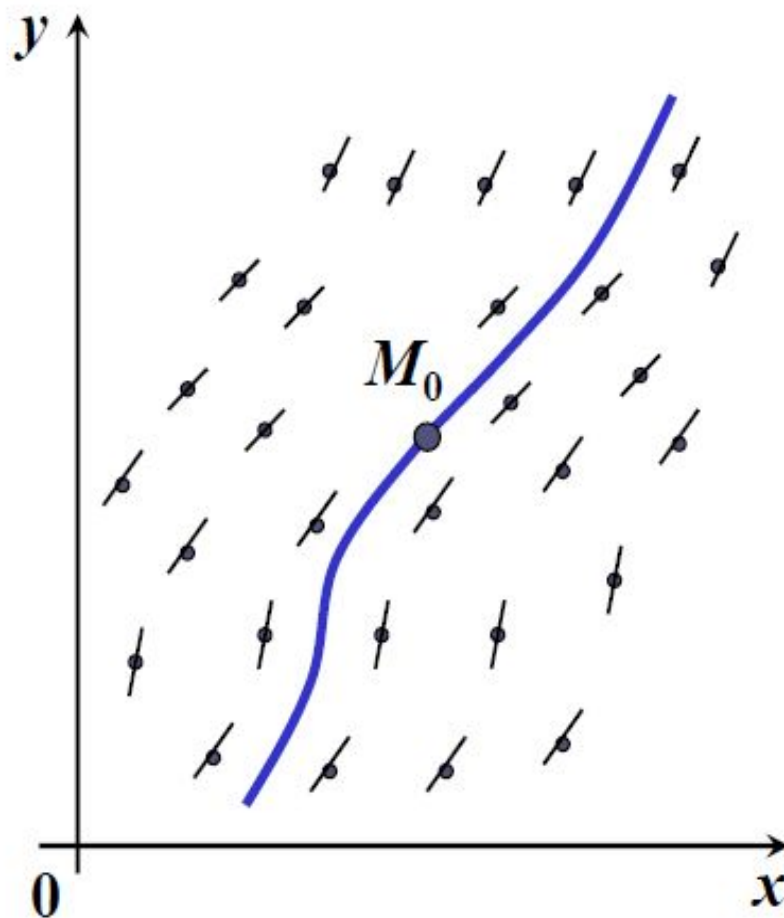


Решить задачу Коши

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

означает **найти интегральную кривую** дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.



Уравнение с разделяющимися переменными



Дифференциальное уравнение, в котором путем преобразований переменные могут быть разделены, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Его можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Пример



Дифференциальное
уравнение

с

разделяющимися

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

Объяснение. Покажем, как можно разделить переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} \cdot y$$

$f(x) \cdot g(y)$

Пример



Требуется найти решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y(2) = 6$$

Решение



1. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

2. Теперь интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

Решение



3. Получаем:

$$\ln|y| = \ln|x + 1| + \ln|C| = \ln|C(x + 1)|$$

$$y = C(x + 1)$$

4. По начальному условию определяем значение константы:

$$6 = C(2 + 1) \quad \longrightarrow \quad C = 2$$

Ответ. Решение дифференциального уравнения:

$$y = 2(x + 1)$$

Проверка



Действительно ли уравнение:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

имеет в качестве решения функцию:

$$y = 2(x+1)$$

Проверка.

$$y' = (2(x+1))' = 2 = \frac{2(x+1)}{x+1}$$