§2. Интегрирование неотрицательных измеримых функций

1. Определение. Пусть $C \in \Sigma$ и функция $f : C \to [0, +\infty]$ измерима. В этом случае *интеграл от функции* f *по мере* μ *по множеству* C определяется равенством

$$\int_C f\, d\mu = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int_C \varphi\, d\mu, \quad (1)$$

где супремум берется по всем простым функциям $\varphi : S \to \mathbb{R}$ таким, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant f(t)$ для всех $t \in C$.

Если $B \subset C$, $B \in \Sigma$, то по определению $\int_B f\, d\mu = \int_C f\big|_B\, d\mu$.

(с) *Если* $B, C \in \Sigma$ *и* $B \subset C$, *то* $\int_B f\, d\mu \leqslant \int_C f\, d\mu$.

Доказательство. Пусть простая функция φ участвует в определении интеграла $\int_B f\, d\mu$, т.е. $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant f(t)$ для всех $t \in B$. Функция

$$\tilde{\varphi} : S \to \mathbb{R},\ \tilde{\varphi}(t) = (\chi_B \varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad t \in B, \\ 0, & \text{если} \quad t \in S \setminus B, \end{cases}$$

является простой, удовлетворяет условию $0 \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant f$ на C, равна 0 на $C \setminus B$. Применяя теорему 4, свойства (с) и (е) из §1, получим

$$\int_C \tilde{\varphi}\, d\mu = \int_B \tilde{\varphi}\, d\mu + \int_{C\setminus B} \tilde{\varphi}\, d\mu = \int_B \tilde{\varphi}\, d\mu + \int_{C\setminus B} 0 \cdot d\mu = \int_B \tilde{\varphi}\, d\mu + 0 = \int_B \tilde{\varphi}\, d\mu = \int_B \varphi\, d\mu .$$

Поскольку $0 \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant f$ на C, то $\tilde{\varphi}$ участвует в определении интеграла $\int_C f\, d\mu$. Поэтому

$$\int_B f\, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \text{на } B}} \int_B \varphi\, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \text{на } B}} \int_C \tilde{\varphi}\, d\mu \leqslant \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \text{на } C}} \int_C \varphi\, d\mu = \int_C f\, d\mu . \square$$

(d) *Пусть* $C \in \Sigma$, *функции* $f,\, g : C \to [0, +\infty]$ *измеримы и* $0 \leqslant f \leqslant g$ *на* C. *Тогда* $\int_C f\, d\mu \leqslant \int_C g\, d\mu$.

Доказательство. Это очевидное следствие определения (1).

(e) *Если функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $\alpha > 0$, *то* $\int\limits_C \alpha f \, d\mu = \alpha \cdot \int\limits_C f \, d\mu$.

Доказательство. Это следует из свойства (d) §1:

$$\alpha \cdot \int\limits_C f \, d\mu = \alpha \cdot \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \varphi \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \left(\alpha \cdot \int\limits_C \varphi \, d\mu \right) = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \alpha\varphi \, d\mu =$$

$$= \sup_{0 \leqslant \alpha\varphi \leqslant \alpha f} \int\limits_C \alpha\varphi \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant \alpha f} \int\limits_C \psi \, d\mu = \int\limits_C \alpha f \, d\mu. \quad \square$$

(f) *Если функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $\int\limits_C f \, d\mu < +\infty$, *то*

$$\mu \{ t \in C \, ; \, f(t) = +\infty \} = 0 .$$

Доказательство. Обозначим $B = \{t \in C \ ; \ f(t) = +\infty\}$. Допустим, что $\mu B > 0$. Так как пространство (S, Σ, μ) не имеет атомов бесконечной меры, найдется множество $D \in \Sigma$ такое, что $D \subset B$ и $0 < \mu D < +\infty$ (если $0 < \mu B < +\infty$, то положим $D = B$).

Для простых функций $\varphi_n = n\chi_D$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ на C, так как $\varphi_n(t) = 0$ при $t \in S \setminus D$ и $f(t) = +\infty$ при $t \in D$. Следовательно, $\int\limits_C f\, d\mu = \sup\limits_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \varphi\, d\mu \geqslant \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_C \varphi_n\, d\mu = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (n \cdot \mu D) = +\infty$.

Это противоречит условию, что $\int\limits_C f\, d\mu < +\infty$. □

(g) *Если функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима,* $\int\limits_C f\, d\mu < +\infty$ *и* $\alpha > 0$, *то множество* $B_\alpha = \{t \in C \ ; \ f(t) \geqslant \alpha\}$ *измеримо,* $\alpha \cdot \mu(B_\alpha) \leqslant \int\limits_C f\, d\mu$ *и, следовательно,* $\mu B_\alpha < +\infty$.

Доказательство. Измеримость множества B_α следует из измеримости функции f. Докажем, что есть последовательность множеств $D_n \in \Sigma$ конечной меры таких, что

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots, \text{все } D_n \subset B_\alpha \text{ и } \mu B_\alpha = \lim_{n\to\infty} \mu D_n. \quad (5)$$

Если $\mu B_\alpha < +\infty$, то положим $D_n = B_\alpha$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mu B_\alpha = +\infty$ и $\beta = \sup\{\mu D\ ;\ D \subset B_\alpha,\ \mu D < +\infty\}$.

Допустим, что $\beta < +\infty$. Выберем множества $D_n \subset B_\alpha$ так, что

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots \text{ и } \beta - \frac{1}{n} < \mu D_n < \beta.$$

Для множества $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots$ имеем $D \subset B_\alpha$ и $\mu D = \beta$. Коль скоро $\beta < +\infty$, то $B_\alpha \setminus D$ все еще имеет меру $\mu\left(B_\alpha \setminus D\right) = +\infty$. Поскольку в (S, Σ, μ) нет атомов бесконечной меры, то существует множество $E \subset B_\alpha \setminus D$ с мерой $0 < \mu E < +\infty$. Для множества $E \sqcup D$ имеем $E \sqcup D \subset B_\alpha$ и $\mu\left(E \sqcup D\right) = \mu E + \mu D = \mu E + \beta > \beta$ вопреки определению числа β.

Таким образом, $\beta = +\infty$ и согласно определению β найдутся множества $D_n \subset B_\alpha$ с мерой $\mu(D_n) < +\infty$ такие, что $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu D_n = \beta = +\infty = \mu B_\alpha$.

Функции $\varphi_n = \alpha \cdot \chi_{D_n}$, $n \in \mathbb{N}$, – простые. Если $t \in C \setminus D_n$, то $\varphi_n(t) = 0 \leqslant f(t)$. Если $t \in D_n$, то $t \in B_\alpha$ и $\varphi_n(t) = \alpha \leqslant f(t)$. Таким образом, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ на множестве C и, следовательно, функции φ_n участвуют в определении интеграла $\int\limits_C f\, d\mu$. Поэтому

$$\alpha \cdot \mu D_n = \alpha \cdot \mu(C \cap D_n) = \int\limits_C \varphi_n\, d\mu \leqslant \int\limits_C f\, d\mu .$$

Применяя теорему о непрерывности меры (теорема 6 §2 гл.1) и равенство (5), имеем теперь

$$\alpha \cdot \mu B_\alpha = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \mu D_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha \cdot \mu D_n) \leqslant \int\limits_C f\, d\mu . \square$$

(h) *Пусть* B, $C \in \Sigma$, $B \subset C$, *функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $f = 0$ *на* $C \setminus B$. *Тогда* $\int\limits_B f\, d\mu = \int\limits_C f\, d\mu$.

Доказательство. Если φ – простая функция и $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C, то $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на B и $\varphi = f = 0$ на $C \setminus B$. Применяя следствие 5 §1, получим $\int\limits_C \varphi\, d\mu = \int\limits_B \varphi\, d\mu \leqslant \int\limits_B f\, d\mu$.

Переходя здесь к супремуму по простым функциям φ таким, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C, получим $\int\limits_C f\, d\mu \leqslant \int\limits_B f\, d\mu$. Обратное неравенство $\int\limits_B f\, d\mu \leqslant \int\limits_C f\, d\mu$ справедливо по свойству (с).

(i) *Если* $C \in \Sigma$ *и* $\mu C = 0$, *то каждая функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $\int_C f \, d\mu = 0$.

Доказательство. Измеримость функции f следует из полноты пространства (S, Σ, μ) в смысле Лебега (любое подмножество множества меры 0 измеримо). Равенство $\int_C f \, d\mu = 0$ очевидно, так как по свойству (с) §1 $\int_C \varphi \, d\mu = 0$ для каждой простой функции φ.

§3. Основные свойства интеграла от неотрицательных измеримых функций

1. Теорема. (Б. Леви о монотонной сходимости). *Пусть* $C \in \Sigma$, *функции* $f_n : C \to [0, +\infty]$ *измеримы и последовательность* (f_n) *возрастает, т.е.* $f_1(t) \leqslant f_2(t) \leqslant \ldots \leqslant f_n(t) \leqslant \ldots$ *для всех* $t \in C$. *Тогда функция* $f : C \to [0, +\infty]$, *действующая по формуле*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(t),\ t \in C, \tag{1}$$

измерима и справедливо равенство

$$\int_C f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n\,d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_C f_n\,d\mu. \tag{2}$$

Доказательство. Измеримость функции f обеспечена теоремой об измеримости супремума последовательности измеримых функций. Вторые равенства в (1) и в (2) очевидны (по теореме Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности вещественных чисел).

Обозначим $\alpha = \int\limits_C f\, d\mu$, $\alpha_n = \int\limits_C f_n\, d\mu$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.

По свойству (d) §2 имеем $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots$ и еще $\alpha_n \leqslant \alpha$. Из последнего неравенства следует, что $\beta \leqslant \alpha$. Нам надо доказать, что $\beta = \alpha$.

Для доказательства обратного неравенства фиксируем число $\delta \in (0,1)$ и простую функцию φ такую, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C. Обозначим $C_n = \{t \in C\ ;\ f_n(t) \geqslant \delta\cdot\varphi(t)\}$.

Функции $f_n - \delta\cdot\varphi$, $n \in \mathbb{N}$, определены на множестве C и измеримы. Значит, все $C_n \in \Sigma$. Ясно также, что последовательность множеств (C_n) возрастает. Легко понять, что $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. (3)

Действительно, $C_n \subset C$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \subset C$.

Обратно, пусть $t \in C$. Если $\varphi(t) = 0$, то $t \in C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (так как $f_n \geqslant 0$) и поэтому $t \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Пусть $\varphi(t) > 0$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t) \geqslant \varphi(t) > \delta \varphi(t)$$

Значит, $f_n(t) > \delta \varphi(t)$, т.е. $t \in C_n$ для всех достаточно больших n. Поэтому $t \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Равенство (3) доказано.

По теореме 4 §1 отображение $\mu_\varphi : \Sigma \to [0, +\infty)$, $\mu_\varphi(A) = \int\limits_A \varphi \, d\mu$ для всех $A \in \Sigma$, является мерой. Применяя к этой мере теорему 6 §2 гл.1 о непрерывности меры, получим

$$\int\limits_C \varphi \, d\mu = \mu_\varphi(C) = \lim_{n \to \infty} \mu_\varphi(C_n) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{C_n} \varphi \, d\mu . (4)$$

Кроме того, из свойств (c) и (d) §2 следует, что

$$\alpha_n = \int_C f_n \, d\mu \geqslant \int_{C_n} f_n \, d\mu \geqslant \int_{C_n} \delta\varphi \, d\mu = \delta \int_{C_n} \varphi \, d\mu .$$

Отсюда и из (4) имеем

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \geqslant \delta \cdot \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \varphi \, d\mu = \delta \cdot \int_C \varphi \, d\mu .$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 1-0$, получим неравенство $\beta \geqslant \int_C \varphi \, d\mu$.

Здесь φ произвольная простая функция, удовлетворяющая условию $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C. Переходя к супремуму по всем таким φ, получим неравенство $\beta \geqslant \sup\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant f} \int_C \varphi \, d\mu = \int_C f \, d\mu = \alpha$.

Ранее мы отметили, что $\beta \leqslant \alpha$. Следовательно, $\beta = \alpha$, т.е. верно равенство (2). $\square$

2. Теорема. (Интегрирование суммы неотрицательных измеримых функций). *Пусть* $C \in \Sigma$ *и функции* f, $g : C \to [0, +\infty]$ *измеримы. Тогда*

$$\int_C (f + g)\, d\mu = \int_C f\, d\mu + \int_C g\, d\mu . \tag{4}$$

Доказательство. Функция $f + g$ на множестве C также неотрицательна. Множества $f^{-1}(+\infty)$ и $g^{-1}(+\infty)$ согласно следствию теоремы 3 §3 гл.1 измеримы. Функция $f + g$ на множестве $B = f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty)$ постоянна (равна $+\infty$) и поэтому измерима. На множестве $C \setminus B$ функция $f + g$ измерима по свойству (d) §3 гл.1. Применяя еще свойство (b) §3 гл.1, заключаем, что функция $f + g : C \to [0, +\infty]$ измерима.

Если один из интегралов правой части равенства (4) равен $+\infty$, то левый интеграл также равен $+\infty$, по свойству (d) §2 и, значит в этом случае равенство (4) верно.

Допустим, что конечны оба интеграла правой части равенства (4). В этом случае нам потребуется следующая лемма

3. Лемма. *Пусть функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $\int\limits_C f \, d\mu < +\infty$. *Тогда существует возрастающая последовательность* (φ_n) *неотрицательных простых функций такая, что*

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) \text{ для всех } t \in C. \tag{5}$$

Доказательство леммы. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и k, $1 \leqslant k \leqslant n2^n$, обозначим $A_n = \{t \in C \,;\; f(t) \geqslant n\}$,

$$B_{kn} = f^{-1}\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) = \left\{t \in C \,;\; \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(t) < \frac{k}{2^n}\right\}. \tag{6}$$

При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ множества A_n и B_{kn}, $k = 1, 2, \ldots, n2^n$, попарно не пересекаются. По свойству (g) §2 из условия $\int\limits_C f \, d\mu < +\infty$ следует, что для каждого $\alpha > 0$ множество $\{t \in C \,;\; f(t) \geqslant \alpha\}$ имеет конечную меру. В частности, таково множество A_n. При $k > 1$ множество (4) также имеет конечную меру, так как содержится во множестве

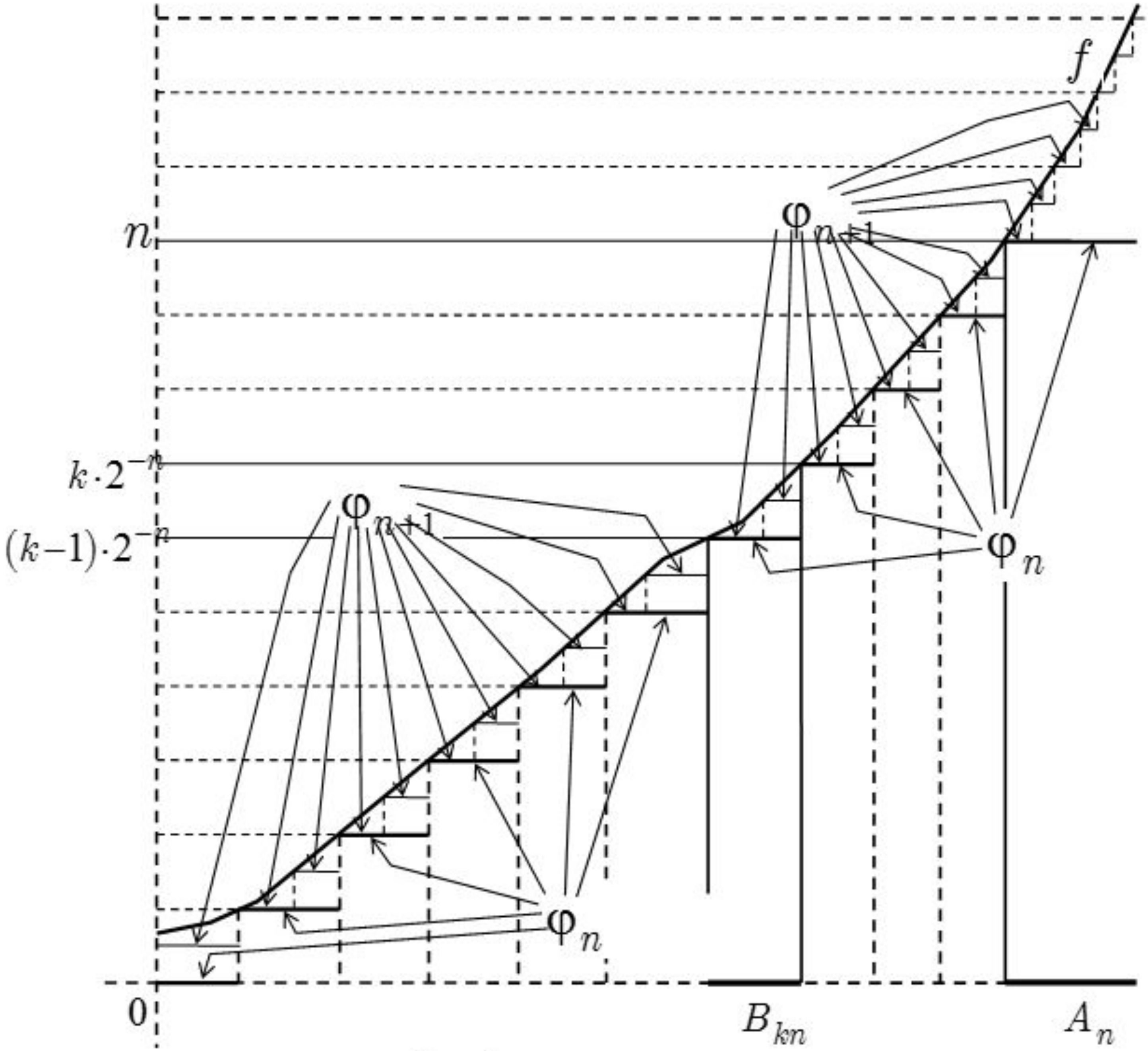
$$\left\{ t \in C \; ; \; f(t) \geqslant \frac{k-1}{2^n} \right\}.$$

Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция (см. рис. 1)

$$\varphi_n = \sum_{k=2}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{n} \cdot \chi_{B_{kn}} + n \cdot \chi_{A_n} \qquad (7)$$

является простой. Ясно также, что все $\varphi_n \geqslant 0$ и последовательность (φ_n) возрастает.

Легко понять, что верно и равенство (5). Действительно, пусть $t \in C$. Если $f(t) = +\infty$, то $t \in A_n$ и, значит, $\varphi_n(t) = n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому в данном случае $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \lim\limits_{n \to \infty} n = +\infty = f(t)$.



f
φ_{n+1}
n
$k\cdot 2^{-n}$
$(k-1)\cdot 2^{-n}$
φ_{n+1}
φ_n
φ_n
0
B_{kn}
A_n

Рис.1.

Пусть $f(t) < +\infty$ и $N \in \mathbb{N}$ столь велико, что $f(t) < N$. По условию $f(t) \geqslant 0$. Для каждого $n \geqslant N$ тогда $0 \leqslant f(t) < n$ и существует i, $1 \leqslant i \leqslant n \cdot 2^N$ такое, что $\frac{i-1}{2^n} \leqslant f(t) < \frac{i}{2^n}$. Если здесь $i = 1$, то $t \in B_{1n}$ и

$$\varphi_n(t) = 0 \leqslant f(t) < \frac{1}{2^n}, \qquad (8)$$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n = f$$

так, что $\quad 0 \leqslant f(t) - \varphi_n(t) < \frac{1}{2^n}$. $\qquad (9)$

Пусть $2 \leqslant i \leqslant n \cdot 2^N$. В этом случае $t \in B_{in}$ и согласно (7)

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=2}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{n} \cdot \chi_{B_{kn}}(t) + n \cdot \chi_{A_n}(t) = \frac{i-1}{n} \cdot \chi_{B_{in}}(t) = \frac{i-1}{n}.$$

Поэтому из (8) снова следует неравенство (9).

Итак, если $f(t) < +\infty$, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство (9). Отсюда ясно, что равенство (5) справедливо и в случае $f(t) < +\infty$.

Доказательство теоремы 2 (окончание). Итак, пусть

$$\int_C f\, d\mu < +\infty \text{ и } \int_C g\, d\mu < +\infty .$$

По лемме 3 существуют возрастающие последовательности (φ_n) и (ψ_n) простых функций, такие, что для каждого $t \in C$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = f(t) \text{ и } \lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = g(t).$$

Тогда последовательность $(\varphi_n + \psi_n)$ также возрастает и

$$\lim_{n\to\infty} \left[\varphi_n(t) + \psi_n(t) \right] = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) + \lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = f(t) + g(t).$$

для всех $t \in C$.

По части (*) теоремы 6 §1 для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int_C (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \int_C \varphi_n\, d\mu + \int_C \psi_n\, d\mu .$$

Переходя здесь к пределу (и применяя при этом теорему 1 о монотонной сходимости) получим искомое равенство (1).

4. Теорема. (О почленном интегрировании функционального ряда из неотрицательных измеримых функций). *Пусть* (f_n) – *последовательность неотрицательных измеримых функций на множестве* $C \in \Sigma$. *Тогда функция* $f : C \to [0, +\infty]$, *действующая по формуле* $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ *для каждого* $t \in C$, *измерима и справедливо равенство*

$$\int\limits_C f \, d\mu = \int\limits_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C f_n \, d\mu .$$

Доказательство. Обозначим $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$. Функции g_n измеримы, неотрицательны, образуют возрастающую последовательность и $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to \infty} g_n(t)$ для каждого $t \in C$.

По теореме 2 функция для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int_C g_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_C f_k \, d\mu .$$

Применяя еще теорему Б. Леви о монотонной сходимости, получим

$$\int_C f \, d\mu = \int_C \left(\lim_{n \to \infty} g_n \right) d\mu =$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_C g_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_C f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k \, d\mu . \square$$

5. Теорема. (О нулевом интеграле). *Пусть* $C \in \Sigma$. *Для измеримой функции* $f : C \to [0, +\infty]$ *равносильны равенства*:

(*) $\int_C f \, d\mu = 0$, (**) $\mu B = 0$, где $B = \{t \in C \,;\; f(t) > 0\}$.

Доказательство. Пусть $\int_C f \, d\mu = 0$. Обозначим

$$B = \{t \in C \,;\; f(t) > 0\}, \;\; B_n = \{t \in C \,;\; f(t) > 1/n\}, \;\; n \in \mathbb{N} .$$

Тогда $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Согласно свойству (g) §2 $\mu B_n < +\infty$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Значит, функции $\varphi_n = \frac{1}{n} \chi_{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, – простые. Очевидно $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ на C и поэтому

$$0 = \int_C f \, d\mu \geqslant \int_C \varphi_n \, d\mu = \frac{\mu B_n}{n}.$$

Отсюда следует, что $\mu B_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, и $\mu B = 0$.

С другой стороны, пусть $\mu B = 0$ и φ – простая функция такая, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C. Поскольку $f = 0$ на $C \setminus B$, то и $\varphi = 0$ на $C \setminus B$. Поэтому $\int_{C \setminus B} \varphi \, d\mu = 0$. Из равенства $\mu B = 0$ согласно свойству 1(c) следует, что $\int_B \varphi \, d\mu = 0$. По части (*) теоремы 6 §1

$$\int_C \varphi \, d\mu = \int_{C \setminus B} \varphi \, d\mu + \int_B \varphi \, d\mu = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_C f\, d\mu \;=\; \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \varphi\, d\mu \;=\; 0. \qquad \square$$