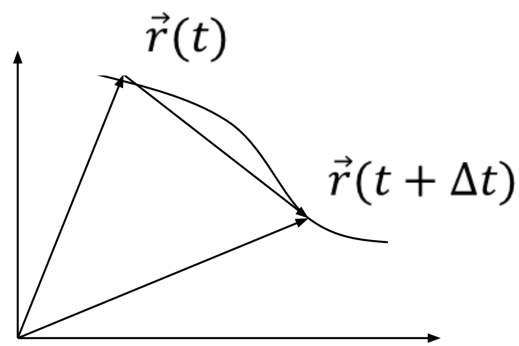
Механика.

- Лектор:
- Парахин А.С., к. ф.-м. наук, доцент.

2.3. Кинематические характеристики движения.

- Пусть в некоторый момент времени t положение материальной точки характеризовалось радиусом вектором $\vec{r}(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$, радиусом вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$.



Перемещение

- Определение. Вектор, соединяющий начальное и конечное положение материальной точки в течение промежутка времени Δt, называется её перемещением за этот промежуток времени.
- $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$
- Как видно из определения, перемещение есть векторная величина, а длина перемещения измеряется в метрах. Этот факт записывают таким образом: $[|\Delta\vec{r}|] = \text{м}$

Перемещение в координатном виде.

- Так как любой вектор можно разложить по осям координат, перемещение также можно выразить через координаты радиуса вектора
- $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

Перемещение при малом промежутке времени.

- Обозначим начальную точку А, а конечную В. Если промежуток времени устремить к нулю, точка В будет стремиться к точке А. В этом случае перемещение будет по направлению стремиться к единичному вектору касательной $\vec{\tau}$.
- Progr D: Progr E: Progr F: Progr G:

Элемент.

- Progr E:

Элемент

- В физике элементом какой либо физической величины называется такое достаточно малое изменение этой величины, которое по условиям задачи можно считать бесконечно малым по отношению к другим значениям этой величины. Элементы физических величин обозначают обозначениями самой этой величины с добавлением латинской буквы d слева от обозначения величины. Таким образом, dt есть обозначение бесконечно малого промежутка времени, т.е. элементарного промежутка или элемента времени.

Элементарное перемещение.

- Если в качестве промежутка времени выбран элементарный, то перемещение за такой промежуток времени также будет элементарным. Его обозначают $d\vec{r}$. Используя это понятие можно сказать, что элементарное перемещение параллельно вектору касательной, т.е.
- $d\vec{r} \parallel \vec{\tau}$

Проекция элементарного перемещения на вектор касательной.

- Если обозначить dr_τ- проекцию элементарного перемещения на направление касательной, то для элементарного перемещения можно записать
- $d\vec{r} = dr_\tau \vec{\tau}.$

Элементарный путь.

- Так как за достаточно малый промежуток времени точка движется в одну сторону, то элементарное изменение естественной координаты, модуль элементарного перемещения и модуль пути будут равны. Точнее говоря, они будут отличаться друг от друга на величины более высокого порядка малости, чем сами эти величины.
- $|d\vec{r}| = |d\lambda| = |ds| = |dr_\tau|$

2.4. Скорость.

- Для описания быстроты движения тела нужно знать мгновенную скорость.
- Определение. Мгновенной скоростью или просто скоростью движения материальной точки называется векторная величина, равная производной от радиуса вектора материальной точки по времени.
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Элемент функции.

- Пусть задана функция $y = f(x)$.
- Определение.
- Элементом функции или элементарным изменением функции называется разность между значениями функции в точке $x + dx$ и в точке x. Обозначается df и по определению
- $df = f(x + dx) - f(x)$

Производная функции.

- Определение.
- Производной некоторой функции называется отношение элемента функции к соответствующему элементу аргумента, т.е. $\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$.
- Для определения скорости нужно элементарное изменение радиуса вектора разделить на соответствующее элементарное изменение времени.

Направление мгновенной скорости.

- Таким образом, скорость материальной точки есть векторная величина. Она направлена по направлению элементарного перемещения, а элементарное перемещение – по касательной, значит, скорость направлена по касательной к траектории.
- $\vec{v} \parallel \vec{\tau}$

Координаты скорости.

- Таким образом, скорость материальной точки есть векторная величина. Как и любая другая векторная величина, скорость материальной точки соответствует трём скалярным величинам, а именно, её проекциям на оси координат
- $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$
- $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

Единицы измерения скорости.

- Из определения мгновенной скорости следует, $[|\vec{v}|] = \text{м}/c$. Кроме этой системной единицы измерения скорости на практике часто используют несистемные единицы, самой распространённой из которых является $\text{км}/\text{час}$. Чтобы перевести скорость из $\text{м}/\text{с}$ в $\text{км}/\text{ч}$, нужно умножить значение скорости на 3.6, при обратном переводе – разделить.

2.6. Ускорение в криволинейном движении. Нормальное и тангенциальное ускорение.

- Предположим, что точка движется по окружности. Обозначим $\vec{\tau}$- единичный вектор касательной, указывающий положительное направление на окружности. С его помощью вектор скорости можно выразить следующим образом:
- $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}.$
- Чтобы найти ускорение, нужно продифференцировать это выражение, как произведение двух функций.
- $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$

Ускорение при криволинейном движении.

- Чтобы найти ускорение, нужно продифференцировать это выражение, как произведение двух функций.
- $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$

Тангенциальное ускорение.

- Отсюда видно, что ускорение в общем случае состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое называется тангенциальным ускорением. Оно направлено по касательной, о чём говорит направление единичного вектора касательной. Если модуль скорости убывает, производная от касательной проекции скорости по времени отрицательна, и тангенциальное ускорение направлено против скорости, в противном случае - по вектору скорости.

Направление тангенциального ускорения.

- По величине это слагаемое показывает, как быстро меняется касательная проекция скорости. Тангенциальное ускорение обозначают $\vec{a}_\tau$.
- Таким образом:
- $\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}$

Нормальное ускорение.

- Второе слагаемое называют нормальным ускорением. Оно направлено к центру окружности и равно по величине $\frac{v^2}{R}$

Полное ускорение.

- Полное ускорение представляется в виде суммы двух слагаемых
- $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$
- Так как тангенциальное и нормальное ускорение перпендикулярны, то полное ускорение по модулю можно найти с помощью теоремы Пифагора
- $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$

Типы переменного движения.

- Если ускорение есть нуль, движение равномерное, если ускорение константа – движение равнопеременное, если тангенциальное ускорение нуль, движение равномерно по траектории, если константа – движение равнопеременное по траектории.

Замедленные и ускоренные движения.

- При этом если скорость и тангенциальное ускорение совпадают по направлению, скорость растёт, и движение называется ускоренным. Если скорость и тангенциальное ускорение противоположны, скорость убывает, и движение называется замедленным.

2.7. Перемещение в различных движениях, законы различных движений.

- Если скорость материальной точки задана, как функция времени, то пользуясь определением скорости можно найти радиус-вектор, как функцию времени. А именно:
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow d\vec{r} = \vec{v}dt$

- Чтоб найти радиус вектор, нужно проинтегрировать.
- $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt$
- В частном случае $\vec{v} = const$
- $\vec{r}(t) = \vec{v}t + const$

Закон равномерного движения.

- Постоянная величина находится из так называемых начальных условий $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$. Подставив это условие в закон движения, найдём постоянное слагаемое $const = \vec{r}_0 - \vec{v}t_0$. Теперь эту константу подставим в закон равномерного движения и получим один из самых распространённых законов движения материальной точки.
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$
- Закон равномерного движения.

Закон равномерного движения в координатном виде.

- Закон равномерного движения можно записать и в координатной форме
- $x(t) = x_0 + v_x(t - t_0)$
- $y(t) = y_0 + v_y(t - t_0)$
- $z(t) = z_0 + v_z(t - t_0)$

Скорость через ускорение.

- Если ускорение материальной точки задано, как функция времени, её скорость можно найти с помощью определения ускорения, а именно
- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt.$

Скорость при постоянном ускорении.

- Если ускорение материальной точки есть величина постоянная, т.е. движение равнопеременное, интеграл в формуле скорости находится достаточно просто.
- $\vec{v}(t) = \vec{a}t + const$
- Эта формула называется законом изменения скорости при равнопеременном движении.

Равноускоренное и равнозамедленное движение.

- Если скорость сонаправлена с ускорением, движение называется равноускоренным, в противном случае – равнозамедленным.

Начальные условия для скорости.

- Константа вновь находится из начальных условий уже для скорости:
- $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$
- Подставляя эти начальные условия в формулу скорости и определив константу, найдём закон изменения скорости
- $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$

Закон изменения скорости в координатном виде.

- Закон изменения скорости можно записать в координатном виде:
- $v_x(t) = v_{x0} + a_x(t - t_0)$
- $v_y(t) = v_{y0} + a_y(t - t_0)$
- $v_z(t) = v_{z0} + a_z(t - t_0)$

Закон равнопеременного движения.

- Зная закон изменения скорости для равнопеременного движения, можно найти и закон этого движения, т.е. найти $\vec{r}(t)$
- $\vec{r}(t) = \int [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)]dt$
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}(t-t_0)^2}{2}$

Закон равнопеременного движения в координатном виде.

- Этот закон можно записать и в координатном виде
- $x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) + \frac{a_x(t-t_0)^2}{2}$
- $y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{a_y(t-t_0)^2}{2}$
- $z(t) = z_0 + v_{z0}(t - t_0) + \frac{a_z(t-t_0)^2}{2}$

2.8. Свободное падение тел.

- Одним из самых распространённых примеров равнопеременного движения является движение тела, брошенного под углом к горизонту, в частности, свободное падение тел. Если ось оy направить вдоль вертикали вверх, а ось оx по горизонтали (ось oz не понадобится), то в этом случае
- $a_x = 0, a_y = -g$

Закон свободного падения тел.

- Определение. Движение тела вблизи поверхности Земли только под действием силы тяжести называется свободным падением тел.
- $x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0)$
- $y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2}$
- $v_x = v_{x0}, v_y = v_{y0} - g(t - t_0)$

Падение тела с высоты.

- В частности, если тело падает с некоторой высоты h, то $y_0 = h, v_{x0} = 0, v_{y0} = 0$.
- Выразив скорость падения,
- $0 = h - \frac{g(t)^2}{2}$ $v_y = -g(t)$
- найдём $v = |v_y| = \sqrt{2gh}$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту.Progr

- Эти формулы справедливы для любого случая движения тела вблизи поверхности земли. Если известен угол бросания тела к горизонту и его начальная скорость, то предыдущие формулы видоизменяются
- $x(t) = x_0 + v_0\cos(\alpha)(t - t_0)$
- $y(t) = y_0 + v_0\sin(\alpha)(t - t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2}$
- Progr D: Progr E: Progr F: Progr G:

- Progr D: Progr E: Progr F: Progr G:

2.9. Колебательное движение.

- Примером переменного движения могут служить гармонические колебания.
- Progr D: Progr E: Progr F: Progr G:
- Определение. Периодическими движениями материальной точки называются такие движения, при которых она в каждую точку своей траектории постоянно возвращается через равные промежутки времени.

Период периодического движения

- Определение. Промежуток времени, через который материальная точка возвращается в одну и ту же точку траектории при периодическом движении, называется периодом движения. Обозначается T и измеряется в секундах.

Механические колебания.

- Определение. Механическими колебаниями материальной точки называются такие периодические движения материальной точки между двумя крайними точками пространства, при которых траектория движения материальной точки в одну сторону совпадает с траекторией движения в другую сторону.

Уравнение гармонических колебаний.

- Определение. Гармоническими колебаниями называются такие колебания, законы которых имеют вид
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$
- или
- $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

Гармонические колебания вдоль одной оси.

- Если колебание происходит вдоль оси ox, закон движения может быть записан в скалярной форме
- $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$
- Определение. Положение колеблющейся материальной точки, при котором $x = 0$, называется положением равновесия.
- Величина x_0 называется амплитудой колебания и показывает, каково максимальное отклонение колеблющейся материальной точки от положения равновесия.

Фазовый множитель

- Величина $\sin(\omega t + \varphi_0)$ называется фазовым множителем, он показывает, какую часть от максимального значения составляет в данный момент времени координата колеблющейся материальной точки.
- Величина $\varphi(t) = (\omega t + \varphi_0)$ называется фазой колебания и определяет, в какой стадии колебания находится колеблющееся тело. Измеряется в радианах.

Круговая частота и период.

- Величина ω называется круговой частотой и определяет скорость изменения фазы колебания. Чем больше круговая частота, тем быстрее совершаются колебания.
- Между круговой частотой и периодом существует связь. За один период фаза должна измениться на 2π, так что
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Связь циклической частоты с круговой.

- Определение. Циклической частотой называется величина, численно равная количеству полных циклов колебаний за единицу времени.
- Обозначается ν и равна $\nu = \frac{1}{T}$
- так что $\omega = 2\pi\nu$